UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Prof. Jorge Ruiz Castillo

1 APLICACIONES DE LA INTEGRAL

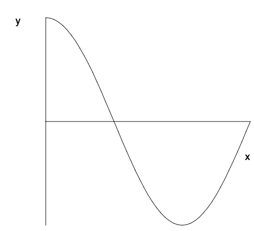
1.1 Area entre curvas

Definición.- Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables, entonces el área de la región R entre los gráficos de f y g, $x \in [a, b]$ está dada por :

$$\text{área}\,(R) = \int_a^b |f\,(x) - g\,(x)|\, dx$$

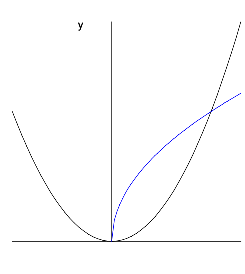
Ejenplos.-

1. Hallar el área de la región R del plano encerrada por el gr´fico de la curva de ecuación $y = \cos x, 0 \leq x \leq 3\dfrac{\pi}{2}$.
   Solución.-

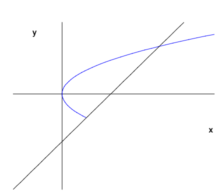


   área$(R) = 3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f\,(x)|\, dx = 3.$

2. Halar el área de la región R acotada por el gráfico de las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 2$.
   Solución.-
   área$(R) = \displaystyle\int_0^2 |f\,(x) - g\,(x)|\, dx = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$



3. Halle el área de la región R encerrada por el gráfico de las curvas de ecuaciones $x = \dfrac{1}{2}y^2$ e $y = 2x - 2$.
   Solución.-



   área$(R) = \displaystyle\int_{-1}^2 |f\,(y) - g\,(y)|\, dy \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}\,(y+2) - \frac{1}{2}y^2\right) dy = \frac{9}{4}.$

Ejercicios.-

1. Encuentre el área de la región acotada por las curvas de ecuaciones:
$$y = -x^2 + 6x + 5ey = \left| x^2 - 6x + 5 \right|.$$
2. Determine el área de la región interior a las circunferencias de ecuaciones:
$$x^2 + y^2 = 4 \text{ y } x^2 + y^2 = 4x.$$
3. Calcule el área de la región del primer cuadrante limitada por el eje$y$ y las curvas de ecuaciones:
$$y = \frac{x^2}{4}, y = 2 + \sqrt{x} \text{ e } y = 3 - x.$$
4. Calcule el área encerrada por las curvas de ecuaciones $y = f(x) = x$ e $y = g(x) = x^3$.

1.2 Cálculo de volumen

Dada una región sólida D tal que para cada $x, x \in [a, b]$ la sección transversal que pasa por x intersecta a D en una región de área constante A_0, para cada x, entonces el volumen de D es $V = A_0 (b - a)$.

Por ejemplo si D es un cilindro recto de radio r, entonces $A_0 = \pi r^2, 0 \leq x \leq h$. Luego $V(D) = \pi r^2 h$.

Supongamos ahora que el área de cada sección transversal es $A(x)$ no necesariamente constante para cada $x \in [a, b]$. si $\mathcal{P}$ es una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ...x_n\}$, entonces el volumen V de la región D es aproximadamente

$$\begin{aligned} V &\approx A(t_1)\Delta x_1 + A(t_2)\Delta x_2 + ... + A(t_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(t_k)\Delta x_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$V = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(t_k)\Delta x_k$$
y así
$$\boxed{V(D) = \int_a^b A(x)\, dx}$$
es el volumen del sólido D cuyas secciones transversales en el punto $x \in [a, b]$ tienen área $A(x)$.

Ejemplo.- encontrar el volumen V del sólido D cuyas secciones transversales son circulares con radio $x^2, 0 \leq x \leq 1$.
Solución.-

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi \left(x^2\right)^2 \pi x^4 \\ V(D) &= \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \pi x^4 dx = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Ejercicios.- Encontrar el volumen del sólido cuya secciones transversales son:

1. circulares de radio $x^3, 0 \leq x \leq 1$.
2. cuadrados de lado $x^2, 0 \leq x \leq 1$.
3. Encontrar el volumen de un cono, cilindro, esfera.

1.2.1 Método del disco

Cuando una curva continua y no negativa definida por f sobre $[a,b]$ se gira alrededor del eje x se genera una región sólida que tiene sector circular que corresponde a discos de radio $f(x)$, cuya área es

$$A(x) = \pi \left[f(x)\right]^2, x \in [a,b].$$

El volumen de este sólido es

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx.}$$

Ejemplos.-

1. Calcule el volumen de una esfera de radio a.
   Solución.- En este caso $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, -a \leq x \leq a$.
   $V = \int_{-a}^{a} \left[f(x)\right]^2 dx = \frac{4}{3}\pi a^3$.
2. Sea R la región comprendida entre la gráfica de $f(x) = \cos x - \sin x$, con $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y el eje x. Halle el volumen V del sólido obtenido al rotar R en torno del eje x.
3. Encontrar el volumen del sólido acotado por: $z = x^2 + y^2$ y $z = 1$.

.

Observación.-

1. Si f y g son continuas tales que $g(x) \leq f(x)$, entonces el volumen del sólido generado al girar la región R entre f y g, $x \in [a,b]$ en torno del eje x, está dado por:

$$V = \pi \int_a^b \left(\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right) dx$$

2. Sea f una función continua tal que $f(x) \geq c$, $x \in [a,b]$. El volumen del sólido generado al rotar la curva $y = f(x)$ alrededor de la recta $y = c$ es:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x) - c\right]^2 dx$$

1.2.2 Método del anillo

Si hacemos girar el rectángulo acotad por $x = a, x = b, y = c$ alrededor del eje y obtenemos un sólido (anillo cilindrico) de radios a y b.
El cilindro interior tiene volumen: $V_1 = \pi c a^2$.

El cilindro exterior tiene volumen: $V_2 = \pi c b^2$.
Luego el volumen del cilindro es:

$$V = V_1 - V_2 = \pi c \left(b^2 - a^2\right).$$

Sea ahora f una función continua y no negativa sobre $[a,b]$. Sea $\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n\}$

una partición de $[a,b]$. El volumen V_k del sólido obtenido al rotar la región entre la gráfica de f y el eje x, $x \in [x_{k-1}, x_k]$ aproximadamente es:

$$\begin{aligned} V_k &\approx \pi f(t_k)\left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right), t_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, ..., n \\ &= \pi f(t_k)(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= 2\pi t_k f(t_k)(x_k - x_{k-1}), \text{ con } t_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \end{aligned}$$

Luego el volumen del sólido obtenido al rotar alrededor del eje y la región entre la gráfica de f y el eje x, $x \in [a,b]$ aproximadamente es:

$$V \approx 2\pi \sum_{k=1}^{n} t_k f(t_k) \Delta x_k.$$

Por lo tanto,

$$V = 2\pi \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} t_k f(t_k) \Delta x_k,$$

es decir

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

que es el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje y la región R entre el gráfico de f y el eje x, $x \in [a,b]$.

<u>Observación</u>.-

1. Si $f(x) \leq g(x)$, $a \leq x \leq b$, entonces al girar la región R entre las gráfica sde f y g alrededor del eje y se genera un sólido de volumen

$$V = 2\pi \int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right) dx.$$

2. Si $c < a$, entonces el volumen del sólido obtenido al rotar la región entre la gráfica de f y el eje x, $a \leq x \leq b$; alrededor de la recta de ecuación $x = c$ es:

$$V = 2\pi \int_a^b (x - c) f(x)\, dx.$$

3. De acuerdo a lo visto al rotar una región alrededor del eje horizontal usaremos el método del disco y si rotamos en torno al un eje vertical usaremos el método del anillo. En realidad se puede usar cualquiera de los dos métodos en ambos casos.

Ejemplos.-

1. Sea $f(x)=x^2+1, 1\leq x\leq 2$. Encontrar el volumen del sólido generado por f al girar R alrededor del eje x.
Solución.-
$$V=2\pi\int_0^1 x\left(f(x)-g(x)\right)dx=\frac{21}{2}\pi.$$

2. Sea R la región acotada por la parábola $y^2=8x$ y la recta de ecuación $x=2$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R en torno

   (a) del eje y.
   Solución.- $f(x)=2\sqrt{2x}$
   $$V=2\left[2\pi\int_0^2 xf(x)\,dx\right]=8\sqrt{2}\pi\int_0^2 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{128}{5}\pi.$$

   (b) del eje x.
   Solución.- $f(x)=2\sqrt{2x}$
   $$V=\pi\int_0^2\left[f(x)\right]^2dx=8\pi\int_0^2 xdx=16\pi.$$
   Observación.- Usando el método del anillo $g(y)=\frac{y^2}{8}$ y
   $$V=2\pi\int_0^4 y\left(2-g(y)\right)dy.$$

   (c) de la recta de ecuación $x=2$.
   Solución.- $f(x)=2\sqrt{2x}$
   $$V=2\left[2\pi\int_0^2(2-x)f(x)\,dx\right]=8\sqrt{2}\pi\int_0^2(2-x)\sqrt{x}dx=\frac{256}{15}\pi.$$

   (d) de la recta de ecuación $x=-2$.
   Solución.- $f(x)=2\sqrt{2x}$
   $$V=2\left[2\pi\int_0^2(x+2)f(x)\,dx\right]=8\sqrt{2}\pi\int_0^2(x+2)\sqrt{x}dx=48\pi\sqrt{2}.$$

   (e) de la recta de ecuación $y=-6$.
   Solución.- $g(y)=\frac{y^2}{8}$
   $$\begin{aligned}V&=2\pi\int_{-4}^4(y+6)\left(2-g(y)\right)dy=2\pi\int_{-4}^4(y+6)\left(2-\frac{y^2}{8}\right)dy=\\&=128\pi\end{aligned}$$
   Observación.- Usando el método del disco
   $$\begin{aligned}f(x)&=2\sqrt{2x}\ yg(x)=-2\sqrt{2x}\\V&=\pi\int_0^2\left(\left[f(x)+6\right]^2-\left[g(x)+6\right]^2\right)dx=128\pi.\end{aligned}$$

3. Sea R la región entre las gráficas de $f(x)=x^3$ y $g(x)=\sqrt{x}$ con $x\in[0,2]$. Encontrar el volumen del sólido generado al rotar R en torno del eje y.
Solución.-
$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^1 x\left(f(x)-g(x)\right)dx+2\pi\int_1^2 x\left(g(x)-f(x)\right)dx=\\&=2\pi\int_0^1 x\left(x^3-\sqrt{x}\right)dx+2\pi\int_1^2 x\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx=\\&=2\pi\left(\frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{33}{5}\right)-\frac{2}{5}\pi\end{aligned}$$

.

Ejercicios.-

1. Encontrar el volumen del sólido generado al rotar la región entre la gráfica de $f(x) = x + 1$ y el eje $x, x \in [1, 2]$ alrededor del eje y.
   (a) Utilizando el método del disco.
   (b) Utilizando el método del anillo.
2. Utilice el método del disco y el método del anillo para girar la misma región anterior en torno
   (a) del eje x.
   (b) de la recta de ecuación $y = -2$.
   (c) de la recta de ecuación $y = 5$.
   (d) de la recta de ecuación $x = 3$.
   (e) de la recta de ecuación $x = -1$.
3. Realice lo mismo que en los ejercicios anteriores cuando la región R está acotada por los gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x$.

1.3 Longitud de curvas

Sea f una recta, entonces la longitud de sobre $[a, b]$ es la distancia entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, es decir

$$l = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}$$

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$.

Podemos aproximar la gráfica de f sobre $[x_{k-1}, x_k]$ por la recta L_k que pasa por $\left(x_{k-1, f(x_{k-1})}\right)$ y $(x_k, f(x_k))$, por lo que la longitud l_k de la gráfica de f sobre $[x_{k-1}, x_k]$ la podemos aproximar por la longitud de l_k, es decir

$$l_k \approx \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

De acuerdo al teorema del valor medio existe $t_k \in]x_{k-1}, x_k[$ tal que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)\,\Delta x_k.$$

Por lo tanto

$$l_k \approx \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2}\Delta x_k.$$

Luego la longitud de la curva en forma aproximada es:

$$l \approx \sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2}\Delta x_k.$$

Por lo tanto

$$l = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2}\Delta x_k,$$

es decir

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx}$$

que es la longitud de la curva definida por la función f con primera derivada continua sobre $[a, b]$.

Ejemplos.-

1. Si $f(x) = \ln(\cos x), x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, entonces

$$l = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \ln|\sec x + \tan x|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}.$$

2. Calcular la longitud de arco de la curva definida por $y = x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 5$.
   Solución.- $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \frac{335}{27}.$$

.

Ejercicio.-

1. Calcular la longitud de arco de la curva definida por $x = 3y^{\frac{3}{2}} - 1; 0 \leq y \leq 4$.
   Indicación.- $f(y) = 3y^{\frac{3}{2}} - 1$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy = \frac{8}{243}\left(82\sqrt{82} - 1\right).$$

2. Calcular la longitud de arco de la curva definida implícitamente por: $24xy = x^4 + 48; 2 \leq x \leq 4$.
   Indicación.- Derivando implícitamente c/r a x:

$$y' = \frac{4x^3 - 24y}{24x} = \frac{4x^4 - 24xy}{24x^2} = \frac{4x^4 - 16}{8x^2}.$$

1.4 Ecuaciones Paramétricas

Definición.-Consideremos $n = 2$ o $n = 3$ e I un intervalo real.
Sea $r : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función continua, entonces $rec(f)$ es una curva en $\mathbb{R}^n$.
Recibe el nombre de curva definida paramétricamente por r.

Observación.-

1. En $\mathbb{R}^3$, $r(t) = (f(t), g(t), h(t)), t \in I$.

2. Una curva $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$está definida paramétricamente por r si:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= rec(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\exists t \in I)(x,y,z) = r(t)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\exists t \in I)(x,y,z) = (f(t), g(t), h(t))\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\exists t \in I)\, x = f(t), y = g(t), z = h(t)\right\}. \end{aligned}$$

   De aquí obtenemos que: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \quad , t \in I \\ z = h(t) \end{cases}$
   es una representación paramétrica para $\mathcal{C}$.

3. También podemos escribir $r(t) = f(t)\widehat{i} + g(t)\widehat{j} + h(t)\widehat{k}$, donde $\left\{\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}\right\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

4. $r(a)$ y $r(b)$ reciben el nombre de punto inicial y punto final de la curva respectivamente.

5. La representación parametrica determina un sentido de recorrido de la curva.

6. En el plano hay dos sentidos de recorridos posibles. Estos reciben el nombre de sentido horario y sentido antihorario respectivamente.

7. La curva se dice cerrada si $r(a) = r(b)$

Ejemplos

1. Si una partícula se mueve a través de una trayectoria en el plano, entonces está trayectoria $\mathcal{C}$ tiene coordenadas x e y que dependen del tiempo t. Luego una representación paramétrica para $\mathcal{C}$ tiene la forma

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = f(t) \\ \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$$

donde f y g son continuas sobre I.

2. La curva $\mathcal{C}$ con ecuaciones paramétricas

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = 2\cos t \\ \\ y = 3\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

representa una elipse centrada en el origen ya que

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

3.

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = t \\ \\ y = 2t - 1 \end{cases}, t \in [0, 1]$$

representa un segmento de recta.

4. Encontrar las ecuaciones paramétricas de una circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en $(2, -1)$ y radio 3.
<u>Solución</u>.- $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x - 2 = 3\cos t \\ \\ y + 1 = 3\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

o

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ \\ y = 1 + 3\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

5. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva $\mathcal{C}$ de intersección del plano de ecuación $y = x$ con la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
<u>Solución</u>.- La proyección de $\mathcal{C}$ en el plano xz tiene ecuación

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$

por lo tanto

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\cos t \\ z = 2\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

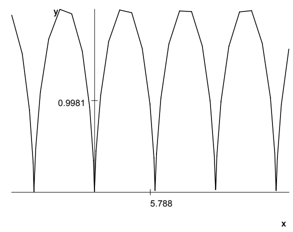
6. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva $\mathcal{C}$ de intersección de las superficies de ecuaciónes $z = x^2 + y^2$ con $z = 2x$.
<u>Solución</u>.- La proyección de $\mathcal{C}$ en el plano xy tiene ecuación

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

por lo tanto

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2 + \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

7. Hallar el volumen del sólido de revolución generado al rotar en torno del eje y la región entre el primer arco de la cicloide de ecuaciones: $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ y el eje x.
   Solución.-
   Por el método del anillo



$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{x=0}^{x=2\pi} xydx \\
&= {}^{x=t-\sin t} 2\pi \int_{t=0}^{t=2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)(1 - \cos t)\, dt \\
&= 6\pi^3.
\end{aligned}
$$

1.4.1 Longitud de arco en ecuaciones paramétricas

Sea $\mathcal{C}$ una curva con ecuaciones paramétricas

$$
\mathcal{C} : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, t \in [a, b]
$$

donde f, g y h son funciones con primera derivada continua. Se prueba de manera similaral caso de una curva en coordenadas rectangulares (ejercicio) que la longitud de la curva $\mathcal{C}$ es:

$$
l = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt
$$

Observación.-

1. En el caso $n = 2$,

$$
\mathcal{C} : \begin{cases} x = f(t) \\ \\ y = g(t) \end{cases}, t \in [a, b]
$$

   donde f y g son funciones con primera derivada continua. La fórmula queda

$$
l = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt
$$

2. En el caso $n = 2$ o $n = 3$ y si $\mathcal{C}$ es parametrizada por $r : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, entonces esta misma fórmula se escribe

$$
l = \int_a^b \|r'(t)\|\, dt
$$

   donde $\|\overrightarrow{x}\|$ representa la norma del vector $\overrightarrow{x}$.

.

Ejemplos.-

1. La circunferencia $C(0, a)$ es parametrizada por:

$$
\mathcal{C} : \begin{cases} x = a \cos t \\ \\ y = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi
$$

   y su longitud es $l = 2\pi a$.

2. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se puede parametrizar por:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = t \\ \\ y = f(t) \end{array} \right. , t \in [a, b] \quad .$$

Obtenemos
$$\left\{ \begin{array}{c} x'(t) = 1 \\ y'(t) = f'(t) \end{array} \right.$$
y la longitud de la curva definida por f es:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dt.$$

3. Hallar la longitud de un arco de la cicloide de ecuaciones

$$x = f(\theta) = \theta - \sin\theta, y = g(\theta) = 1 - \cos\theta.$$

<u>Solución</u>.- $l = 8$.

1.4.2 Area de superficies

El área de la superficie de un cubo de lado a es: $S = 6a^2$.
El área de la superficie de un cilindro de radfio r y longitud h es: $S = 2\pi r h$.
El área de un tronco de cono de longitud l y radios r_1 y r_2 es:

$$S = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} l = \pi (r_1 + r_2) l.$$

Considere ahora $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función no negativa y con primera derivada continua sobre $[a, b]$. Para cada $k = 1, 2, ..., n$: el área de la superficie del sólido obtenido al rotar f en torno del eje x, $x \in [a, b]$ es aproximadamente igual al área del tronco de cono de longitud $l = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$ y de radios $r_1 = f(x_k)$, $r_2 = f(x_{k-1})$. Así obtenemos:

$$S_k \approx \pi (f(x_k) + f(x_{k-1})) \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

como en casos anteriores por el teorema del valor medio aplicado a f sobre $[x_{k-1}, x_k]$, existe t_k tal que:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k) \Delta x_k.$$

Además
$$f(x_k) + f(x_{k-1}) \approx f(t_k) + f(t_k) = 2f(t_k).$$

Por lo tanto
$$S_k \approx 2\pi f(t_k) \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k.$$

De esta manera la superficie generada por f tiene un área aproximada:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} S_k \approx 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k \\ S &= 2\pi \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k \end{aligned}$$

es decir,
$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

es el área de la superficie obtenida al rotar f alrededor del eje x.

Ejemplo.-

1. Sea $f(x) = x^3, x \in [0,1]$. encontrar el área de la superficie generada al rotar f alrededor el del eje x.
   Solución.- f es derivable y $f'(x) = 3x^2, x \in [0,1]$.
$$S = 2\pi \int_0^1 f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \frac{\pi}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

2. Calcular el área de la superficie de revolución obtenida al rotar el arco de $x = y^3$, entre $y = 0$ e $y = 1$.
   Solución.-
$$S = \frac{\pi}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

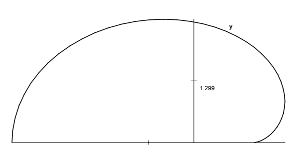
.

Observación.- Si la curva que genera a la superficie está dada por las ecuacione paramétricas
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$
entonces la superficie tiene área:
$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b g(x) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt}.$$

Ejemplo.-

1. Encontrar el área de la superficie de la esfera de radio a.
   Solución
$$\begin{cases} x = f(t) = a\cos t \\ y = g(t) = a\sin t \end{cases}, \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt = 4\pi a^2.$$

2. Hallar el área de la superficie de revolución generada al rotar en torno al eje x "la cardioide" de ecuaciones $x = f(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta, y = g(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta$
   Solución.-$(2\cos\theta - \cos 2\theta, 2\sin\theta - \sin 2\theta)$



.

$$S = \frac{128\pi}{5}.$$

1.4.3 Coordenadas polares

En el plano elegimos un punto fijo O que llamamos polo. Desde esta punto trazamos una semi-recta horizontal a la derecha del polo que llamamos eje polar. Si P es un punto del plano, su posición queda determinada por su distancia al polo y el ángulo que forma la semi-recta $\overrightarrow{OP}$ con el eje polar.

Observación.- En coordenadas cartesianas (rectangulares) la representación de un punto es única. En coordenadas polares un punto P tiene infinitas representaciones. Por ejemplo $P\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$ también puede escribirse $P\left(3, \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$ o $P\left(-3, \frac{\pi}{4} + \pi\right)$ etc.

En general $(r, \theta + 2k\pi)$ y $(-r, \theta + (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ son representaciones para el punto $P(r, \theta)$.
Para efectos de cálculos conviene permitir tomar a r valores negativos con el siguiente convenio. El punto $(-r, \theta + \pi)$ es otra representación del punto (r, θ).

<u>Observación</u>.- Suponemos que el polo coincide con el origen $(0, 0)$ del sistema de coordenadas rectangulares.

Sea P un punto de coordenadas rectangulares (x, y) y de coordenadas polares (r, θ). Tenemos:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

por lo tanto

$$\boxed{\begin{array}{c} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}}.$$

Estas relaciones permiten calcular las coordenadas de un punto en coordenadas rectangulares conocidas sus coordenadas polares o vice-versa. En este último caso

$$\boxed{\begin{array}{c} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{r}, x \neq 0 \end{array}}.$$

<u>Ejemplo</u>.- Encontrar las coordenadas rectangulares de $P\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$.
<u>Solución</u>.- $P(x, y) = \left(2\cos\dfrac{\pi}{3}, 2\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \left(1, \sqrt{3}\right)$.

<u>Gráficos en coordenadas polares</u>

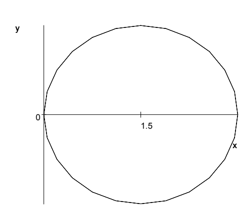
<u>Definición</u>.- el gráfico de una ecuación en coordenadas polares es el conjunto de todos los puntos $P(r, \theta)$ que satisfacen una ecuación dada.

<u>Ejemplos</u>.- Dibujar la gráfica de las siguientes ecuaciones:

1. $r = 3\cos\theta$
2. $r = \theta, \theta \geq 0$
   <u>Solución</u>.-

1. Circunferencia con centro en $C\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ y radio $r = \dfrac{3}{2}$.

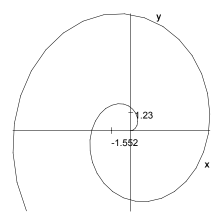
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
r	3	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
r aprox.	3	$2,6$	$1,5$	0	$-1,5$	$-2,6$



En general $r = \pm 2a\cos\theta, a > 0$ representa la ecuación de una circunferencia de radio a y centro en $(\pm a, 0)$. Ejercicio.- Verificarla y gráficarla.
$r = \pm 2a\sin\theta, a > 0$ representa la ecuación de una circunferencia de radio a y centro en $(0, \pm a)$. Ejercicio.- Verificarla y gráficarla.

2. Espiral de Arquímides

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	θ
r	0	$0,5$	$1,0$	$1,6$	$2,4$	$3,1$	$4,7$	$6,3$	$7,9$	



.

<u>Simetrías</u>.- Las siguientes reglas están descritas en términos de los ejes x e y en coordenadas rectangulares.
Una ecuación en coordenadas polares $F(r,\theta)=0$ es simétrica c/r al

a) eje x,si: $(r,\theta)\in Graf(F)\Longrightarrow(r,-\theta)\in Graf(F)$ (al reemplazar θ porπ $-\theta$ la ecuación no cambia, o θ por $2\pi-\theta$).

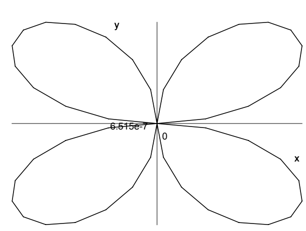
b) eje y, si:$(r,\theta)\in Graf(F)\Longrightarrow(r,\pi-\theta)\in Graf(F)$ (al reemplazar θ por $\pi-\theta$ la ecuación no cambia).

c) polo, si:$(r,\theta)\in Graf(F)\Longrightarrow(r,\pi+\theta)\in Graf(F)$ o $(-r,\theta)\in Graf(F)$ (al reemplazar θ por $\pi+\theta$ o r por $-r$ la ecuación no cambia).

.

<u>Observación</u>.-

1. si una ecuación verifica dos de las simetrías descritas, entonces también verifica la tercera.
2. Los criterios de simetrías dados no siempre dan información. Por ejemplo el gráfico de la ecuación $r=\sin 2\theta$, rosa de 4 pétalos, no verifica las reglas de simetrías descritas. sin embargo admite todas las simetrías posibles como se aprecia en el gráfico que sigue.



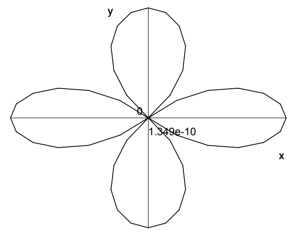
.

<u>Ejemplo</u>.- Gráficar

1. $r=2\cos 2\theta$
2. $r=2(1-\cos\theta)$
<u>Solución</u>.-

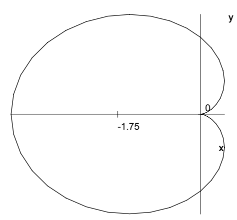
1. <u>Rosa de 4 pétalos</u>
Simetrías
eje x: θ por $-\theta$.- Hay
eje y: θ por $\pi-\theta$.- Hay
polo:Hay

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	2	1	0	-1	-2



2. <u>Cardiode</u>
   Simetrías
   eje x: θ por $-\theta$.- Hay
   eje y: θ por $\pi - \theta$.- No hay información
   polo: r por $-r$.o θ por $\pi + \theta$- No hay información

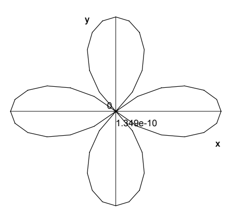
θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	π
r	0	$0,268$	1	2	3	$3,732$	4



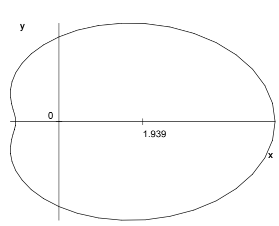
.

<u>Ejercicio</u>.- Graficar

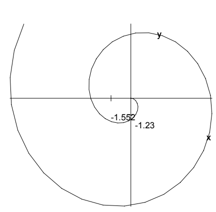
1. $r = 2\cos 2\theta$



2. $r = 3 + 2\cos\theta$



3. $r = k\theta, \theta \leq 0$



.
Observación.- Las ecuaciones:

1. $r = a\sin(n\theta)$; $r = a\cos(n\theta)$, tienen gráficas llamadas rosas de pétalos. El número de pétalos es n, si n es un entero impar y es $2n$ si n es un entero par.

2. $r = a \pm b\cos\theta$; $r = a \pm b\sin\theta$, se llaman caracoles. Si $a = b$ se llaman cardiodes.

3. $r^2 = a^2\cos(2\theta)$, $r^2 = a^2\sin(2\theta)$, tienen el aspecto de un "ocho".

.
Ecuaciones en coordenadas polares y cartesianas

Ejemplos.-

1. Expresar en coordenadas polares:

   (a) $y = x^2$
   Solución.- $r\sin\theta = r^2\cos\theta$
   . $\sin\theta = r\cos^2\theta \vee r = 0$
   . $r = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \vee r = 0$
   Por lo tanto
   $$\boxed{r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}$$

   (b) $x^2 + y^2 - 3x = 0$
   Solución.- $r^2 - 3r\cos\theta = 0$
   . $r(r - \cos\theta) = 0$
   . $r = 0 \vee r = 3\cos\theta$
   Por lo tanto
   $$\boxed{r = 3\cos\theta}$$

2. Expresar en coordenadas rectangulaes
   $$r = \frac{1}{1-\cos\theta}$$
   Solución.-$r(1-\cos\theta) = 1, \theta \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$
   . $r = 1 + r\cos\theta$
   . $\pm\sqrt{x^2+y^2} = 1 + x$
   Elevando al cuadrado
   $$\boxed{y^2 - 1 = 2x}$$

.
Intersección de curvas en coordenadas polares

Sean $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ dos curvas en coordenadas polares. Sea $P(r,\theta)$ un punto de intersección de f y g distinto del ‘polo. Entonces dado que $P(r,\theta)$ tiene representación en coordenadas polares $(r, \theta + 2k\pi) \vee (-r, \theta + (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$, se tiene que para encontrar todas las intersecciones de f y g en coordenadas polares, debe resolverse las ecuaciones:
· $f(\theta) = g(\theta + 2k\pi) \vee g(\theta) = f(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$
· $f(\theta) = -g(\theta + (2k+1)\pi) \vee g(\theta) = -f(\theta + (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$
· $f(\theta) = g(\theta) = 0$
Esta última es para decidir si el polo es un punto de intersección.

Ejemplo.- Encontrar los puntos de intersección de las curvas definidas por:
$$r = f(\theta) = \cos 2\theta \;\wedge\; r = g(\theta) = \sin\theta$$
Solución.- $f(\theta) = g(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$
. $\cos\theta = \sin(\theta + 2k\pi)$
. $\cos\theta = \sin\theta$
. $1 - 2\sin^2\theta = \sin\theta$
. $\sin\theta = \dfrac{1}{2} \vee \sin\theta = -1$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \vee \theta = \frac{5\pi}{6} \vee \theta = \frac{3\pi}{2}.$$

después de efectuada la comprobación concluímos que los que siguen son puntos de intersección de las curvas

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-1, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Por otra parte,

$$f(\theta) = -g(\theta + (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\theta = \sin\theta$$

No aporta nuevas soluciones.

Finalmente: $f(\theta) = 0$ para $\theta = \dfrac{\pi}{4} \wedge r = g(\theta) = 0$ para $\theta = 0$, lo que muestra que el polo es el cuarto punto de intersección de las curva.

Area en coordenadas polares

El área de un sector circular de ángulo θ y radio r es:

$$A(r) = \frac{\theta}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}\theta r^2$$

Sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, \theta \rightsquigarrow r = f(\theta)$, una función continua no negativa, con $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ y sea $R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$.

Sea $P = \{\theta_0, \theta_1, ..., \theta_n\}$ una partición de $[\alpha, \beta]$ y sea $t_k \in [\theta_{k-1}, \theta_k]$. Si $R_k = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq f(\theta), \theta_{k-1} \leq \theta \leq \theta_k\}$, entonces el área de R_k es aproximadamente

$$A_k \approx \frac{1}{2}[f(t_k)]^2 \Delta\theta_k.$$

Luego

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[f(t_k)]^2 \Delta\theta_k.$$

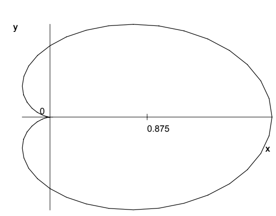
Tomando el límite cuando $\|P\| \to 0$,

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta}$$

es el área de la región $R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$.

Ejemplo.- calcularel área de la región encerrada por la cardiode de ecuación $r = 1 + \cos\theta$.

Solución.- $r = f(\theta) = 1 + \cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$



$$A = 3\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[f(\theta)]^2 d\theta\right] = \int_0^{\pi}(1 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Observación.- Si $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ son continuas y no negativas para

$$0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi.$$

Si $(\forall\theta \in [\alpha, \beta])\, g(\theta) < f(\theta)$, entonces el área de la región

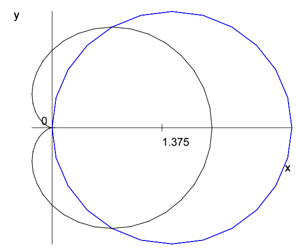
$$R = \{(r, \theta) : g(\theta) \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

es:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right) d\theta.}$$

Ejemplos.-

1. Calcular el área de la región definida al interior de $r = f(\theta) = 3\cos\theta$ y al exterior de $r = g(\theta) = 1 + \cos\theta$.
Solución.-



$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right) d\theta = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left([3\cos\theta]^2 - [1+\cos\theta]^2\right) d\theta = \pi. \end{aligned}$$

2. Calcular el área de la región interior a ambas curvas del problema anterior.
Solución.-
$$A = \frac{5\pi}{4}.$$

3. Calcular el área de la región definida al interior de $r = g(\theta) = 1 + \cos\theta$ y al exterior de $r = f(\theta) = 3\cos\theta$.
Solución.-
$$A = \frac{\pi}{4}.$$

4. Calcule el área de la región contenida al interior de $r = f(\theta) = 3\cos\theta$ o al interior de $r = g(\theta) = 1 + \cos\theta$.
Solución.-
$$A = \frac{5\pi}{2}.$$

.

Cálculo I y II - 520141
8 de Septiembre de 2005
JRC