Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 1: Lógica y conjuntos
Ejercicio 1

Universidad de Concepción

Enunciado: Sean p y q dos proposiciones y sea $\#$ el conectivo lógico tal que $p \# q$ tiene el mismo valor de verdad que $\sim p \wedge \sim q$.

1. Construir la tabla de verdad para $p \# q$.
2. Demostrar que $(\sim p \# q) \vee (\sim q \# p)$ es equivalente a $\sim (p \leftrightarrow q)$.

Desarrollo:

1. De las definiciones de negación y conjunción, se tiene

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

y por lo tanto, de lo anterior y de la definición de $\#$, la tabla asociada a dicho conectivo está dada por

p	q	$p \# q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2. Considerando $r := (\sim p \# q) \vee (\sim q \# p)$ y $s := \sim (p \leftrightarrow q)$ y la tabla

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \# q$	$\sim q \# p$	r	$p \leftrightarrow q$	s
V	V	F	F	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	F	V	F

Se observa en cada fila que el valor de verdad de r es idéntico al valor de verdad de s, por lo que $r \leftrightarrow s$ es una tautología y entonces

$$[(\sim p \# q) \vee (\sim q \# p)] \Leftrightarrow [\sim (p \leftrightarrow q)]$$

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 1: Lógica y conjuntos
Ejercicio 2

Universidad de Concepción

Enunciado: Para el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, hallar el valor de verdad y escribir la negación de cada una de las siguientes proposiciones:

1. $p_1 := \forall x \in A : x^2 + 3x < 12$
2. $p_2 := \exists x \in A : x^2 + 3x < 12$
3. $p_3 := \exists x \in A : x^2 + 3x > 12$
4. $p_4 := \forall x \in A : x^2 + 3x > 12$
5. $p_5 := \exists! x \in A : x^2 + 3x = 12$

Desarrollo: Se definen $q(x) := x^2+3x < 12$, $r(x) := x^2+3x > 12$ y $s(x) := x^2 + 3x = 12$; además, de las equivalencias

$$\sim (\forall t : h(t)) \Leftrightarrow \exists t :\sim h(t) \quad \text{y} \quad \sim (\exists t : h(t)) \Leftrightarrow \forall t :\sim h(t),$$

se tiene:

1. Como $q(3) \Leftrightarrow 3^2 + 3 \cdot 3 < 12 \Leftrightarrow 18 < 12$ es falsa, entonces p_1 es falsa y su negación es

$$\exists x \in A : x^2 + 3x \geq 12.$$

2. Como $q(1) \Leftrightarrow 1^2 + 3 \cdot 1 < 12 \Leftrightarrow 4 < 12$ es verdadera, entonces p_2 es también verdadera y su negación es

$$\forall x \in A : x^2 + 3x \geq 12.$$

3. Como $r(3) \Leftrightarrow 3^2+3\cdot 3 > 12 \Leftrightarrow 18 > 12$ es verdadera, entonces p_3 es verdadera y su negación es

$$\forall x \in A : x^2 + 3x \leq 12.$$

4. Como $r(2) \Leftrightarrow 2^2 + 3 \cdot 2 > 12 \Leftrightarrow 10 > 12$ es falsa, entonces p_4 es falsa y su negación es

$$\exists x \in A : x^2 + 3x \leq 12.$$

5. Como $s(1) \Leftrightarrow 1^2 + 3 \cdot 1 = 12 \Leftrightarrow 4 = 12$ es falsa, $s(2)$ es falsa y $s(3)$ también es falsa, entonces p_5 es falsa y su negación es

$$(\forall x \in A :\sim s(x)) \veebar (\exists x \in A, \exists y \in A, x \neq y : s(x) \wedge s(y))\,.$$

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 1: Lógica y conjuntos
Ejercicio 3

Universidad de Concepción

Enunciado: Considerar la proposición p definida por

$$\forall x \in \mathbb{R} : x < 2 \rightarrow 0 < x^2 < 4.$$

1. Determinar el valor de verdad de p.
2. Escribir la negación de p.

Desarrollo:

1. p afirma que para cualquier x real, $x < 2 \to 0 < x^2 < 4$.

   Para $x = 0$, el condicional $x < 2 \to 0 < x^2 < 4$ es falso, pues su antecedente es verdadero y su consecuente es falso. Por lo tanto, p es falsa.

2. La negación de p es

$$
\begin{aligned}
\sim p \quad &\Leftrightarrow \quad \sim \left(\forall x \in \mathbb{R} : x < 2 \to 0 < x^2 < 4\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} : \sim \left(x < 2 \to 0 < x^2 < 4\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} :\ x < 2 \wedge \sim \left(0 < x^2 < 4\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} :\ x < 2 \ \wedge \left(x^2 \leq 0 \vee\ x^2 \geq 4\right)
\end{aligned}
$$

Ejercicios resueltos

Matemática I (527113/527117)

Tema 1: Lógica y conjuntos

Ejercicio 4

Universidad de Concepción

Enunciado: Dado el conjunto $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Decidir si
$$\forall x \in M, \exists y \in M : x + y < 6$$
es verdadera.

2. Escribir la negación de la proposición de la parte anterior.

3. Hallar el conjunto de validez para la función proposicional p definida por
$$\text{Para } x \in M, \exists y \in M : x + y < 5.$$

Desarrollo:

1. Si $x = 5$, no existe $y \in M$ tal que $x + y < 6$, esto porque al sumar 5 con cada elemento de M se obtiene siempre una cantidad mayor o igual que 6. Por lo tanto, la proposición es falsa.

2. La negación pedida es

$$\begin{gathered}\sim (\forall x \in M, \exists y \in M : x + y < 6)\\ \exists x \in M, \sim (\exists y \in M : x + y < 6)\\ \exists x \in M, \forall y \in M : \sim (x + y < 6)\\ \exists x \in M, \forall y \in M : x + y \geq 6\end{gathered}$$

3. Para hallar el conjunto pedido, se debe analizar para cada valor de $x \in M$, si la afirmación

$$\exists y \in M : x + y < 5,$$

es verdadera o no.

Para $x = 1$, existe $y = 1 \in M$ tal que $x + y = 2 < 5$,

para $x = 2$, existe $y = 1 \in M$ tal que $x + y = 3 < 5$,

para $x = 3$, existe $y = 1 \in M$ tal que $x + y = 4 < 5$,

para $x = 4$, no existe $y \in M$ tal que $x + y < 5$ y

para $x = 5$, tampoco existe $y \in M$ tal que $x + y < 5$.

De lo anterior, $V_p = \{1, 2, 3\}$.

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 1: Lógica y conjuntos
Ejercicio 5

Universidad de Concepción

Enunciado: Sean $A = \{2, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ y $B = \{\emptyset, \{0\}\}$. Decidir justificadamente si las siguientes proposiciones son verdareras o falsas.

1. $2 \in A \wedge \{0\} \subseteq B$
2. $\{2\} \in A \vee \{\emptyset\} \subseteq B$
3. $\emptyset \in A \to \{\emptyset, \{0\}\} \subset B$
4. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$.

Además, indicar la validez de la última afirmación si A y B son conjuntos arbitrarios.

Desarrollo:

1. $(2 \in A \wedge \{0\} \subseteq B)$ tiene valor de verdad $(V \wedge F) \Leftrightarrow F$
2. $(\{2\} \in A \vee \{\emptyset\} \subseteq B)$ posee valor $(F \vee V) \Leftrightarrow V$
3. $(\emptyset \in A \to \{\emptyset, \{0\}\} \subset B)$ tiene valor $(V \to F) \Leftrightarrow F$
4. Si A y B son conjuntos cualesquiera, se tiene

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (A \cap B) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cap U \\ &= A, \end{aligned}$$

por lo tanto la afirmación es *siempre* verdadera.

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

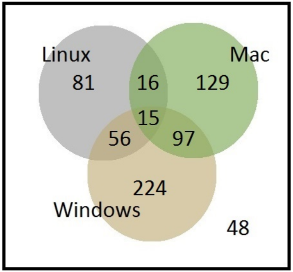
Tema 1: Lógica y conjuntos
Ejercicio 6

Universidad de Concepción

Enunciado: En una encuesta se obtuvo la siguiente información sobre el manejo de los sistemas operativos Linux, Mac y Windows: De un grupo de estudiantes; 168 manejan Linux, 257 manejan Mac, 392 manejan Windows, 31 manejan simultáneamente Linux y Mac, 71 manejan Linux y Windows, 112 manejan Mac y Windows, 15 manejan los tres sistemas y 48 no manejan ninguno. Determinar el número de estudiantes que:

1. fueron encuestados.
2. no manejan Windows.
3. manejan Linux y Mac o manejan Linux y Windows.
4. manejan dos de los sistemas.

Desarrollo: Conviene considerar un diagrama de Venn asociado a los resultados de la encuesta



y luego determinar las cantidades solicitadas:

1. $|U| = 81 + 16 + 129 + 56 + 15 + 97 + 224 + 48 = 666$
2. $|W^c| = 81 + 16 + 129 + 48 = 274$
3. $|(L \cap M) \cup (L \cap W)| = (16 + 15) + (56 + 15) - 15 = 87$
4. $|(L \cap M) \cup (L \cap W) \cup (M \cap W)| = 16 + 15 + 56 + 97 = 184$

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 1: Lógica y conjuntos
Ejercicio 7

Universidad de Concepción

Enunciado: La potencia $P(X)$ de un conjunto X, está formada por todos los conjuntos Y, tales que Y es subconjunto de X. Para $A = \{4, 7\}$ y $B = \{z\}$:

1. Verificar que $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$.
2. Verificar que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Además, verificar que si A y B son conjuntos arbitrarios, entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B).$$

Desarrollo: Un conjunto no vacío, está en $P(X)$ si todos sus elementos están en X, además de la definición, se tiene que $\emptyset$ y X están siempre en $P(X)$, pues $\emptyset \subseteq X$ y $X \subseteq X$.

1. Como $P(A) = \{\emptyset, \{4\}, \{7\}, A\}$ y $P(B) = \{\emptyset, B\}$, entonces
$$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{4\}, \{7\}, A, B\}.$$
Ahora, dado que $A \cup B = \{4, 7, z\}$, se tiene que
$$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{4\}, \{7\}, \{z\}, \{4, 7\}, \{4, z\}, \{7, z\}, A \cup B\}.$$
De lo anterior, $\{4, 7\} \in P(A \cup B)$ y $\{4, 7\} \notin P(A) \cup P(B)$, por lo tanto
$$P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B).$$

2. Como $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cap B) = \{\emptyset\}$ y además dado que

$$P(A) \cap P(B) = \{\emptyset, \{4\}, \{7\}, A\} \cap \{\emptyset, B\} = \{\emptyset\},$$

se comprueba que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Por otra parte, para A y B arbitrarios, se tiene que

$$\begin{aligned} X \in P(A \cap B) &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \\ &\Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B) \\ &\Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B) \end{aligned}$$

y por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 2: Sistemas numéricos, ecuaciones e inecuaciones
Ejercicio 1

Universidad de Concepción

Enunciado: Beto, Manolo y Paco compiten en una elección como candidatos a alcalde de su comuna, considerando que

- Beto obtuvo $\dfrac{8}{25}$ de los votos,
- Manolo obtuvo el $35\,\%$,
- Paco obtuvo 18000 votos

y sabiendo que votaron 60000 personas:

1. ¿Quién ganó la elección?
2. ¿Qué porcentaje de personas no votó por ninguno de los tres candidatos?

Desarrollo:

1. La cantidad votos que obtuvo Beto es

$$\frac{8}{25}\cdot 60000 = \frac{8\cdot 60000}{25} = \frac{8\cdot 2400\cdot \cancel{25}}{\cancel{25}} = 8\cdot 2400 = 19200,$$

la cantidad votos que obtuvo Manolo es

$$\frac{35}{100}\cdot 60000 = \frac{35\cdot 60000}{100} = \frac{35\cdot 600\cdot \cancel{100}}{\cancel{100}} = 35\cdot 600 = 21000$$

y como Paco obtuvo 18000 votos, entonces el ganador de la elección es Manolo.

2. El total de personas que no votaron por ninguno de los tres candidatos es

$$60000 - (19200 + 21000 + 18000) = 60000 - 58200 = 1800,$$

por lo cual la proporción de dichas personas con respecto al total de votantes es

$$\frac{1800}{60000} = \frac{3 \cdot \cancel{600}}{\cancel{600} \cdot 100} = \frac{3}{100},$$

la cual equivale a un 3 %.

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 2: Sistemas numéricos, ecuaciones e inecuaciones
Ejercicio 2

Universidad de Concepción

Enunciado: Indicar justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}$
2. $\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} = \sqrt{4\sqrt{7}}$
3. $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

Indicación 1: Si x es un número real no negativo, entonces $\sqrt{x}$ es el único número real no negativo tal que su cuadrado es x.

Indicación 2: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

1. $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}$

Respuesta: De la definición de raíz cuadrada y dado que

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9+4\sqrt{5},$$

se tiene que en la igualdad original, el cuadrado del lado derecho coincide con la cantidad subradical de lado izquierdo y por lo tanto, la afirmación es verdadera.

2. $\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{4\sqrt{7}}$

Respuesta: Al reescribir el lado izquierdo, se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}} &= \sqrt{1+2\sqrt{7}+7}-\sqrt{7-2\sqrt{7}+1}\\
&= \sqrt{\left(1+\sqrt{7}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}\\
&= 1+\sqrt{7}-\left(\sqrt{7}-1\right)\\
&= 2
\end{aligned}$$

y por lo tanto, la afirmación es falsa.

3. $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

Respuesta: Para $a \geq 0$ y $b \geq 0$, $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

El cuadrado del lado izquierdo de la igualdad original, es

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 &= 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} \\
&= 4 - 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} \\
&= 4 - 2 \cdot 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Dado que $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} > 0$ y $\sqrt{2} > 0$, de la propiedad indicada al inicio, se concluye que la afirmación es verdadera.

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 2: Sistemas numéricos, ecuaciones e inecuaciones
Ejercicio 3

Universidad de Concepción

Enunciado: Resolver los siguientes problemas con enunciado:

1. Si 64 se divide en tres partes proporcionales a 2, 4 y 6 respectivamente, determinar la parte más pequeña.
2. Si m personas pueden realizar un trabajo en n días, ¿en cuántos días pueden realizar el trabajo $m + r$ personas?
3. *Flash* corre desde Concepción a Chillán a 400 kilómetros por hora y luego realiza el viaje inverso a 600 kilómetros por hora. Determinar la velocidad promedio.

Desarrollo:

1. Para dividir a 64 en tres partes proporcionales a 2, 4 y 6, se pueden considerar las cantidades $2x$, $4x$ y $6x$, respectivamente.

   Como la suma de estas cantidades ha de ser 64, se tiene que

   $$2x + 4x + 6x = 64,$$

   de donde $x = \dfrac{64}{12} = \dfrac{16}{3}$ y por lo tanto, la parte más pequeña es

   $$2x = \frac{32}{3} = \frac{30+2}{3} = \frac{30}{3} + \frac{2}{3} = 10 + \frac{2}{3},$$

   es decir, $10\frac{2}{3}$.

2. Las cantidades p de personas y d de días para realizar el trabajo son inversamente proporcionales, es decir, existe una constante k, tal que p y d satisfacen siempre la relación

$$pd = k.$$

De la igualdad anterior, si m personas realizan el trabajo en n días y $m + r$ personas realizan el trabajo en x días, entonces

$$mn = (m + r)x$$

y entonces $x = \dfrac{mn}{m + r}$.

Por lo tanto, $m + r$ personas realizan el trabajo en $\dfrac{mn}{m + r}$ días.

3. Sea d la distancia entre Concepción y Chillán. Para la ida, como velocidad es igual a distancia dividido por tiempo, se tiene que $400 = \frac{d}{t_1}$ y $t_1 = \frac{d}{400}$ es el tiempo del primer trayecto.

   Para la vuelta, de manera análoga, $t_2 = \frac{d}{600}$ es lo que tarda Flash desde Chillán hasta Concepción.

   De lo anterior, considerando las distancias de ida y vuelta y los tiempos t_1 y t_2, la velocidad promedio es

$$v_m = \frac{d_{total}}{t_{total}} = \frac{2d}{\frac{d}{400} + \frac{d}{600}} = 480,$$

   la cual está medida en kilómetros por hora.

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 2: Sistemas numéricos, ecuaciones e inecuaciones
Ejercicio 4

Universidad de Concepción

Enunciado: Determinar el valor de $x \in \mathbb{R}$ que satisface la ecuación

$$\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-5}.$$

Indicación: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Desarrollo: Elevando al cuadrado, se tiene

$$\begin{aligned}
4x - 3 - 2\sqrt{4x-3}\sqrt{x-2} + x - 2 &= 3x - 5 \\
-2\sqrt{(4x-3)(x-2)} &= -2x \\
\sqrt{4x^2 - 11x + 6} &= x \\
4x^2 - 11x + 6 &= x^2 \\
3x^2 - 11x + 6 &= 0 \\
(3x-2)(x-3) &= 0
\end{aligned}$$

Ahora, de lo anterior y el hecho que

$$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0),$$

se obtiene que $x = 2/3$ o que $x = 3$.

Dado que las expresiones $\sqrt{4x-3}$, $\sqrt{x-2}$ y $\sqrt{3x-5}$, no están definidas si $x = 2/3$, este valor se descarta como solución.

Por otra parte, como

$$\sqrt{4 \cdot 3 - 3} - \sqrt{3 - 2} = 3 - 1 = 2 = \sqrt{3 \cdot 3 - 5},$$

entonces la (única) solución es $x = 3$.

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 2: Sistemas numéricos, ecuaciones e inecuaciones
Ejercicio 5

Universidad de Concepción

Enunciado: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{b}{a} & (1) \\ x - y = a & (2) \end{cases}$$

utilizando los métodos de:

1. sustitución.
2. igualación.
3. eliminación.

Desarrollo:

1. Al multiplicar por ab en (1) y despejar x, se tiene

$$bx - ay = b^2 \Leftrightarrow bx = b^2 + ay \Leftrightarrow x = \frac{ay + b^2}{b}.$$

Al reemplazar x en (2),

$$\begin{aligned} \frac{ay + b^2}{b} - y &= a \\ ay + b^2 - by &= ab \\ (a - b)y &= b(a - b) \\ y &= b. \end{aligned}$$

Ahora, reemplazando $y = b$ en (2),

$$x - y = a \Leftrightarrow x - b = a \Leftrightarrow x = a + b.$$

2. Multiplicando por $-ab$ en (1), se tiene

$$-bx + ay = -b^2 \Leftrightarrow ay = bx - b^2 \Leftrightarrow y = \frac{bx - b^2}{a}.$$

Por otra parte, al despejar y de (2)

$$x - y = a \Leftrightarrow -y = a - x \Leftrightarrow y = x - a.$$

Luego, por igualación

$$\begin{aligned} \frac{bx - b^2}{a} &= x - a \\ bx - b^2 &= ax - a^2 \\ x(b-a) &= (b+a)(b-a) \\ x &= a + b \end{aligned}$$

y por lo tanto, $y = b$.

3. Al multiplicar (1) por ab,

$$bx - ay = b^2 \qquad (3)$$

y al multiplicar (2) por a,

$$ax - ay = a^2. \qquad (4)$$

Restando (4) de (3),

$$\begin{aligned} bx - ax &= b^2 - a^2 \\ x(b-a) &= (b+a)(b-a) \\ x &= a+b \end{aligned}$$

y entonces, reemplazando $x = a + b$ en (2),

$$a + b - y = a \Leftrightarrow -y = -b \Leftrightarrow y = b.$$

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 2: Sistemas numéricos, ecuaciones e inecuaciones
Ejercicio 6

Universidad de Concepción

Enunciado: Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{6x}{x-6} - 5 \leq 0.$$

Desarrollo: Dado que

$$\begin{aligned}
\frac{6x}{x-6} - 5 &= \frac{6x}{x-6} - 5 \cdot \frac{x-6}{x-6} \\
&= \frac{6x}{x-6} - \frac{5(x-6)}{x-6} \\
&= \frac{6x - 5x + 30}{x-6} \\
&= \frac{x+30}{x-6},
\end{aligned}$$

la inecuación dada es equivalente a

$$\frac{x+30}{x-6} \leq 0.$$

Para analizar el signo del lado izquierdo, es útil considerar los valores $x = -30$ y $x = 6$, pues ellos anulan respectivamente el numerador y el denominador de la fracción que ahí aparece.

Considerando la tabla

x		-30		6	
$x+30$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x+30}{x-6}$	$+$	0	$-$	¡Indeterminado!	$+$

se obtiene que el conjunto solución es

$$S = [-30, 6[\,.$$

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 2: Sistemas numéricos, ecuaciones e inecuaciones
Ejercicio 7

Universidad de Concepción

Enunciado: Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que:

1. $$\frac{6x}{x-6} - 5 \geq 0$$
2. $$\sqrt{\frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 + 4x + 5}} \in \mathbb{R}$$

Desarrollo:

1. La inecuación es equivalente a $\dfrac{6x}{x-6} \geq 5$.

   Primer caso: Si $x < 6$, la inecuación queda

   $$6x \leq 5\,(x-6) \Leftrightarrow x \leq -30$$

   y se obtiene $S_i = \left]-\infty, 6\right[\cap \left]-\infty, -30\right] = \left]-\infty, -30\right]$.

   Segundo caso: Si $x > 6$, la inecuación queda

   $$6x \geq 5\,(x-6) \Leftrightarrow x \geq -30$$

   y se obtiene $S_{ii} = \left]6, +\infty\right[\cap \left[-30, +\infty\right[= \left]6, +\infty\right[$.

   De lo anterior, $S_1 = S_i \cup S_{ii} = \left]-\infty, -30\right] \cup \left]6, +\infty\right[$.

2. Para que $\sqrt{\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x+5}}$ sea real, debe tenerse que

$$\frac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x+5} \geq 0$$

y dado que la fracción puede reescribirse como

$$\frac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x+5} = \frac{(3x-1)(x-2)}{x^2+x^2+4x+4+1} = \frac{(3x-1)(x-2)}{x^2+(x+2)^2+1},$$

se observa que en ella el denominador es siempre positivo.

De la lo anterior, se obtiene la equivalencia

$$\sqrt{\frac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x+5}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (3x-1)(x-2) \geq 0.$$

2. Ahora, de la de tabla de signos

x		$1/3$		2	
$3x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(3x-1)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

los $x \in \mathbb{R}$ tales que $\Leftrightarrow (3x-1)(x-2) \geq 0$, pertenecen a

$$S_2 = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty[\,,$$

conjunto para el cual

$$\sqrt{\frac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x+5}} \in \mathbb{R}.$$

Ejercicios resueltos

Matemática I (527113/527117)

Tema 2: Sistemas numéricos, ecuaciones e inecuaciones

Ejercicio 8

Universidad de Concepción

Enunciado: Determinar los valores de a y b en $\mathbb{R}$ tales que

$$(a+bi)^2 = -15 - 8i,$$

para luego resolver en $\mathbb{C}$, la ecuación

$$z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0.$$

Desarrollo: Como $(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, entonces a y b deben satisfacer

$$a^2 - b^2 = -15 \tag{1}$$
$$ab = -4 \tag{2}$$

Al despejar b de (2), $b = -\dfrac{4}{a}$ y reemplazando en (1), se obtiene

$$(a^2 + 16)(a^2 - 1) = 0$$

y como a es real, entonces $a = \pm 1$ y por lo tanto, $b = \mp 4$. Así, los valores son $a = -1$ y $b = 4$ o $a = 1$ y $b = -4$.

La ecuación $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$ tiene soluciones dadas por

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(5-i)}}{2} \\ &= \frac{3-2i \pm \sqrt{-15-8i}}{2} \end{aligned}$$

Como las dos raíces cuadradas de $-15-8i$ son $-1+4i$ y $1-4i$, la ecuación cuadrática tiene como soluciones a

$$z = \frac{3-2i \pm (1-4i)}{2}$$

y entonces el conjunto solución es $\{1+i, 2-3i\}$.

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 3: Geometría analítica en el plano
Ejercicio 1

Universidad de Concepción

Enunciado: Determinar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de $(2, -1)$ y $(3, 4)$.

Desarrollo: Sean los puntos $A := (2, -1)$ y $B := (3, 4)$. Sea además $P := (x, y)$ un punto en el lugar geométrico, como la distancia de P a A coincide con la de P a B, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} &= \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} \\
(x-2)^2 + (y+1)^2 &= (x-3)^2 + (y-4)^2 \\
x + 5y - 10 &= 0,
\end{aligned}$$

en donde la última igualdad corresponde a la ecuación pedida.

Desarrollo alternativo: Al identificar que el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de $A := (2, -1)$ y $B := (3, 4)$, corresponde a una recta L_2, tal que ella:

- es perpendicular a la recta L_1 que contiene a los puntos A y B.
- contiene al punto medio entre A y B.

Dado que la pendiente de L_1 es

$$m_1 = \frac{4 - (-1)}{3 - 2} = 5,$$

la pendiente de L_2 es $m_2 = -\dfrac{1}{5}$ y como el punto medio entre A y B es $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, entonces la ecuación de L_2 es

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow x + 5y - 10 = 0.$$

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 3: Geometría analítica en el plano
Ejercicio 2

Universidad de Concepción

Enunciado: Calcular la distancia desde el punto $(4, 1)$ hasta la recta de ecuación $3x - 4y + 17 = 0$.

Desarrollo: Sean $P_1 := (4, 1)$ y L_1 la recta indicada.

Si L_2 es la recta perpendicular a L_1 que contiene a P_1, entonces una manera de determinar la distancia pedida es calculando la distancia entre P_2 y P_1, donde P_2 es la intersección entre L_1 y L_2.

Como $3x - 4y + 17 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{17}{4}$, L_2 tiene pendiente $m_2 = -\dfrac{4}{3}$ y su ecuación, de la fórmula punto pendiente, es

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 4) \Leftrightarrow 4x + 3y - 19 = 0.$$

Resolviendo el sistema lineal asociado a L_1 y L_2, se tiene que el punto de intersección entre estas rectas es $P_2 = (1, 5)$ y por lo tanto,

$$d(P_1, L_1) = \sqrt{(1-4)^2 + (5-1)^2} = 5.$$

Desarrollo alternativo: Como la distancia desde la recta de ecuación $Ax + By + C = 0$ hasta el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dada por

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

en este caso al identificar $A = 3$, $B = -4$, $C = 17$, $x_0 = 4$ e $y_0 = 1$, se tiene que la distancia desde *la recta* L de ecuación $3x - 4y + 17 = 0$ hasta el punto $P := (4, 1)$ es

$$d(P, L) = \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + 17|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5.$$

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 3: Geometría analítica en el plano
Ejercicio 3

Universidad de Concepción

Enunciado: Determinar la ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos $P_1 = (1, 8)$, $P_2 = (-8, 5)$ y $P_3 = (-7, 2)$ y luego trazar su gráfica. Además, calcular el área del triángulo cuyos vértices son el centro de la circunferencia y las intersecciones de ella con el eje y.

Desarrollo: Sea $C := (h, k)$ el centro de la circunferencia. Igualando las distancias de P_1 a C y de P_2 a C, se tiene

$$\sqrt{(h-1)^2 + (k-8)^2} = \sqrt{(h+8)^2 + (k-5)^2} \Rightarrow 9h + 3k + 12 = 0 \quad (1)$$

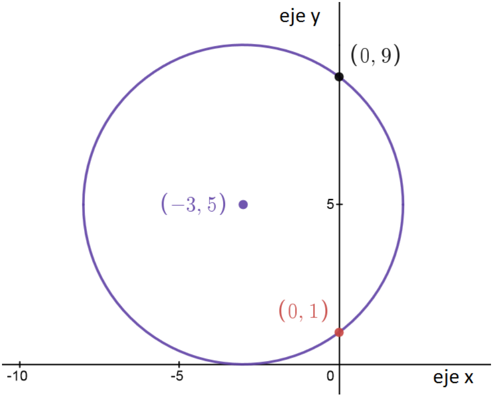
Igualando las distancias de P_2 a C y de P_3 a C, se tiene

$$\sqrt{(h+8)^2 + (k-5)^2} = \sqrt{(h+7)^2 + (k-2)^2} \Rightarrow h - 3k + 18 = 0 \quad (2)$$

De (1) y (2), se obtiene que $C = (-3, 5)$, que el radio de la circunferencia es $r = d(C, P_1) = 5$ y que la ecuación es de la circunferencia es

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

En la figura



se observa la circunferencia y que el triángulo indicado en el enunciado tiene base 8, altura 3 y por tanto, área igual a 12 unidades cuadradas de longitud.

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 3: Geometría analítica en el plano
Ejercicio 4

Universidad de Concepción

Enunciado: Desde cada punto Q de la circunferencia de centro en el origen y radio 2 se traza una recta perpendicular al eje x que corta a este en un punto R. Determinar e identificar el lugar geométrico de todos los puntos medios P del segmento $\overline{QR}$.

Desarrollo: Sea $P = (p_x, p_y) := (x, y)$ un punto en el lugar geométrico y sea $R = (r_x, r_y) := (x, 0)$ un punto sobre el eje x.

De la ecuación de la circunferencia, que es $x^2 + y^2 = 4$, despejando y se tiene que

$$Q = (q_x, q_y) = \left(x, \pm\sqrt{4 - x^2}\right).$$

Por otra parte, como P es el punto medio entre Q y R, de la relación

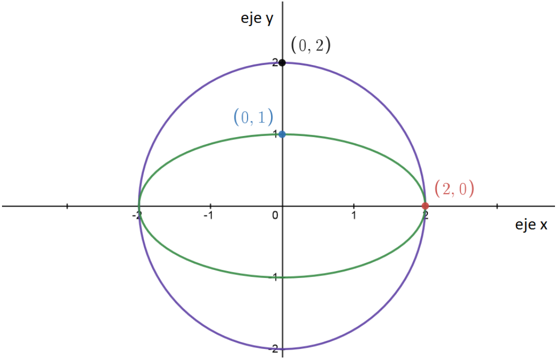
$$(p_x, p_y) = \left(\frac{q_x + r_x}{2}, \frac{q_y + r_y}{2}\right),$$

se tiene que $p_y = \dfrac{q_y + r_y}{2}$.

De lo anterior, P debe satisfacer

$$y = \frac{\pm\sqrt{4-x^2}}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

y entonces el lugar geométrico corresponde a la elipse horizontal de centro en el origen y con semiejes de longitud 2 y 1.



Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 3: Geometría analítica en el plano
Ejercicio 5

Universidad de Concepción

Enunciado: Considerar la hipérbola y la parábola, definidas por

$$9x^2 - 72x - 4y^2 + 48y - 36 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + 8x + 8y + 16 = 0\,.$$

1. Indicar el centro C de la hipérbola y el vértice V de la parábola.
2. Hallar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de C y de V.
3. Calcular el área de la región del primer cuadrante que está encerrada por el lugar geométrico de la parte anterior y los ejes coordenados.

Desarrollo:

1. Dado que

$$9x^2 - 72x - 4y^2 + 48y - 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-6)^2}{9} = 1,$$

se observa que el centro de la hipérbola está en $C = (4, 6)$.

Por otra parte, como

$$x^2 + 8x + 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 = -8y,$$

se observa que el vértice de la parábola es $V = (-4, 0)$.

2. Sea $P := (x, y)$ un punto en el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de C y de V, se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2} &= \sqrt{(x+4)^2+y^2} \\ x^2-8x+16+y^2-12y+36 &= x^2+8x+16+y^2 \\ 4x+3y &= 9. \end{aligned}$$

3. La recta L, de ecuación $4x + 3y = 9$, intersecta al eje x en el punto $(9/4, 0)$ e intersecta al eje y en el punto $(0, 3)$.

   De lo anterior, si T es la región acotada por L y los ejes coordenados, se tiene que T es un triángulo cuya base mide $9/4$ unidades de longitud y cuya altura mide 3 unidades de longitud, de donde

$$\text{Área}(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27}{8} \text{ unidades cuadradas de longitud.}$$

Ejercicios resueltos
Matemática I (527113/527117)

Tema 3: Geometría analítica en el plano
Ejercicio 6

Universidad de Concepción

Enunciado: Sean L la recta de ecuación $y = 4$ y $P_0 = (3, -2)$. Identificar e indicar los elementos principales del lugar geométrico de todos los puntos $P = (x, y)$ tales que las circunferencias con centro en P y que contienen a P_0, son tangentes a L.

Desarrollo: La distancias de P a P_0 y de P a L coinciden, esto porque ellas determinan los radios de la circunferencias que pasan por P_0 y son tangentes a L; por lo tanto, el lugar geométrico posee ecuación

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} &= |y-4| \\ (x-3)^2+(y+2)^2 &= (y-4)^2 \\ (x-3)^2 &= -12(y-1). \end{aligned}$$

De lo anterior, identificando $h = 3$, $k = 1$ y $p = -3$, el lugar geométrico es una parábola vertical que se abre hacia abajo, con

- vértice en $(h, k) = (3, 1)$,
- foco en $(h, k+p) = (3, -2)$ y
- directriz de ecuación $y = k - p \Leftrightarrow y = 4$.