Recopilación de ejercicios resueltos para Matemática II (527114/527118)

©Prof. E. Gavilán G.
egavilan@udec.cl

Concepción, 1 de abril de 2024

Índice

1. Funciones

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$f(x-2) = x^2 + 2x + 4.$$

   a) Calcular $f(0)$ y $f(3)$.

   b) Utilizando la sustitución $t = x - 2$, determinar la expresión que define a $f(t)$.

   c) Hallar el conjunto $f^{-1}(12)$.

Solución:

a) Si en la igualdad definida por $f(x-2) = x^2 + 2x + 4$ se considera $x = 2$, se tiene que $f(0) = 4 + 4 + 4 = 12$ y si se considera $x = 5$, se tiene que $f(3) = 25 + 10 + 4 = 39$.

b) Dado que $x = t + 2$ y como $f(x-2) = x^2 + 2x + 4$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(t) &= (t+2)^2 + 2(t+2) + 4 \\ &= t^2 + 4t + 4 + 2t + 4 \\ &= t^2 + 6t + 12. \end{aligned}$$

c) Como $f(t) = 12 \Leftrightarrow t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow (t = -6 \vee t = 0)$, entonces

$$f^{-1}(12) = \{-6, 0\}.$$

2. Sea $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por

$$g(x) = -\sqrt{5 + 4x - x^2}\,.$$

Determinar, de manera analítica, dominio y recorrido.

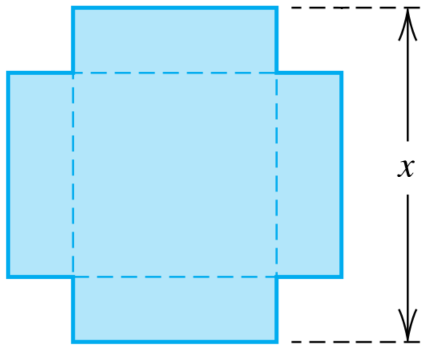
Solución: De la definición de dominio, se tiene

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : 5 + 4x - x^2 \geq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x+1)(x-5) \leq 0\} \\ &= [-1, 5]\,. \end{aligned}$$

Por otra parte, de la definición de recorrido, se tiene

$$\begin{aligned} R_g &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in D_f,\, y = f(x)\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in [-1,5]\,,\, y = -\sqrt{5 + 4x - x^2}\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in [-1,5]\,,\, y^2 = 9 - (x-2)^2,\, y \leq 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : |x-2| = \sqrt{9 - y^2} \leq 3,\, y \leq 0\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq 3,\, y \leq 0\} \\ &= [-3, 0]\,. \end{aligned}$$

3. Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de construirse a partir de una pieza cuadrada de hojalata al cortar un cuadrado de 3 centímetros de lado en cada esquina y doblar los lados hacia arriba.



Si el volumen de la caja debe ser igual a 432 centímetros cúbicos, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de hojalata que debe utilizarse?

Solución: Sea x la longitud del lado de la pieza cuadrada de hojalata. Como el área de la base de la caja es igual a $A = (x-6)^2$ y la altura de ella es igual a $h = 3$, entonces la condición para el valor del volumen se escribe como

$$A \cdot h = V \Leftrightarrow (x-6)^2 \cdot 3 = 432.$$

Como $(x-6)^2 = 144 \Rightarrow (x-6)^2 - 12^2 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-18) = 0 \Rightarrow (x = -6 \vee x = 18)$ y x no puede ser negativo, pues se trata de una longitud, entonces el lado de la pieza cuadrada de hojalata debe ser longitud $x = 18$ centímetros.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(t+4) = 6t^2 + 49t + 106$.

   a) Determinar la expresión que define a $f(x)$.

   b) Hallar el conjunto $f^{-1}(8)$ e indicar si f es inyectiva.

Solución:

a) Al considerar $x = t+4$, dado que $f(t+4) = 6t^2 + 49t + 106$, se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= 6(x-4)^2 + 49(x-4) + 106 \\ &= 6x^2 + x + 6. \end{aligned}$$

b) Dado que

$$\begin{aligned} f(x) = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad 6x^2 + x + 6 = 8 \\ &\Leftrightarrow \quad 6x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (3x+2)(2x-1) = 0, \end{aligned}$$

se obtiene que $f^{-1}(8) = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

Como $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$, f no es inyectiva pues a la imagen 0 le corresponden dos pre-imágenes distintas, $-\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

5. Sea f una función real de dominio igual a todo $\mathbb{R}$. Demostrar que:

   a) La función f_p definida por $f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, es par.

   b) La función f_i definida por $f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, es impar.

   c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$.

   Además dar ejemplos, justificadamente, de una función que sea par y no sea impar, de una función que sea impar y no sea par y de una función que sea par e impar.

Solución:

a) Como $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f_p(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = f_p(x),$$

entonces f_p es función par.

b) Como $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f_i(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -f_i(x),$$

entonces f_i es función impar.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} f_p(x) + f_i(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(-x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Por otra parte, ejemplos de una función que sea par y no sea impar, de una función que sea impar y no sea par y de una función que sea par e impar, son los siguientes:

- La función definida por $f(x) = x^2$ es par pues
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$
y no es impar pues $f(-2) = 4 \neq -f(2) = -4$.

- La función definida por $f(x) = x^3$ es impar pues
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$
y no es par pues $f(-2) = -2 \neq f(2) = 2$.

- La función definida por $f(x) = 0$ es par e impar pues
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = 0 = f(x).$$

6. Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{7 - x^2 - 6x}$. Considerar restricciones adecuadas en su dominio y codominio de modo de obtener una nueva función que resulte biyectiva, justificar este hecho y luego determinar la función inversa correspondiente.

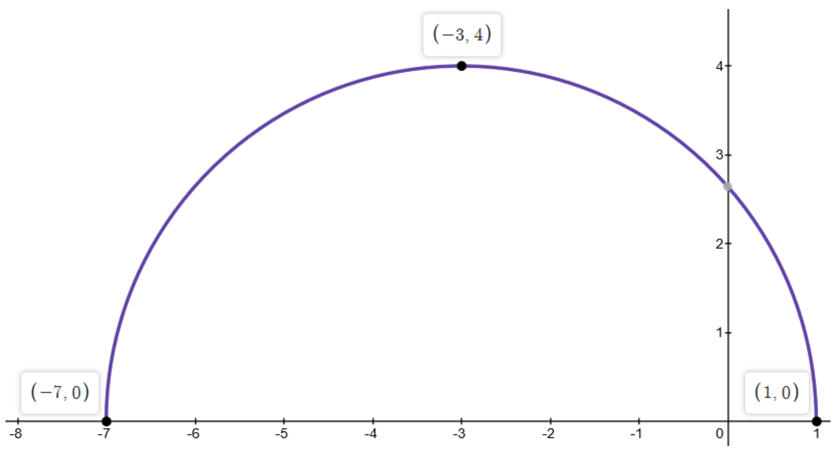
Solución: De la definición de dominio, se tiene que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : (x+7)(x-1) \leq 0\} = [-7, 1]\,.$$

Por otra parte, de la definición de recorrido, se tiene que

$$\begin{aligned} R_f &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D_f,\, y = f(x)\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [-7,1]\,,\, y = \sqrt{7 - x^2 - 6x}\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [-7,1]\,,\, (x+3)^2 + y^2 = 16,\, y \geq 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : |x+3| = \sqrt{16 - y^2} \leq 4,\, y \geq 0\right\} \\ &= [0, 4]\,. \end{aligned}$$

El dominio y recorrido antes obtenidos pueden observarse en el gráfico



Al considerar como codominio al conjunto $R_f = [0, 4]$ se obtiene una función sobreyectiva y además, restringiendo el dominio al conjunto $D = [-3, 1]$ se obtiene la inyectividad pues $\forall a, b \in D$:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow \sqrt{7 - a^2 - 6a} = \sqrt{7 - b^2 - 6b} \\ &\Rightarrow (a+3)^2 = (b+3)^2 \\ &\Rightarrow |a+3| = |b+3| \\ &\Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

De lo anterior, una restricción para f es la nueva función

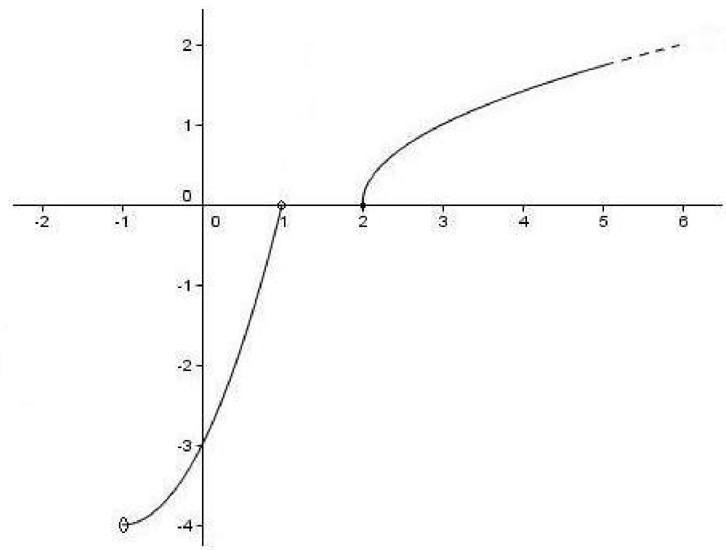
$$\begin{aligned} g : [-3, 1] \subseteq \mathbb{R} &\to [0, 4] \\ x &\mapsto f\,(x) = \sqrt{7 - x^2 - 6x} \end{aligned}$$

la cual es biyectiva y cuya inversa es

$$\begin{aligned} g^{-1} : [0, 4] \subseteq \mathbb{R} &\to [-3, 1] \\ x &\mapsto g^{-1}\,(x) = \sqrt{16 - x^2} - 3. \end{aligned}$$

7. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & , -1 < x < 1 \\ \sqrt{x-2} & , x \geq 2 \end{cases}$. Trazar el gráfico de f y a partir de él, determinar dominio y recorrido e indicar si f es inyectiva.

Solución:



Del gráfico se observa que $D_f =]-1, 1[\cup [2, +\infty[$ y que $R_f =]-4, +\infty[$; además como toda recta paralela al eje x intersecta a lo más en un punto a G_f, se tiene que f es función inyectiva.

8. Considerar la función $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

   a) Determinar dominio y recorrido para f.

   b) Decidir si la función es par y/o impar.

   c) ¿Es f inyectiva?, ¿es f sobreyectiva?, ¿es f biyectiva?

   d) Obtener, restringiendo si es necesario, la función inversa f^{-1}.

Solución:

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{x^2}{x^2-1}, x \in \mathbb{R} - \{-1,1\} \right\}$

$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} : x^2 = \dfrac{y}{y-1}, x \in \mathbb{R} - \{-1,1\} \right\}$

$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} : \dfrac{y}{y-1} \geq 0, x \in \mathbb{R} - \{-1,1\} \right\}$

$R_f =]-\infty, 0] \cup]1, \infty[$.

b) Como $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2}{x^2-1} = f(x)$, f es par.

Como $f(-2) = \dfrac{4}{3} \neq -f(2) = -\dfrac{4}{3}$, f no es impar.

c) Como $f(-2) = f(2)$, se tiene que f no es inyectiva, además como

$R_f =]-\infty, 0] \cup]1, \infty[\neq Cod_f = \mathbb{R}$, f no es sobreyectiva; f no es biyectiva pues no es inyectiva ni sobreyectiva.

d) Al considerar ahora a los conjuntos $\mathbb{R}_0^+$ y $]-\infty, 0] \cup]1, \infty[$ como dominio y codominio, respectivamente; es decir, si

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_0^+ & \to &]-\infty, 0] \cup]1, \infty[\\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}, \end{array}$$

se tiene que f ahora es sobreyectiva, pues $Cod_f =]-\infty, 0] \cup]1, \infty[$.

Además, f así definida es inyectiva pues $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene que

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a^2}{a^2-1} = \frac{b^2}{b^2-1} \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = b.$$

De lo anterior f es biyectiva, y

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} :]-\infty, 0] \cup]1, \infty[& \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}. \end{array}$$

9. Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por

$$f(x) = 3\sqrt{4x - x^2 - 3}.$$

Determinar, de manera analítica, dominio y recorrido.

Solución: De la definición de dominio, se tiene

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : 4x - x^2 - 3 \geq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-3) \leq 0\} \\ &= [1, 3]\,. \end{aligned}$$

Por otra parte, de la definición de recorrido, se tiene

$$\begin{aligned} R_g &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in D_f,\, y = f(x)\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in [1,3]\,,\, y = 3\sqrt{4x - x^2 - 3}\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in [1,3]\,,\, y^2 = 9\left(1 - (x-2)^2\right),\, y \geq 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : |x - 2| = \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \leq 1,\, y \geq 0\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq 3,\, y \geq 0\} \\ &= [0, 3]\,. \end{aligned}$$

10. Considerar la función $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por la fórmula $f(x) = \dfrac{x+2}{3x+4}$.

a) Determinar el dominio de f.

b) Hallar, si existen, las intersecciones del gráfico de f con los ejes coordenados.

c) ¿Es f inyectiva?. ¿Es f sobreyectiva?. ¿Es f biyectiva?. Justificar.

d) Decidir si existe la función inversa f^{-1}.

e) Definir, restringiendo si es necesario, la función f^{-1}.

Solución:

a) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{4}{3}$; por lo tanto $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$.

b) Al considerar $y = f(x)$; se tiene que $y = 0 \Leftrightarrow x = -2$, el punto de intersección con el eje x es $(-2, 0)$; para hallar el punto de intersección con el eje y basta considerar $x = 0$ y evaluar en f, dicho punto es $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

c) Como $\forall a, b \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$, se tiene que

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a+2}{3a+4} = \frac{b+2}{3b+4} \Rightarrow 3ab+2a+6b+4 = 3ab+6a+2b+2 \Rightarrow a = b$$

entonces f es inyectiva.

Como $y = f(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{4y-2}{1-3y}$ se tiene que $x \in D_f \Leftrightarrow y \neq \dfrac{1}{3}$, por lo tanto $R_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$, y, f no es sobreyectiva.

f no es biyectiva pues ella no es sobreyectiva.

d) No existe f^{-1}, pues f no es biyectiva.

e) Al considerar $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$, con $f(x) = \dfrac{x+2}{3x+4}$; de lo anterior, se tiene que f así definida es biyectiva y su inversa es

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{D}_f, \text{ donde } f^{-1}(x) = \frac{4x-2}{1-3x}.$$

11. Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

   a) Determinar D_f.

   b) ¿Es f una función par?

   c) Restringir el dominio de f de modo que ella sea inyectiva y verificar tal cosa.

   d) Hallar el recorrido de f y decidir si ella es sobreyectiva.

   e) Definir, restringiendo si es necesario, la función f^{-1}.

   Solución:

   a) $x \in D_f \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2$; por lo tanto, $D_f = [-2, 2]$.

   b) Sí, pues $\forall x \in D_f$; $f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$.

   c) Al considerar como dominio al intervalo $[0, 2]$, se tiene que

   $$f(a) = f(b) \Rightarrow \sqrt{4 - a^2} = \sqrt{4 - b^2} \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = b$$

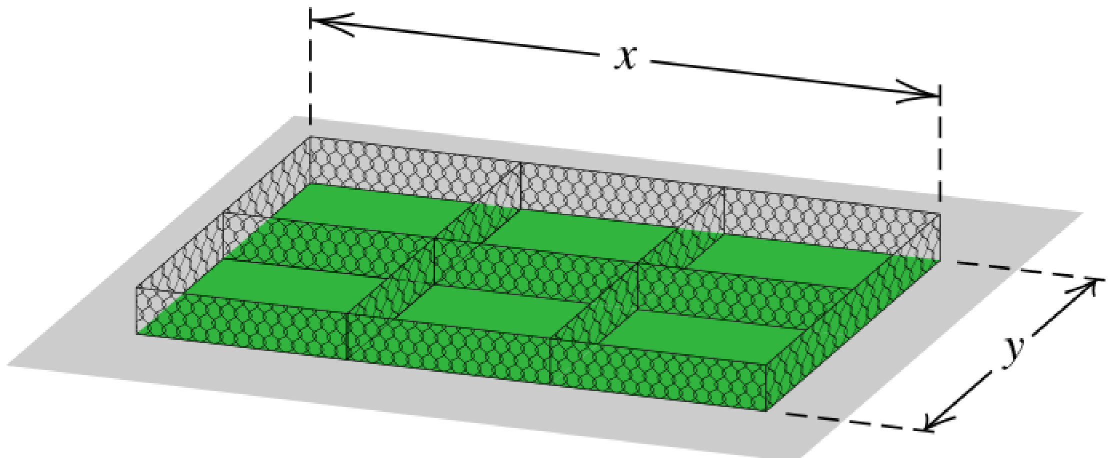
   por lo que; ahora, f es inyectiva.

   d) Considerando $D_f = [0, 2]$, como $y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{4 - y^2}$, se tiene que $x \in D_f \Leftrightarrow |y| \leq 2 \wedge y \geq 0$, por lo tanto $R_f = [0, 2]$, por lo que que f no es sobreyectiva.

   e) Al considerar $f : [0, 2] \subseteq \mathbb{R} \to [0, 2]$, con $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; de lo anterior, se tiene que f así definida es biyectiva y su inversa es

   $f^{-1} : [0, 2] \subseteq \mathbb{R} \to [0, 2]$, con $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

12. Mil doscientos metros de tela de alambre se van a utilizar para construir seis divisiones de un terreno, como se ve en la figura



a) Expresar el largo y como función del ancho x.

b) Expresar el área total A del terreno como una función en términos de x.

c) Hallar las dimensiones que maximizan el área A.

Solución:

a) Dado que se dispone de mil doscientos metros de tela de alambre se tiene que

$$4x + 3y = 1200,$$

de donde $y = 400 - \dfrac{4}{3}x$.

b) El área del terreno es xy metros cuadrados y como $y = 400 - \dfrac{4}{3}x$, dicha área en términos de x está determinada por

$$A(x) = x\left(400 - \frac{4}{3}x\right) = -\frac{4}{3}x^2 + 400x.$$

c) Identificando A como una función cuadrática con coeficientes $a = -\dfrac{4}{3}$, $b = 400$ y $c = 0$, se tiene que tiene el valor máximo se alcanza cuando $x = -\dfrac{b}{2a} = 150$ y como para este valor de x se obtiene que $y = 200$, entonces las dimensiones que maximizan el valor de A son

$$x = 150\,\text{metros e}\ \ y = 200\,\text{metros}.$$

2. Función exponencial y función logaritmo

1. Un cultivo de bacterias posee un crecimiento exponencial, es decir, la cantidad de bacterias en el instante t es
$$A(t) = A_0 e^{kt},$$
donde A_0 es la cantidad inicial y t se mide en horas. Si inicialmente hay 100 bacterias y cinco horas más tarde hay 300, determinar:

   a) El valor de la constante k.

   b) El tiempo que deberá transcurrir para que el número de bacterias sea 900. Indicar dicho tiempo en la forma más simplificada posible.

   Solución:

   a) De la condición inicial, como $A(0) = 100$, se tiene que $A_0 = 100$.

   Por otra parte, dado que $A(5) = 300$, se tiene que
   $$100e^{5k} = 300,$$
   de donde $e^{5k} = 3$ y entonces $k = \dfrac{\ln(3)}{5}$.

   b) De la parte anterior, como $A(t) = 100e^{\frac{\ln(3)}{5}t}$, se tiene que si t^* es el instante tal que $A(t^*) = 900$, entonces
   $$\begin{aligned} 100e^{\frac{\ln(3)}{5}t^*} &= 900 \\ e^{\frac{\ln(3)}{5}t^*} &= 3^2 \\ \frac{\ln(3)}{5}t^* &= 2\ln(3) \\ t^* &= 10 \end{aligned}$$
   y por lo tanto, después de 10 horas se tendrán 900 bacterias.

2. La ley de enfriamiento de Newton establece que la temperatura T de un cuerpo enfriándose está dada por $T(t) = Ce^{-kt} + T^*$, donde T^* es la temperatura del medio que lo rodea; con C y k constantes. Usar esta ley para resolver el siguiente problema:

   El asesino en serie Dexter Morgan, ha cometido un asesinato. El cadáver fue encontrado a las 13:00 horas momento en que se le tomó la temperatura, siendo ésta de $32°C$; dos horas más tarde la temperatura fue nuevamente registrada, siendo de $29°C$. La temperatura de la habitación donde se encontraba el cadáver era constante y de $28°C$. Considerando que la temperatura de un cuerpo en *estado normal* es de $36°C$; ¿A qué hora mató Dexter a su víctima?

   a) Considerando que $T(0) = 32$, determinar el valor de la constante C.

   b) Con el valor de C antes obtenido y considerando que $T(2) = 29$, determinar el valor de la constante k.

   c) Con los valores de C y k ya conocidos, resolver la ecuación $T(t_a) = 36$.

   d) A partir del valor de t_a indicar a qué hora mató Dexter a su víctima.

   Solución:

   a) $T(0) = C + 28 = 32 \Rightarrow C = 4.$

   b) $T(2) = 4e^{-2k} + 28 = 29 \Rightarrow e^{-2k} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow k = \ln(2).$

   c) $T(t_a) = 36 \Rightarrow 4e^{-\ln(2)\cdot t_a} + 28 = 36 \Rightarrow t_a = -1.$

   d) A las 12:00 horas.

3. El Carbono 14 se desintegra a una velocidad proporcional a una determinada cantidad presente y tiene una vida media de 5600 años. Como este isótopo comienza su descomposición solamente después de la muerte del organismo del que formó parte, el análisis de la cantidad carbono 14 descompuesto proporciona información acerca del tiempo en que ocurrió la muerte de un animal.

   Si x representa la cantidad de una determinada sustancia en el tiempo t y dicha sustancia se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente; utilizando elementos de Cálculo, se puede establecer que $x(t) = x_0 e^{kt}$, donde x_0 representa la cantidad inicial y k es una constante.

   Muchas personas creen que la Sábana Santa de Turín, que muestra el negativo del cuerpo de un hombre que al parecer fue crucificado, es la mortaja de Jesús de Nazareth. En 1988 el Vaticano otorgó el permiso para fecharlo con Carbono 14. Tres prestigiosos laboratorios de manera independiente analizaron la tela y concluyeron que el sudario tenía alrededor de 660 años de antigüedad, una edad consistente con su aparición histórica. Con esta edad, determinar qué porcentaje de carbono 14 original permanecía en la tela en 1988.

   Solución:

   Se considerará (la función) $x = x\,(t)$ como la cantidad de Carbono 14, donde t es el tiempo en años (medido después de fabricada la tela); como x se desintegra en razón proporcional a su cantidad presente, se tiene

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

$$x\,(5600) = x_0 e^{5600k} = \frac{x_0}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln(1/2)}{5600}.$$

   De lo anterior, $x\,(t) = x_0 e^{\frac{\ln(1/2)}{5600}t}$ y como

$$x\,(660) = x_0 e^{\frac{\ln(1/2)}{560}66} = 0.92x_0,$$

   se tiene que en 1988, en la tela, permanecía un 92 % de la cantidad de Carbono 14 original.

4. Hallar en caso que sea posible, la solución en $\mathbb{R}$, de las siguientes ecuaciones:

   a) $\sqrt[x]{2} = 3$.

   b) $\log_x 10 + \log x = 1$.

Solución:

a) Como $\sqrt[x]{2} = 3 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}} = 3$, al aplicar logaritmo natural (podría ser en cualquier otra base), se tiene que $\ln 2^{\frac{1}{x}} = \dfrac{\ln 2}{x} = \ln 3$, de donde; $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.

b) Como $\log_x 10 = \dfrac{\log 10}{\log x} = \dfrac{1}{\log x}$; al multiplicar a ambos lados de la ecuación por $\log x$, se tiene que

$$\log^2 x - \log x + 1 = 0.$$

Aquí al considerar el cambio de variable $z = \log x$, se tiene que

$$z^2 - z + 1 = 0.$$

Como el discriminante asociado a ecuación cuadrática es menor que cero, entonces ella y la ecuación original no tienen solución.

Observación: Otra forma de visualizar que la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$, es notando que

$$z^2 - z + 1 = z^2 - z + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall z \in \mathbb{R}.$$

5. Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que:

   a) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$,

   b) $e^{2x} - 2e^x - 3 > 0$.

Solución:

a) Como $e^{2x} = (e^x)^2$, al considerar el cambio de variable $z = e^x$, se tiene

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z-3) = 0$$

y dado que $z + 1 > 0$ (pues $z = e^x > 0$), entonces

$$(z+1)(z-3) = 0 \Leftrightarrow z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = 3$$

de donde se obtiene que $x = \ln(3)$ y por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = \{\ln(3)\}.$$

b) Nuevamente, del cambio de variable $z = e^x$, se tiene

$$e^{2x} - 2e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow z - 3 > 0 \Leftrightarrow z > 3$$

de donde se obtiene que $x > \ln(3)$ y por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = \left]\ln(3), +\infty\right[.$$

6. Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que:

   a) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$,
   b) $e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$.

   Solución:

   a) Como $e^{2x} = (e^x)^2$, al considerar el cambio de variable $z = e^x$, se tiene

   $$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z-3) = 0$$

   de donde se obtiene que $x = \ln(2)$ o $x = \ln(3)$ y por lo tanto, el conjunto solución es

   $$S = \{\ln(2), \ln(3)\}.$$

   b) Nuevamente, del cambio de variable $z = e^x$, se tiene

   $$e^{2x} - 5e^x + 6 < 0 \Leftrightarrow (z-2)(z-3) < 0$$

   de donde se obtiene que $x > \ln(2)$ y $x < \ln(3)$ y por lo tanto, el conjunto solución es

   $$S = \left]\ln(2), \ln(3)\right[.$$

7. Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que:

   a) $6e^{2x} + e^x - 2 = 0$,

   b) $6e^{2x} + e^x - 2 < 0$.

Solución:

a) Como $e^{2x} = (e^x)^2$, al considerar el cambio de variable $z = e^x$, se tiene

$$6e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 6z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow (3z + 2)(2z - 1) = 0$$

y dado que $3z + 2 > 0$ (pues $z = e^x > 0$), entonces

$$(3z + 2)(2z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

y por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = \left\{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

b) Nuevamente, del cambio de variable $z = e^x$, se tiene

$$6e^{2x} + e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2z - 1 < 0 \Leftrightarrow z < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

y por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = \left]-\infty, \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right[.$$

8. Resolver:

   a) $\log_x 10 - \log x^2 = 1$, $x > 0$, $x \neq 1$

   b) $e^{4x} + 3e^{3x} - 18e^{2x} > 0$

Solución:

a) Al considerar $\log_x 10$ como $\dfrac{\log 10}{\log x}$ (fórmula del cambio de base), la igualdad $\log x^2 = 2\log x$, multiplicar la ecuación por $\log x$ y haciendo el cambio de variable $y = \log x$, ella queda

$$2y^2 + y - 1 = 0.$$

Resolviendo, se obtiene $y = \dfrac{1}{2} \vee y = -1$.

Como $\log x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{10}$ y $\log x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{10}$, se tiene que el conjunto solución es $\left\{\sqrt{10}, \dfrac{1}{10}\right\}$.

b) Al dividir la inecuación por e^{2x} y considerar el cambio $z = e^x$, ella queda

$$z^2 + 3z - 18 > 0.$$

Como $(z+6)(z-3) > 0 \Leftrightarrow z-3 > 0$, pues $z = e^x > 0$; se tiene que desigualdad se reduce a $e^x > 3$, lo cual es equivalente a $x > \ln 3$.

De lo anterior, el conjunto solución es $]\ln 3, +\infty[$.

9. Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{\log_2(x+3)}$. Hallar dominio y recorrido; luego, obtener la función inversa f^{-1} restringiendo si es necesario.

Solución:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(x+3) \geq 0 \wedge x+3 > 0\} = [-2, +\infty[$.

$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \sqrt{\log_2(x+3)}, x \in [-2, +\infty[\right\}$

$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} : x = 2^{y^2} - 3, y \geq 0 \right\}$

$R_f = \mathbb{R}_0^+$.

Para a y b en $[-2, +\infty[$, se tiene

$f(a) = f(b) \Rightarrow \sqrt{\log_2(a+3)} = \sqrt{\log_2(b+3)} \Rightarrow \log_2(a+3) = \log_2(b+3) \Rightarrow a = b$,

por lo que f es inyectiva.

Por otra parte, como $R_f = \mathbb{R}_0^+ \neq Cod_f = \mathbb{R}$, f no es sobreyectiva; para que lo sea, basta considerar $Cod_f = \mathbb{R}_0^+$.

De lo anterior, considerando

$$\begin{aligned} f : [-2, +\infty[\quad &\to \quad \mathbb{R}_0^+ \\ x \quad &\mapsto \quad f(x) = \sqrt{\log_2(x+3)} \end{aligned}$$

se tiene que existe la función inversa, y

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \quad &\to \quad [-2, +\infty[\\ x \quad &\mapsto \quad f^{-1}(x) = 2^{x^2} - 3. \end{aligned}$$

10. Sea f la función definida por $f(x)=\sqrt{\log_{0.25}(x+1)}$. Hallar dominio y recorrido.

Solución:

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:f(x)\in\mathbb{R}\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\sqrt{\log_{0.25}(x+1)}\in\mathbb{R}\right\}$

Dado que $\sqrt{\log_{0.25}(x+1)}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Big((x+1)>0\wedge\log_{\frac{1}{4}}(x+1)\geq 0\Big)$

y $\log_{\frac{1}{4}}(x+1)\geq 0\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}(x+1)}\leq\log_{\frac{1}{4}}1\Leftrightarrow x+1\leq 1\Leftrightarrow x\leq 0$ y $x+1<0\Leftrightarrow$ $x<-1$,

se tiene que $D_f=\,]-1,0]$.

$R_f=\{y\in\mathbb{R}:\exists x\in D_f,y=f(x)\}$

$R_f=\left\{y\in\mathbb{R}:\exists x\in\,]-1,0]\,,y=\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(x+1)}\right\}$

$R_f=\left\{y\in\mathbb{R}:\exists x\in\,]-1,0]\,,y^2=\log_{\frac{1}{4}}(x+1),y\geq 0\right\}$

$R_f=\left\{y\in\mathbb{R}:\exists x\in\,]-1,0]\,,x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{y^2}-1,y\geq 0\right\}$

$R_f=\mathbb{R}_0^+$.

11. Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la función definida por $f(x) = 3^{x-2}$. Hallar dominio y recorrido, mostrar que f posee inversa y luego determinar dicha función.

Solución: De la definición de dominio, se tiene que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \left\{x \in \mathbb{R} : 3^{x-2} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}.$$

y de la definición de recorrido, se tiene que

$$\begin{aligned} R_f &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in D_f,\, y = f(x)\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R},\, y = 3^{x-2}\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R},\, x = \log_3(y) + 2\} \\ &= \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Como el recorrido y codominio de f coinciden, entonces se tiene que f es sobreyectiva.

Por otra parte, es claro que f es inyectiva pues para $\forall a,\, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow \quad 3^{a-2} = 3^{b-2} \\ &\Rightarrow \quad a - 2 = b - 2 \\ &\Rightarrow \quad a = b. \end{aligned}$$

De lo anterior, f es biyectiva y por tanto posee inversa, dicha función inversa es

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \log_3(x) + 2. \end{aligned}$$

12. Sea f la función real definida por

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_2(4 - x^2)},$$

definir una restricción h de f que sea biyectiva y definir su inversa.

Solución: La función $h : \left[\sqrt{2}, 2\right[\to \mathbb{R}_0^+$, definida por

$$h(x) = \sqrt{1 - \log_2(4 - x^2)}$$

es inyectiva pues para a y b en el intervalo $\left[\sqrt{2}, 2\right[$, se tiene

$$\begin{aligned}
h(a) = h(b) \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{1 - \log_2(4 - a^2)} = \sqrt{1 - \log_2(4 - b^2)} \\
&\Rightarrow \quad 1 - \log_2(4 - a^2) = 1 - \log_2(4 - b^2) \\
&\Rightarrow \quad a^2 = b^2 \\
&\Rightarrow \quad |a| = |b| \\
&\Rightarrow \quad a = b.
\end{aligned}$$

De la igualdad $y = \sqrt{1 - \log_2(4 - x^2)}$ se tiene que

$$x = \sqrt{4 - 2^{1 - y^2}}$$

y como $\sqrt{2} \leq x < 2$, se obtiene que $R_h = [0, +\infty[$ y por lo tanto h es sobreyectiva.

De lo anterior, como h es biyectiva, ella posee inversa y dicha inversa es

$$\begin{aligned}
h^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \quad &\to \quad \left[\sqrt{2}, 2\right[\\
x \quad &\mapsto \quad h^{-1}(x) = \sqrt{4 - 2^{1 - x^2}}
\end{aligned}$$

3. Polinomios

1. Determinar el conjunto solución de la ecuación

$$2x^4 - 5x^3 - 19x^2 + 39x - 9 = 0,$$

sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es una solución de ella.

Solución: Como $p(x) := 2x^4 - 5x^3 - 19x^2 + 39x - 9$ tiene coeficientes en $\mathbb{Q}$ y $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ es una raíz de p, entonces $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ también es una raíz de p y por lo tanto, $p(x)$ es divisible por

$$\left(x - 2 + \sqrt{3}\right)\left(x - 2 - \sqrt{3}\right) = x^2 - 4x + 1.$$

De lo anterior, dado que

$$\left(2x^4 - 5x^3 - 19x^2 + 39x - 9\right) : \left(x^2 - 4x + 1\right) = 2x^2 + 3x - 9 = (x+3)(2x-3)$$

es claro que

$$p(x) = \left(x - 2 + \sqrt{3}\right)\left(x - 2 - \sqrt{3}\right)(x+3)(2x-3)$$

y el conjunto solución es $S = \left\{-3, 2 - \sqrt{3}, \dfrac{3}{2}, 2 + \sqrt{3}\right\}$.

2. Hallar todas las raíces del polinomio

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 12$$

sabiendo que la suma de dos de las raíces es cero y que k es una constante real.

Solución:

Si α y $-\alpha$ son las dos raíces cuya suma es cero; entonces por el teorema del resto

$$p(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha^2 + \alpha k + 12 = 0 \text{ y } p(-\alpha) = -\alpha^3 - 3\alpha^2 - \alpha k + 12 = 0,$$

sumando se obtiene $-6\alpha^2 = -24$, de donde $\alpha = \pm 2$.

Como $p(2) = 8 - 12 + 2k + 12 = 0$, se tiene $k = -4$.

Por otra parte, como

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = x^2(x-3) - 4(x-3) = (x+2)(x-2)(x-3),$$

es claro que las raíces de p son -2, 2 y 3.

3. Utilizar división sintética, para hallar el cuociente y el resto en

$$(x^6 - 9x^5 + 11x^4 + 26x^3 - 6x^2 - 23x - 12) : (x^2 - 2x - 3).$$

Solución: De la factorización $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, se tiene que al dividir el polinomio $p(x) := x^6 - 9x^5 + 11x^4 + 26x^3 - 6x^2 - 23x - 12$ por $x+1$ y luego dividir lo obtenido por $x-3$ se obtendrán el cuociente $q(x)$ y el resto $r(x)$ de la división indicada.

De la tabla

1	-9	11	26	-6	-23	-12	-1
#	-1	10	-21	-5	11	12	#
1	-10	21	5	-11	-12	0	#

se obtiene que

$$p(x) = (x+1)(x^5 - 10x^4 + 21x^3 + 5x^2 - 11x - 12)$$

y de la tabla

1	-10	21	5	-11	-12	3
#	3	-21	0	15	12	#
1	-7	0	5	4	0	#

se obtiene que

$$x^5 - 10x^4 + 21x^3 + 5x^2 - 11x - 12 = (x-3)(x^4 - 7x^3 + 5x + 4)$$

y por lo tanto,

$$q(x) = x^4 - 7x^3 + 5x + 4 \quad \text{y} \quad r(x) = 0.$$

4. Determinar el polinomio mónico $p(x)$ (su coeficiente principal es 1) con coeficientes en $\mathbb{Q}$, del menor grado posible, que tiene como raíz doble a $3-2i$ y tal que $p(3) = 48$.

Solución: $3+2i$ es una raíz del polinomio pues $3-2i$ es raíz y los coeficientes están en $\mathbb{Q}$ y como estas dos raíces han de ser dobles, entonces la expresión

$$q(x) = (x - 3 + 2i)^2 (x - 3 - 2i)^2 = \left(x^2 - 6x + 13\right)^2$$

debe ser un factor de $p(x)$.

Por otra parte, como $p(x)$ es mónico y debe ser del menor grado posible, necesariamente él debe ser de la forma $p(x) = q(x)(x - a)$ y dado que $q(3) = 16$, entonces

$$16 \cdot (3 - a) = 48$$

y por lo tanto $a = 0$, de donde se obtiene que $p(x) = x\left(x^2 - 6x + 13\right)^2$.

5. Sea $p(z) = z^5 + az^3 - 70z^2 + bz - 30$. Si -1 es una raíz doble de p, hallar a y b.

Solución: Como $p(z)$ es divisible por $z+1$, pues -1 es una raíz de p, $p(z)$ puede escribirse como el producto entre $z+1$ y un polinomio de grado 4.

De la división sintética, se tiene que

1	0	a	-70	b	-30	-1
#	-1	1	$-a-1$	$a+71$	$-a-b-71$	#
1	-1	$a+1$	$-a-71$	$a+b+71$	$-a-b-101$	#

de donde, el resto de la división de $p(z)$ por $z+1$ es $-a-b-101$ y por lo tanto, como dicho resto debe ser 0, entonces

$$a + b + 101 = 0 \qquad (1)$$

y además, también de la tabla anterior, se obtiene que el polinomio de grado 4 que es factor de p, está dada por $q(z) = z^4 - z^3 + (a+1)z^2 - (a+71)z + a + b + 71$.

Dado que p tiene como raíz doble a -1, entonces -1 también es raíz de q y por tanto,

$$q(-1) = 1 + 1 + a + 1 + a + 71 + a + b + 71 = 3a + b + 145,$$

debe ser igual a 0, es decir,

$$3a + b + 145 = 0 \qquad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2), se obtiene que $a = -22$ y $b = -79$.

6. Resolver, para $z \in \mathbb{C}$, la ecuación $z^5 - 3z^4 - 2z^3 + 10z^2 - 12z = 0$.

Solución: Sea $p(z) = z^5 - 3z^4 - 2z^3 + 10z^2 - 12z$.

Como $p(z) = z(z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 10z - 12)$, se tiene que una de la soluciones de la ecuación es $z = 0$ y las otras corresponden a las raíces de

$$q(z) := z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 10z - 12.$$

Para el polinomio anterior se tiene que $a_4 = 1$ y $a_0 = -12$, por lo tanto, las posibles raíces racionales de él son ± 12, ± 4, ± 3, ± 2, ± 1 y como $q(-2) = 0 = q(3)$, se tiene que q es divisible por $z+2$, por $z-3$ y también por $(z+2)(z-3) = z^2-z-6$.

El cuociente de la división larga de q por el polinomio cuadrático anterior es z^2-2z+2 y como

$$z^2 - 22 + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i,$$

se tiene que el conjunto solución de la ecuación de grado 5 es

$$S = \{-2, 0, 3, 1-i, 1+i\}.$$

7. Sin efectuar la división, mostrar que $2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$ es divisible por $x^2 - 5x + 6$.

   Solución: Sea $p(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$.

   Como $p(2) = 0$ y $p(3) = 0$, se tiene que $p(x)$ es divisible por $x - 2$ y por $x - 3$; por lo tanto, $p(x)$ es divisible por $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

8. Resolver la ecuación

$$2x^4 - x^3 - 17x^2 + 15x + 9 = 0,$$

sabiendo que $1 + \sqrt{2}$ es una solución de ella.

Solución: Como $p(x) := 2x^4 - x^3 - 17x^2 + 15x + 9$ tiene coeficientes en $\mathbb{Q}$ y $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ es una raíz de p, entonces $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ también es una raíz de p (o sea, también es una solución de la ecuación); y por lo tanto, $p(x)$ es divisible por

$$\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right) = x^2 - 2x - 1.$$

Además, como $(2x^4 - x^3 - 17x^2 + 15x + 9) : (x^2 - 2x - 1) = 2x^2 + 3x - 9 = (x+3)(2x-3)$, se tiene que las otras dos soluciones de la ecuación son $x_3 = -3$ y $x_4 = 3/2$.

9. Usar división sintética, para hallar el cuociente y el resto en

$$(2x^7 + 5x^6 - 20x^5 - 34x^4 + 63x^3 + 38x^2 - 6x - 36) : (x^2 + x - 6).$$

Solución: Como $x^2 - x + 6 = (x + 3)(x - 2)$, se tiene que al dividir

$$p(x) := 2x^7 + 5x^6 - 20x^5 - 34x^4 + 63x^3 + 38x^2 - 6x - 36$$

por $x + 3$ y luego al dividir lo obtenido por $x - 2$, se obtendrá lo pedido:

Para la primera división sintética, se tiene que

2	5	-20	-34	63	38	-6	-36	-3
#	-6	3	51	-51	-36	-6	36	#
2	-1	-17	17	12	2	-12	0	#

y para la segunda

2	-1	-17	17	12	2	-12	2
#	4	6	-22	-10	4	12	#
2	-3	-11	-5	2	6	0	#

De lo anterior, se observa que al dividir $p(x)$ por $d(x) := x^2 + x - 6$, se obtiene el cuociente $q(x) = 2x^5 - 3x^4 - 11x^3 - 5x^2 + 2x - 6$ y el resto $r(x) = 0$.

4. Funciones circulares y Trigonometría

1. Resolver, para $x \in [0, 2\pi]$, la ecuación

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0.$$

<u>Indicación</u>: Pueden considerarse las identidades

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \quad \text{y} \quad \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

para factorizar la expresión del lado izquierdo.

Solución: Dado que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ y que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$, la ecuación puede reescribirse como

$$2\cos^3(x) + \cos^2(x) - \cos(x) = 0,$$

de donde,

$$\begin{aligned}
1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos^3(x) + \cos^2(x) - \cos(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x)\big(2\cos^2(x) + \cos(x) - 1\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x)\,(2\cos(x) - 1)\,(\cos(x) + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \vee \cos(x) = \frac{1}{2} \vee \cos(x) = -1
\end{aligned}$$

y por lo tanto, el conjunto solución es $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

2. *a*) Demostrar la identidad $\dfrac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)+\cos(x)} = \dfrac{\tan(x)}{\csc(x)+\tan(x)}$.

b) Resolver la ecuación $\arcsin x + \operatorname{arc}\cos(2x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

a) $$\frac{\tan(x)}{\csc(x)+\tan(x)} = \frac{\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} + \dfrac{1}{\sin(x)}} = \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}} = \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)+\cos(x)}.$$

b) Sea $\alpha := \arcsin x$, de donde $\sin\alpha = x$ y $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$.

Sea $\beta := \operatorname{arc}\cos(2x)$, de donde $\cos\beta = 2x$ y $\sin\beta = \sqrt{1-4x^2}$.

Al aplicar cos a ambos la de la ecuación dada, se tiene

$$2x \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot \sqrt{1-4x^2} = 0,$$

de donde se obtiene que $x = 0$ es la única solución.

3. Utilizando identidades:

   a) Demostrar que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

   b) Determinar el valor exacto de $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{9}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{9}\right)\right)$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x + x) \\
&= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\
&= \big(2\cos^2(x) - 1\big)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).
\end{aligned}$$

b) Definiendo $\alpha := \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{9}\right) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ y $\beta := \arcsin\left(-\frac{1}{9}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, se tiene que el valor pedido es

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
&= \cos(\alpha) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\beta)} - \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \cdot \sin(\beta) \\
&= -\frac{1}{9} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{9} - \frac{4\sqrt{5}}{9} \cdot -\frac{1}{9} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4. Resolver, para $x \in [0, 2\pi]$, la ecuación

$$\cos^2(2x) - 3\cos^2(x) + 2 = 0.$$

Solución: Al considerar la identidad $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ y la identidad fundamental, la ecuación queda

$$\sin^2 x \left(4\sin^2 x - 1\right) = 0,$$

de donde, $\sin x = 0$ o $\sin x = \pm\dfrac{1}{2}$ y se obtiene el conjunto solución

$$\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\}.$$

5. Calcular el valor exacto de:

   a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

   b) $\cos\left(\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arcsin}\left(-\dfrac{1}{5}\right)\right)$

   Solución:

   a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

   b) Considerando $\alpha = \operatorname{Arctan} 2$ y $\beta = \operatorname{Arcsin}\left(-\dfrac{1}{5}\right)$, se tiene que

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{24}}{5},$$

   de donde

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{5\sqrt{5}}\left(\sqrt{24} + 2\right)$$

6. Demostrar la identidad

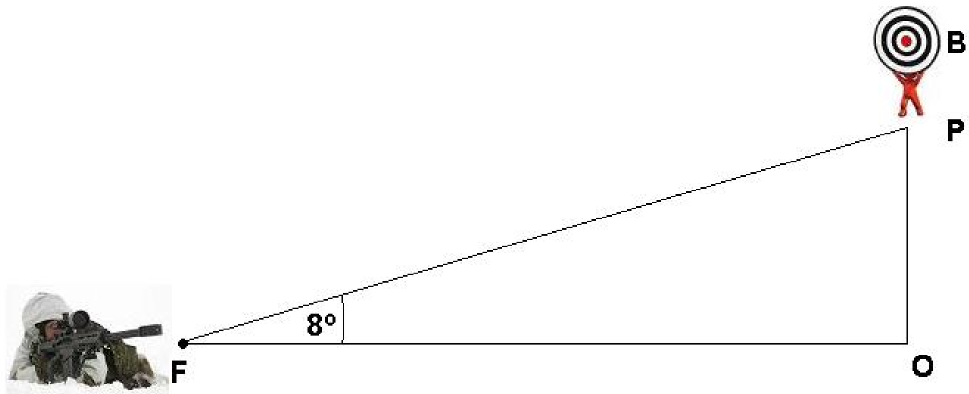
$$\sin^6(x) + \cos^6(x) = 1 - 3\sin^2(x)\cos^2(x).$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sin^6(x) + \cos^6(x) &= \sin^6(x) + \big(\cos^2(x)\big)^3 \\
&= \sin^6(x) + \big(1 - \sin^2(x)\big)^3 \\
&= \sin^6(x) + 1 - 3\sin^2(x) + 3\sin^4(x) - \sin^6(x) \\
&= 1 - 3\sin^2(x) + 3\sin^4(x) \\
&= 1 - 3\sin^2(x)\big(1 - \sin^2(x)\big) \\
&= 1 - 3\sin^2(x)\cos^2(x).
\end{aligned}$$

7. Un francotirador está extendido en el suelo apuntando a un blanco que se encuentra a 17.5 metros de altura. Con un ángulo de elevación 8° el disparo pasa 50 centímetros por debajo del blanco. ¿Qué ángulo es tal que el disparo da en el blanco?

Solución:

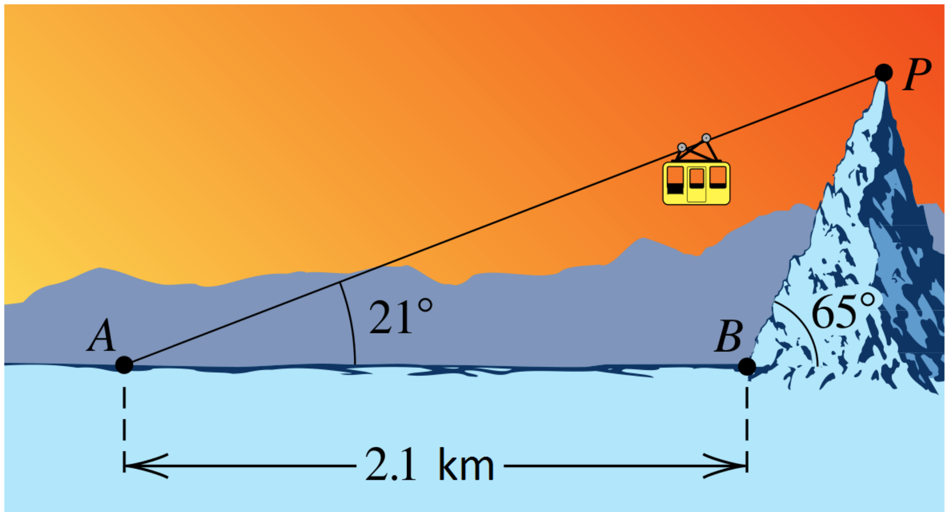


$\tan 8° = 0.141 = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{FO}} = \dfrac{17}{\overline{FO}} \Rightarrow \overline{F0} = 120.57.$

El ángulo pedido es $\angle OFB = \alpha$, se tiene,

$$\tan \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{17.5}}{120.57} \Rightarrow \alpha = 8.19°$$

8. Un teleférico lleva pasajeros desde un punto A, que está a 2.1 kilómetros de un punto B en la base de una montaña, al punto P en la cima de la montaña. Si los ángulos de elevación a P desde A y B son, respectivamente $21^{\underline{o}}$ y $65^{\underline{o}}$,



calcular la altura de la montaña.

Solución: En el triángulo ABP, dado que $\sphericalangle ABP = 115^{\underline{o}}$ y $\sphericalangle BPA = 44^{\underline{o}}$, al aplicar el Teorema del seno se tiene que

$$\frac{\sin(44°)}{2.1} = \frac{\sin(115°)}{\overline{AP}},$$

de donde se obtiene que $\overline{AP} = 2.74$ km.

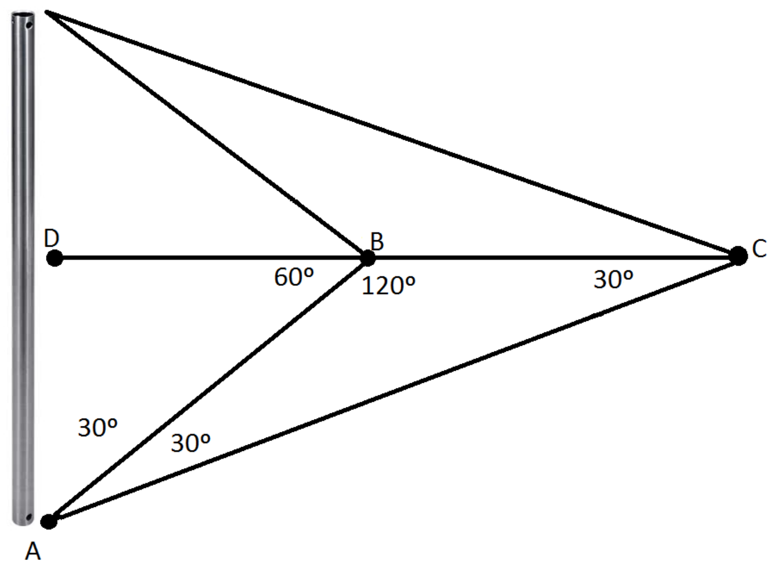
Por otra parte si h es la altura de la montaña, se tiene que

$$\sin(21°) = \frac{h}{\overline{AP}}$$

y entonces $h = 0.98$ km.

9. Una vara de metal tiene un elástico amarrado a ambos extremos. Una persona toma el elástico justo por su punto medio y lo estira de forma perpendicular a la vara. En un cierto instante, el elástico forma un ángulo de 120° y si la persona lo sigue estirando retrocediendo tres centímetros más el elástico forma un ángulo de 60°. Determinar la longitud de la vara.

Solución: De la figura



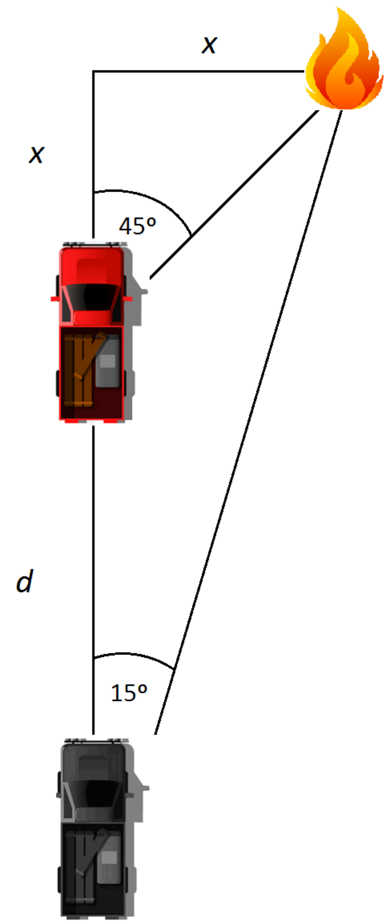
como $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$ centímetros, se tiene que si $l = 2x$ es la longitud de la vara, entonces

$$\sin(60) = \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

de donde se obtiene que $l = 3\sqrt{3}$ centímetros.

10. Un vehículo de CONAF se dirige de sur a norte a una velocidad de 120 km/h. En un determinado instante el conductor divisa un foco de fuego en dirección $N15°E$ y un minuto más tarde observa el mismo foco en dirección $N45°E$. ¿A qué distancia de la carretera se encuentra el incendio?

Solución: La distancia recorrida por el vehículo es $d = 2$ kilómetros. Si x es la distancia entre la carretera y el incendio,



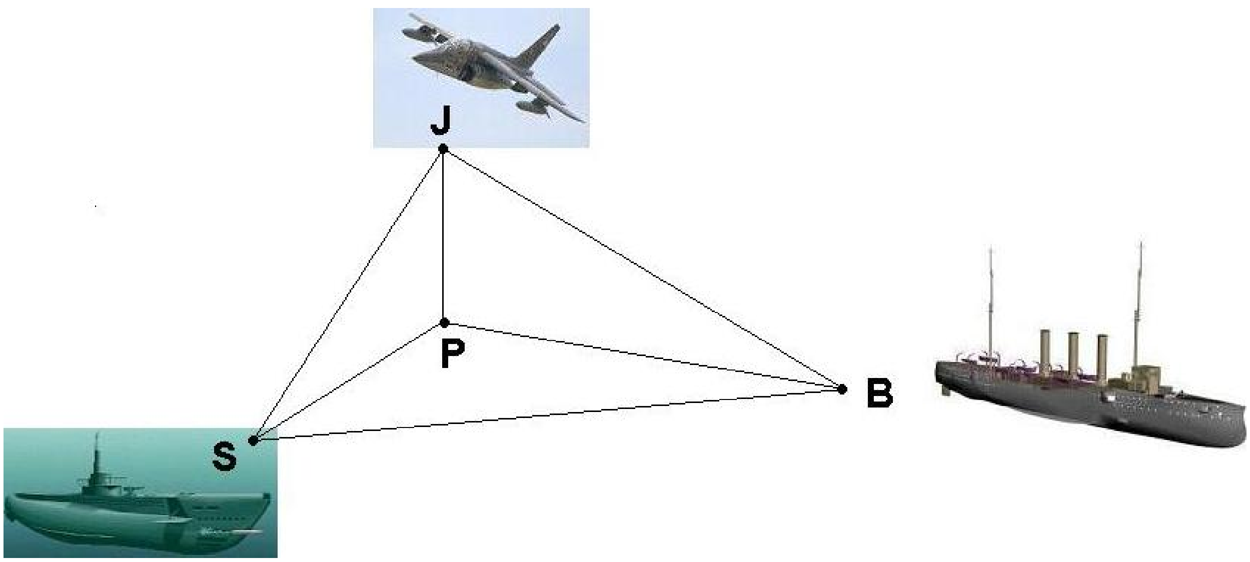
se tiene que $\tan(15°) = \dfrac{x}{d+x}$, de donde

$$x = \frac{2\tan(15°)}{1-\tan(15°)} = \sqrt{3}-1 \text{ kilómetros.}$$

11. Un Jet de reconocimiento (J), que vuela a una altura de 10000 pies, localiza a un submarino (S), bajo un ángulo de depresión de 37° y a un buque (B), bajo un ángulo de depresión de 23°. Si la medida del ángulo (SJB) es de 105°, determinar la distancia entre el submarino y el buque.

Solución:

Sean $\overline{SJ}$ la distancia del submarino al jet, $\overline{JB}$ la distancia del jet al buque y $\overline{SB}$ la distancia del submarino al buque. Se considerará un punto P a nivel de mar justo bajo el jet:



Del triángulo SPJ: $\cos(53°) = \dfrac{\overline{JP}}{\overline{SJ}}$; luego, $\overline{SJ} = 16611$.

Del triángulo BPJ: $\cos(67°) = \dfrac{\overline{JP}}{\overline{BJ}}$; luego, $\overline{BJ} = 25575$.

Del triángulo SJB, al aplicar el Teorema del coseno, se tiene

$$\overline{SB}^2 = \overline{SJ}^2 + \overline{JB}^2 - 2\overline{SJ} \cdot \overline{JB}\cos(105°),$$

de donde se obtiene que $\overline{SB} = 33878$, que es la distancia en pies desde el submarino al buque.

5. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1. Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 1 & 7 & 2 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix}$. Calcular:

   a) $(A+B)^2$.

   b) $A^2 + 2A \cdot B + B^2$.

   c) $(A+B) \cdot (A-B)$.

   d) $A^2 - B^2$.

Solución:

a) $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 13 & 24 & -14 \\ 22 & 62 & 73 \\ -4 & -50 & 283 \end{pmatrix}$

b) $A^2 + 2A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 22 & 39 & 86 \\ 6 & 39 & 48 \\ -34 & -103 & 297 \end{pmatrix}$

c) $(A+B) \cdot (A-B) = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 38 \\ 20 & 0 & 15 \\ 102 & 216 & -15 \end{pmatrix}$

d) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 138 \\ 4 & -23 & -10 \\ 72 & 163 & -1 \end{pmatrix}$

2. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, determinar A^{-1} utilizando la matriz adjunta asociada a A.

Solución: Como $det(A) = 1$ y $A^c = \begin{pmatrix} -36 & -19 & 3 \\ -24 & -13 & 2 \\ 13 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{det(A)} = \begin{pmatrix} -36 & -24 & 13 \\ -19 & -13 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, determinar A^{-1}.

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & 1 \\ 5/2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Mediante operaciones elementales de filas transformar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ en una matriz triangular superior y luego calcular su determinante.

Solución: Como $A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) \end{pmatrix}$, entonces

$$det(A) = (b-a)(c-b)(c-a).$$

5. Sean A y B matrices en $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ tales que $|A| = -\dfrac{1}{4}$. Calcular:

   a) $|A + A|$,
   b) $|A^4|$,
   c) $|4A^t|$,
   d) $|AB|$, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 11 & 666 & 5 \\ 0 & 2 & -31 & 89 & 2019 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 21 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 216 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $|A + A| = |2A| = 2^6 \cdot |A| = 2^6 \cdot -\dfrac{1}{4} = -16$

b) $|A^4| = |A|^4 = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{1}{256}$

c) $|4A^t| = 4^6 \cdot |A^t| = 4^6 \cdot |A| = 4^6 \cdot -\dfrac{1}{4} = -1024$

d) $|AB| = |A||B| = -\dfrac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 = -60$

6. Resolver la ecuación matricial $3X^t + (5AB)^t = 2B^tA^t$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 3X^t + (5AB)^t &= 2(AB)^t \\ 3X^t + 5(AB)^t &= 2(AB)^t \\ 3X^t &= -3(AB)^t \\ X &= -AB \\ X &= \begin{pmatrix} -45 & -5 & -23 \\ 1 & 5 & -4 \\ -21 & 3 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $|A - \lambda I_3| = 0$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución: Dado que $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, se tiene

$$|A - \lambda I_3| = (1-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

8. Determinar para qué valores de a, el sistema $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ posee:

   a) Solución única.

   b) Infinitas soluciones.

   c) Ninguna solución.

Solución:

Si $a \neq 0$, se tiene que $(A, B) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & 1-a \end{pmatrix}$.

Si $a = 0$, entonces $(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $r(A) = 3 = r(A, B)$.

   a) El sistema tiene solución única cuando $a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

   b) El sistema tiene infinitas soluciones cuando $a = 1$.

   c) El sistema tiene no tiene solución cuando $a = -2$.

9. Resolver, utilizando el método de eliminación de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y-2z+7w & = & 44 \\ 2x+3y+11z-3w & = & 41 \\ 3x+5y+7z-4w & = & 18 \\ 2x+2y+z+13w & = & 102 \end{array}\right.$$

Solución: Como $(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 & 44 \\ 2 & 3 & 11 & -3 & 41 \\ 3 & 5 & 7 & -4 & 18 \\ 2 & 2 & 1 & 13 & 102 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 & 44 \\ 0 & -3 & 15 & -17 & -47 \\ 0 & 0 & 21 & 7 & 154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, el sistema dado es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y-2z+7w & = & 44 \\ -3y+15z-17w & = & -47 \\ 21z+7w & = & 154 \\ w & = & 7 \end{array}\right.$$

de donde se obtiene que la solución (única) es $(2,1,5,7)$.

10. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 5w &= 0 \\ 2x + y - 4z - w &= 1 \\ x + y + z + w &= 0 \\ -x - y - z + w &= 1 \end{cases},$$

utilizar matrices para determinar su conjunto solución.

Solución: Dado que

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

se observa que $r(A) = 4 = r(A, B) = n$ (número de incógnitas), por lo que el sistema tiene solución única y él es equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 5w &= 0 \\ -3y + 2z - 11w &= 1 \\ 10z - w &= -1 \\ 2w &= 1 \end{cases},$$

de donde, por sustitución regresiva, se obtiene que

$$S = \left\{ \left(\frac{7}{4}, -\frac{11}{5}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

11. Determinar, si es posible, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & \lambda \\ x+(\lambda+1)y+z & = & 2\lambda \\ x+y+(\lambda+2)z & = & -1 \end{array}\right.$$

tenga:

a) solución única.

b) infinitas soluciones.

c) ninguna solución.

Solución: La matriz ampliada asociada al sistema es

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & \lambda+2 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = \lambda(\lambda+1)$, se tiene que

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq -1 \wedge \lambda \neq 0).$$

Si $\lambda = -1$, $(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $r(A) = 2 = r(A, B)$.

Si $\lambda = 0$, $(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $r(A) = 2 = r(A, B)$.

De lo anterior, se obtiene:

a) El sistema tiene solución única cuando $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

b) El sistema tiene infinitas soluciones si $\lambda = -1$ o $\lambda = 0$.

c) No existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema no tenga solución.

12. Utilizando matrices, hallar el conjunto solución, para x, y, z y w en $\mathbb{R}$, del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y-2z+4w &=& 2\\ 6x+12y-9z+21w &=& 0\\ -4x-8y+10z-26w &=& 8 \end{array}\right.$$

Solución: Dado que

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 4 & 2\\ 6 & 12 & -9 & 21 & 0\\ -4 & -8 & 10 & -26 & 8 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el sistema dado es equivalente al siguiente

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+2w &=& 1\\ z-3w &=& 2 \end{array}\right.$$

y como $r(A)=2=r(A,B)$, entonces dos incógnitas pueden expresarse en términos de otras dos. En este caso, al despejar x y z en función de y y w, se tiene que $x=-2y+w+3$ y que $z=3w+2$.

De lo anterior, el conjunto solución puede describirse como sigue

$$S=\left\{(-2y+w+3,y,z,3w+2)\in\mathbb{R}^4 : y\in\mathbb{R},\, w\in\mathbb{R}\right\}.$$

13. Indicar justificadamente para qué valores de λ, si existen, el sistema

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(\lambda^2-9)z=\lambda \end{cases}$$

tiene:

a) Solución única.

b) Infinitas soluciones.

c) Ninguna solución.

Solución: Como $|A| = \lambda^2 - 10$, entonces $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm\sqrt{10}$.

Si $\lambda = \pm\sqrt{10}$, entonces $(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \pm\sqrt{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm\sqrt{10}-2 \end{pmatrix}$

y $r(A) = 2 \neq r(A, B) = 3$.

a) El sistema tiene solución única, cuando $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\right\}$.

b) El sistema nunca tiene infinitas soluciones.

c) El sistema no tiene solución, cuando $\lambda \in \left\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\right\}$.

14. Utilizando matrices, determinar el conjunto solución, para x, y y z en $\mathbb{R}$, del sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ x + 8y + 5z &= 0 \end{cases}$$

Solución: Dado que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el sistema dado es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ 3y + z &= 0 \end{cases}$$

y como $r(A) = 2 = r(A, B) < n = 3$, el sistema tiene infinitas soluciones y 2 incógnitas pueden expresarse en términos de alguna de las otras. En este caso, al despejar x y z en función de y, se tiene que $z = -3y$ y que $x = 7y$.

De lo anterior, el conjunto solución está dado por

$$\left\{(7y, y, -3y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\right\}.$$

15. Indicar justificadamente para qué valores de a y b, el sistema $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=b \\ x+y+az=1 \end{cases}$, tiene:

   a) Solución única.
   b) Infinitas soluciones.
   c) Ninguna solución.

Solución:

Si $a \neq 0$, se tiene que $(A,B) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & a-b \end{pmatrix}$.

Si $a=0$, entonces $(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $r(A) = 3 = r(A,B)$.

   a) El sistema tiene solución única cuando $a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ y $b \in \mathbb{R}$.
   b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a = b = 1$ y para $a = b = -2$
   c) El sistema tiene no tiene solución en el caso en que $a = 1$ y $b \neq 1$ y tampoco en el caso en que $a = -2$ y $b \neq -2$.

16. Determinar, si es posible, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que el sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ x+2y+z &= 3 \\ x+y+(\lambda^2-8)z &= \lambda \end{cases}$$

tenga:

a) Solución única.

b) Infinitas soluciones.

c) Ninguna solución.

Solución: La matriz ampliada asociada al sistema es

$$(A;B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda^2-8 & \lambda \end{pmatrix}$$

Como $|A| = \lambda^2 - 9$, se tiene que $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 3$.

Si $\lambda = \pm 3$, entonces $(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \pm 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \pm 3 \end{pmatrix}$
y $r(A) = 2 \neq r(A,B) = 3$.

De lo anterior, se obtiene:

a) El sistema tiene solución única cuando $\lambda \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

b) El sistema nunca tiene infinitas soluciones.

c) El sistema no tiene solución cuando $\lambda \in \{-3, 3\}$.

17. Utilizando matrices, hallar el conjunto solución, para x, y y z en $\mathbb{R}$, del sistema

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-3y-12z &= 0 \\ 2x+5y+4z &= 0 \end{cases}$$

Solución: Dado que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -12 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el sistema dado es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ y+2z &= 0 \end{cases}$$

y como $r(A) = 2 = r(A, B)$, entonces 2 incógnitas pueden expresarse en términos de alguna de las otras. En este caso, al despejar x e y en función de z, se tiene que $y = -2z$ y que $x = 3z$.

De lo anterior, el conjunto solución puede describirse como sigue

$$\left\{(3z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\right\}.$$

18. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A se dice idempotente si $A^2 = A$ y A se dice involutiva si $A^2 = I_n$. Demostrar que:

a) B es idempotente si y sólo si $B \cdot (I_n - B) = \theta_{n\times n}$.

b) si B es involutiva entonces la matriz $C = \dfrac{1}{2}(I_n - B)$ es idempotente.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} B\cdot(I_n - B) = \theta_{n\times n} &\Leftrightarrow B\cdot I_n - B^2 = \theta_{n\times n} \\ &\Leftrightarrow B - B^2 = \theta_{n\times n} \\ &\Leftrightarrow B = B^2 + \theta_{n\times n} \\ &\Leftrightarrow B = B^2 \\ &\Leftrightarrow B^2 = B. \end{aligned}$$

b) Dado que

$$\begin{aligned} C^2 &= \left(\frac{1}{2}(I_n - B)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(I_n - B)^2 \\ &= \frac{1}{4}(I_n - B)(I_n - B) \\ &= \frac{1}{4}\left(I_n^2 - I_nB - BI_n + B^2\right) \\ &= \frac{1}{4}(I_n - B - B + I_n) \\ &= \frac{1}{4}(2I_n - 2B) \\ &= \frac{1}{2}(I_n - B) \\ &= C, \end{aligned}$$

es claro que C es idempotente.

Última actualización: **16 de abril de 2024**

Prof. Elvis Gavilán
egavilan@udec.cl