Universidad de Concepción

Facultad de Ciencias Forestales

Recopilación de ejercicios resueltos para Matemática I (527113/527117)

Concepción, 1 de abril de 2024

Foro 1
Matemática I (527113/527117)

1. Indicar cuál(es) de las siguientes afirmaciones son proposiciones:

   a) $\sqrt{9} = 3$
   b) $(3+4)^2 = 3^2 + 4^2$
   c) La temperatura de congelación del mercurio es menor que la temperatura de congelación del agua.
   d) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 < 10$
   e) Existen los extraterrestres.
   f) Esta oración es falsa.

   Desarrollo:

   a) Es una proposición, ella afirma que la raíz de 9 es 3 tres y es verdadera, pues 3 es el único número no negativo tal que su cuadrado es igual a 9.
   b) Sí es proposición y ella afirma que 3 más 4 al cuadrado es igual a 3 al cuadrado más 4 al cuadrado; su valor de verdad es falso pues 49 no es igual a 25.
   c) Es una proposición y ella compara los valores numéricos de dos temperaturas, su valor es verdadero.
   d) Es proposición y ella afirma que para un número natural cualquiera n, se tiene que n^2 más 1 es menor que 10, su valor de verdad es falso debido a que si n es igual a 3, la expresión $n^2 + 1$ toma el valor 10 (que no es menor que 10).
   e) La afirmación indica que existen los extraterrestres, ella es una proposición y su valor de verdad es desconocido.
   f) La afirmación "Esta oración es falsa"no es verdadera porque ella misma indica que es falsa; tampoco puede ser falsa, ya que si lo fuese, indicaría su propia veracidad. Por lo tanto, "Esta oración es falsa"no es una proposición.

2. Dadas las proposiciones:

   - $p :=\ (1+8=7) \vee (0<10)$
   - $q :=\ (1000-99=901) \wedge (-1\cdot 1=1)$
   - $r :=\ (-4>-9) \rightarrow \big(2^2 \geq 4\big)$

   Determinar el valor de verdad de $p \rightarrow (q \vee \sim r)$.

   Desarrollo:

   Como $1+8=9 \neq 7$ y 0 sí es menor que 10, entonces el valor de verdad de p es

   $$(F \vee V) \Leftrightarrow V.$$

   Dado que $1000-99=901$ y $-1\cdot 1=-1\neq 1$, el valor de q es

   $$(V \wedge F) \Leftrightarrow F.$$

   Por otra parte, como $-4>-9$ y $2^2=4$, se tiene que r es

   $$(V \rightarrow V) \Leftrightarrow V.$$

   Por lo tanto, como p es verdadera, q es falsa y r es verdadara, se tiene que la proposición $p \rightarrow (q \vee \sim r)$ tiene valor de verdad

   $$[V \rightarrow (F \vee F)] \Leftrightarrow (V \rightarrow F) \Leftrightarrow F.$$

3. Sea la proposición $p := 3 > 8$ y sea q una proposición tal que $\sim q \to p$ es verdadera. Determinar el valor de verdad de

$$(q \wedge \sim p) \vee (p \leftrightarrow q) \, .$$

Desarrollo:

Como $p := 3 > 8$ es falsa y el condicional $\sim q \to p$ es verdadero, se deduce que su antecedente $\sim q$ es falso y por lo tanto, q tiene valor de verdad verdadero. De este modo, de la tabla

p	q	$\sim p$	$(q \wedge \sim p)$	$(p \leftrightarrow q)$	$(q \wedge \sim p) \vee (p \leftrightarrow q)$
F	V	V	V	F	V

se observa que el valor de verdad de $(q \wedge \sim p) \vee (p \leftrightarrow q)$ es verdadero.

4. Si p y q son falsas, ¿cuál es el valor de verdad de la proposición

$$\sim ([r \vee (\sim q \wedge \sim p)] \to p)?$$

Desarrollo:

Definiendo $s := (\sim q \wedge \sim p)$, de la tabla de verdad

p	q	$\sim p$	$\sim q$	s	$r \vee s$	$([r \vee s] \to p)$	$\sim ([r \vee s] \to p)$
F	F	V	V	V	V	F	V

se tiene que $\sim ([r \vee (\sim q \wedge \sim p)] \to p)$ es verdadera.

Foro 2
Matemática I (527113/527117)

1. Sabiendo que la proposición $(q \wedge \sim p) \rightarrow [(p \wedge r) \vee t]$ es falsa:

   a) Determinar el valor de verdad de las proposiciones p, q y t.

   b) Determinar el valor de verdad de la proposición $\sim [(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (r \vee \sim t)]$.

   Desarrollo:

   a) La única posibilidad para que el condicional $(q \wedge \sim p) \rightarrow [(p \wedge r) \vee t]$ sea falso, es que la proposición $(q \wedge \sim p)$ sea verdadera y $[(p \wedge r) \vee t]$, falsa. Como $(q \wedge \sim p)$ debe ser verdadera, es necesario que ambas proposiciones q y $(\sim p)$ sean verdaderas. Así, q es verdadera y como $(\sim p)$ es verdadera, p es falsa.

   Por otra parte, una disyunción es falsa solamente cuando las dos proposiciones conectadas son falsas; en este caso, como $[(p \wedge r) \vee t]$ es falsa, entonces $(p \wedge r)$ y t son falsas.

   En conclusión, p y t son falsas y q es verdadera.

   b) Con los valores de verdad de p, q y t ya determinados, se tiene que $(\sim p \vee \sim q)$ es una proposición verdadera pues $(\sim p)$ es verdadera y $(r \vee \sim t)$ también es verdadera ya que $(\sim t)$ lo es.

   De lo anterior, el condicional $[(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (r \vee \sim t)]$ es verdadero y entonces su negación $\sim [(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (r \vee \sim t)]$ es falsa.

2. Definir adecuadamente afirmaciones, funciones proposicionales y conjuntos, para luego escribir simbólicamente cada una de las siguientes proposiciones:

   a) Si ruge y come carne, entonces no es mariposa.

   b) Florentino estará feliz e irá de viaje si y sólo si aprueba el examen.

   c) Todas las alumnas de Matemática I que estudian, obtienen buenas notas.

   d) Algunos asistentes al congreso recibieron una agenda o una polera, pero no ambas.

   Desarrollo:

   a) Sean $p :=$ *ruge*, $q :=$ *come carne* y $r :=$ *es mariposa*. La proposición escrita simbólicamente es
$$(p \wedge q) \to \sim r.$$

   b) Al definir las proposiciones $p :=$ *Florentino estará feliz*, $q :=$ *Florentino irá de viaje* y $r :=$ *Florentino aprueba el examen*, la proposición dada queda como
$$(p \wedge q) \leftrightarrow r.$$

   c) Considerando $A := \{x : x \text{ es alumna de Matemática I}\}$, $p(x) :=$ *x estudia* y $q(x) :=$ *x obtiene buenas notas*, se tiene que la proposición escrita simbólicamente es
$$\forall x \in A : p(x) \to q(x).$$

   d) Para el conjunto $B := \{x : x\text{asistió al congreso}\}$ y las funciones proposicionales $p(x) :=$ *x recibió una agenda* y $q(x) :=$ *x recibió una polera*, la proposición se puede reescribir como
$$\exists x \in B : p(x) \veebar q(x).$$

3. Escribir la negación de la proposición

$$p := \forall x \in A, \exists y \in B : [q(x) \vee (r(x) \wedge s(y))] \,.$$

Desarrollo: La negación de p es

$$\begin{aligned}
\sim p \;&\Leftrightarrow \sim (\forall x \in A, \exists y \in B : [p(x) \vee (q(x) \wedge r(y))]) \\
&\Leftrightarrow \; \exists x \in A, \sim (\exists y \in B : [p(x) \vee (q(x) \wedge r(y))]) \\
&\Leftrightarrow \; \exists x \in A, \forall y \in B : \sim ([p(x) \vee (q(x) \wedge r(y))]) \\
&\Leftrightarrow \; \exists x \in A, \forall y \in B : \sim p(x) \wedge \sim [q(x) \wedge r(y)] \\
&\Leftrightarrow \; \exists x \in A, \forall y \in B : \sim p(x) \wedge (\sim q(x) \vee \sim r(y)) \,.
\end{aligned}$$

4. Sean $A = \{10, 11, 12\}$ y la proposición

$$p := \forall x \in A, \exists y \in A : x - y < 0.$$

a) Hallar el valor de verdad de p.

b) Escribir la negación de p.

Desarrollo:

a) Para $x = 12$, al asignar a y todos los valores posibles en A, se tiene que $x - y$ toma los valores

$$12 - 10 = 2, \quad 12 - 11 = 1 \quad \text{y} \quad 12 - 12 = 0,$$

de los cuales, ninguno es negativo y por lo tanto, la proposición es falsa.

b) La negación de p está dada por

$$\begin{aligned} \sim p \; &\Leftrightarrow \sim (\forall x \in A, \exists y \in A : x - y < 0) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A, \sim (\exists y \in A : x - y < 0) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in A : \sim (x - y < 0) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in A : x - y \geq 0. \end{aligned}$$

Foro 3
Matemática I (527113/527117)

1. Sean p, q y r proposiciones. Verificar que la expresión lógica

$$[p \to (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \to r]$$

es una tautología.

Desarrollo: Definiendo $s := p \to (q \vee r)$ y $t := (p \wedge \sim q) \to r$, se construye la tabla de verdad asociada a la expresión lógica dada, ella es

p	q	r	$q \vee r$	s	$p \wedge \sim q$	t	$s \leftrightarrow t$
V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V

donde se observa que el condicional $s \leftrightarrow t$ es siempre verdadero, independiente de los valores de verdad de p, q y r, por lo tanto

$$[p \to (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \to r]$$

es una tautología.

2. Sean $A = \{-2, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ y la proposición

$$p := \forall x \in A, \exists!\, y \in B : x + y \geq 0.$$

a) Determinar de manera justificada el valor de verdad de p.

b) Escribir la negación de p.

Desarrollo:

a) Si $x = 0 \in A$, $y_1 = 1 \in B$ e $y_2 = 2 \in B$, es claro que $x + y_1 \geq 0$ y que $x + y_2 \geq 0$. Con este contraejemplo, como $y_1 \neq y_2$ se tiene que la proposición p es falsa.

b) Para $s(x, y) := x + y \geq 0$, la negación de p es

$$\begin{aligned} \sim p \quad &\Leftrightarrow \quad \sim (\forall x \in A, \exists!\, y \in B : s(x, y)) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A, \sim (\exists!\, y \in B : s(x, y)) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A, (\forall y \in B : \sim s(x, y) \veebar \exists y \in B, \exists z \in B, y \neq z : s(x, y) \wedge s(x, z)), \end{aligned}$$

donde $\sim s(x, y)$ indica que $x + y < 0$.

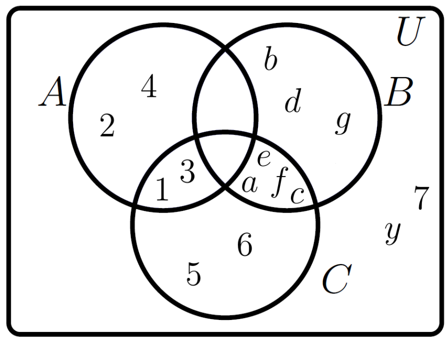
3. Considerando $U = \{1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, f, 7, g, y\}$ y los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in U : x \leq 4\}, \\ B &= \{x \in U : x \text{ es una de las 10 primeras letras del alfabeto}\}, \\ C &= \{1, a, 3, c, 5, e, 6, f\}. \end{aligned}$$

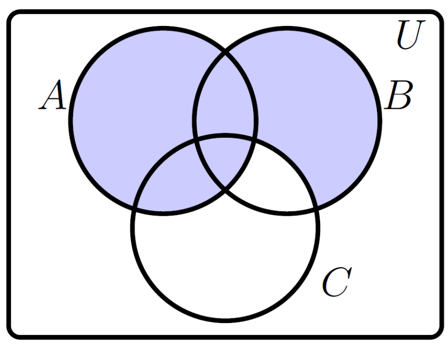
Escribir por extensión y representar en diagramas de Venn a:

a) $(B - C) \cup A$ *b*) $A^c \cap B$

Desarrollo: Los conjuntos por extensión son $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $C = \{1, a, 3, c, 5, e, 6, f\}$, se tiene el diagrama de Venn

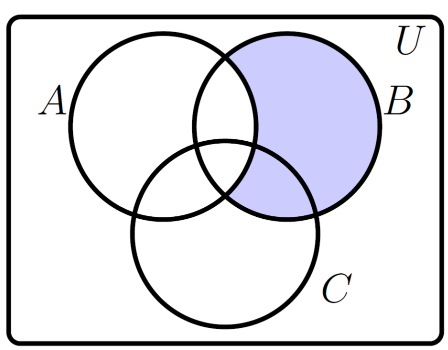


a) Aquí el conjunto solicitado puede representarse por



de donde, $(B - C) \cup A = \{1, 2, 3, 4, b, d, g\}$.

b) En este caso, el conjunto puede representarse por



de donde, $A^c \cap B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

4. De un grupo de 80 personas y sus preferencias por los canales de televisión Fox, HBO y Discovery Channel, se sabe que 50 ven Fox, 25 ven HBO, 15 ven Discovery Channel y 5 ven los tres canales. Si cada persona ve al menos uno de estos tres canales:

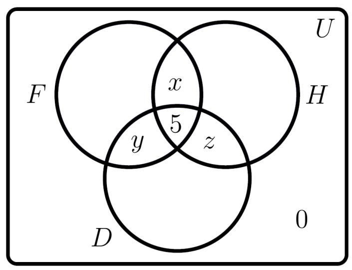
   a) ¿Cuántas personas ven Fox y HBO?,

   b) ¿Cuántas ven solamente Fox? y

   c) ¿Cuántas ven Fox o Discovery Channel?

   Indicación: Utilizar un diagrama de Venn y la fórmula para la cardinalidad de la unión de tres conjuntos.

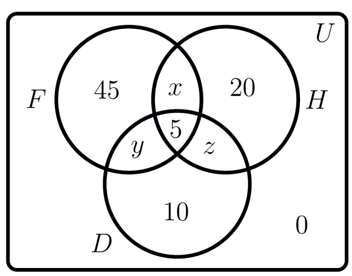
   Desarrollo: Si F es el conjunto de quienes ven Fox, H el de quienes ven HBO y D el de quienes ven Discovery Channel, del diagrama



   se tiene que $|F \cap H| = x + 5$, $|F \cap D| = y + 5$ y $|H \cap D| = z + 5$. De la fórmula de la cardinalidad para la unión de tres conjuntos,

$$
\begin{aligned}
|F \cup H \cup D| &= |F| + |H| + |D| - |F \cap H| - |F \cap D| - |H \cap D| + |F \cap H \cap D| \\
80 &= 50 + 25 + 15 - (x+5) - (y+5) - (z+5) + 5 \\
80 &= 80 - (x + y + z)\,,
\end{aligned}
$$

   de donde $x + y + z = 0$ y dado que el mínimo valor que una cardinalidad puede tomar es 0, entonces se tiene que $x = y = z = 0$ y se obtiene lo siguiente



   y las cantidades solicitadas son:

   a) $|F \cap H| = 5$ *b*) $|F \cap (H \cup D)^c| = 45$ *c*) $|F \cup D| = 60$

Foro 4
Matemática I (527113/527117)

1. En los siguientes casos, si es necesario, transformar cada fracción a una equivalente en la cual su denominador sea el mínimo común múltiplo entre todos los denominadores; luego, realizar las operaciones que correspondan:

   a) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{4}$

   b) $\dfrac{1}{9} + \dfrac{7}{12}$

   c) $\dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{15}$

   d) $\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{17}{6}$

   Desarrollo:

   a) Dado que el mínimo común múltiplo entre los denominadores es 4, entonces

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6+5}{4} = \frac{11}{4}$$

   b) Como el mínimo común múltiplo entre los denominadores es 36, entonces

$$\frac{1}{9} + \frac{7}{12} = \frac{1 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{4}{36} + \frac{21}{36} = \frac{4+21}{36} = \frac{25}{36}$$

   c) Debido a que el mínimo común múltiplo entre 10 y 15 es 30, entonces

$$\frac{1}{10} - \frac{4}{15} = \frac{1 \cdot 3}{10 \cdot 3} - \frac{4 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{3}{30} - \frac{8}{30} = \frac{3-8}{30} = -\frac{5}{30} = \frac{1 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 6} = -\frac{1}{6}$$

   d) Como el mínimo común múltiplo entre 4, 8 y 6 es 24, entonces se tiene que

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{8} - \frac{17}{6} = \frac{5 \cdot 6}{4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{17 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{30}{24} + \frac{3}{24} - \frac{68}{24} = \frac{30+3-68}{24} = -\frac{35}{24}.$$

2. Para obtener el mínimo común múltiplo MCM entre 72 y 108:

    - Se descomponen ambos números en potencias de números primos

    $$72 = 2^3 \cdot 3^2 \ \text{ y } \ 108 = 3^3 \cdot 2^2,$$

    - se escoge la mayor potencia de cada número primo presente en alguna de las descomposiciones del paso anterior y luego se multiplica, obteniendo el MCM, que en este ejemplo es:

    $$MCM(72, 108) = 2^3 \cdot 3^3 = 216.$$

    Utilizar el procedimiento anterior para obtener el MCM entre 180 y 324.

    Desarrollo: Dado que

    $$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \text{y} \quad 324 = 2^2 \cdot 3^4,$$

    entonces al escoger la mayor potencia de cada número primo y al multiplicarlas se obtiene:

    $$MCM(180, 324) = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 = 1620.$$

3. Paula desea vender un terreno. Logró venderlo en 3 etapas, de la siguiente manera:

   - En marzo vendió $\dfrac{1}{2}$ del terreno,
   - en abril vendió la tercera parte de lo que vendió en marzo,
   - en mayo vendió las 5000 hectáreas restantes.

   a) ¿Qué fracción del terreno vendió Marcela en el período marzo - abril?

   b) ¿Cuántas hectáreas posee el terreno en total?

   Desarrollo:

   a) Dado que en abril Marcela vendió $\dfrac{1}{3}$ de la fracción vendida en marzo, es decir, de $\dfrac{1}{2}$, entonces en el periodo marzo-abril Marcela vendió

   $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{2}\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

   del terreno total.

   b) En marzo-abril Marcela vendió $\dfrac{2}{3}$ del terreno y en mayo el resto, entonces en mayo vendió $\dfrac{1}{3}$; por lo tanto, para obtener la cantidad total de hectáreas, basta con multiplicar por 3 lo vendido en ese último mes, esto es

   $$5000\cdot 3=15000$$

4. La Federación de Fútbol de Brasil puso a la venta las entradas para un partido con Argentina en tres etapas:

   - En la primera etapa se vendieron $\frac{1}{4}$ del total de las entradas,
   - en la segunda se vendieron $\frac{3}{8}$ de las entradas que quedaron disponibles después de la primera etapa
   - en la tercera, se vendieron 22500 entradas, las cuales fueron todas las que quedaron después de las dos etapas anteriores.

   a) ¿Qué fracción del total de entradas se vendieron en las dos primeras etapas?

   b) ¿Cuántas entradas se vendieron en total?

   c) ¿Cuántas entradas se vendieron en la segunda etapa?

   Desarrollo: De la información dada en el enunciado, se tiene:

   - En la primera etapa la fracción del total de entradas vendidas fue $\frac{1}{4}$,
   - la fracción del total de entradas vendidas en la segunda etapa fue

   $$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{32},$$

   - en la tercera se vendieron las entradas restantes de las dos etapas anteriores y la fracción correspondiente es

   $$1 - \frac{1}{4} - \frac{9}{32} = \frac{32}{32} - \frac{8}{32} - \frac{9}{32} = \frac{15}{32}.$$

   a) La fracción del total de entradas vendidas en las primeras dos etapas fue

   $$\frac{1}{4} + \frac{9}{32} = \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} + \frac{9}{32} = \frac{6+9}{32} = \frac{17}{32}.$$

   b) Como en la tercera etapa se vendieron 22500 entradas, que corresponden a $\frac{15}{32}$ del total, entonces se tiene que el total fue

   $$\frac{32}{15} \cdot 22500 = \frac{32 \cdot \cancel{15} \cdot 1500}{\cancel{15}} = 32 \cdot 1500 = 48000.$$

   c) Las cantidad de entradas vendidas en la segunda etapa fueron

   $$\frac{9}{32} \cdot 48000 = 13500.$$

Foro 5
Matemática I (527113/527117)

1. Se dice que dos variables x e y son **directamente proporcionales** cuando el cuociente entre sus valores se mantiene constante, es decir, si existe algún valor $k \in \mathbb{R}$ constante, tal que

$$\frac{y}{x} = k.$$

Utilizar esta definición para:

a) Determinar el valor de $a + b$ a partir de la tabla

$\boldsymbol{p}$	a	6	3
$\boldsymbol{q}$	40	b	24

sabiendo que p y q son directamente proporcionales.

b) Calcular cuántas calorías aportan 4.5 kilogramos de un alimento, si 250 gramos del mismo alimento aportan 0.5 calorías.

Desarrollo:

a) Como p y q son (directamente) proporcionales, el cuociente entre cada par de valores es constante. Considerando $p = 3$ y $q = 24$, se tiene que

$$\frac{q}{p} = \frac{24}{3} = 8$$

y con los otros dos pares de valores se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{40}{a} = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad a = \frac{40}{8} = 5, \\ \frac{b}{6} = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad b = 6 \cdot 8 = 48, \end{aligned}$$

de donde, $a + b = 53$.

b) La cantidad de calorías que aporta un alimento es directamente proporcional a la cantidad del mismo y el cuociente kilogramos/calorías ha de ser constante; así, si x es la cantidad de calorías que aportan 4.5 kg del alimento, entonces

$$\frac{0.25}{0.5} = \frac{4.5}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 9.$$

2. Se dice que dos variables x e y son **inversamente proporcionales** cuando el producto entre sus valores se mantiene constante, es decir, si existe algún valor $k \in \mathbb{R}$ constante, tal que

$$xy = k.$$

Utilizar esta definición para:

a) Determinar el valor de $m - n$ a partir de la tabla

$\boldsymbol{a}$	5	m	10
$\boldsymbol{b}$	6	4	n

sabiendo que a y b son inversamente proporcionales.

b) Calcular cuántos empleados se necesitan para hacer un trabajo en 5 días, si 8 empleados hacen el mismo trabajo en 20 días.

Desarrollo:

a) Como a y b son inversamente proporcionales, el producto $a \cdot b$ es constante. Considerando $a = 5$ y $b = 6$, se tiene que

$$ab = 5 \cdot 6 = 30.$$

Así, dado que los otros dos productos deben ser también 30, se obtiene

$$\begin{aligned} m \cdot 4 = 30 \quad &\Leftrightarrow \quad m = \frac{15}{2}, \\ 10 \cdot n = 30 \quad &\Leftrightarrow \quad n = 3, \end{aligned}$$

y entonces, $m - n = \dfrac{9}{2}$.

b) La relación entre el número de empleados y la cantidad de días que lleva hacer un trabajo es de proporción inversa. Considerando que el producto entre estas dos cantidades debe ser igual en los dos casos y que p es el número de empleados que se necesitan para hacer el trabajo en 5 días, se tiene

$$8 \cdot 20 = p \cdot 5 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{8 \cdot 20}{5} = 32,$$

y entonces, se requieren de 32 empleados (o hacen falta 24 empleados más) para realizar el trabajo en 20 días.

3. El tanto por ciento es un caso particular de proporcionalidad directa en donde **uno de los términos de la proporción es 100**:

$$\frac{Q}{C} = \frac{P}{100} \Rightarrow Q = \frac{P}{100} \cdot C = P\,\% \cdot C$$

Utilizar lo anterior para resolver los siguientes problemas con enunciado:

a) Si el radio de un círculo aumenta en un 100 %, ¿en qué porcentaje se incrementa su área?

b) Si la longitud de cada arista de un cubo aumenta en un 50 %, determinar cómo varía la superficie del cubo.

c) Calcular en cuánto disminuye el valor de un producto después de aplicarle dos descuentos sucesivos, primero uno de un 10 % y luego otro de un 20 %.

Desarrollo:

a) Si r_1 y A_1 son el radio y área del círculo original, $A_1 = \pi r_1^2$. Ahora, si r_2 y A_2 son el radio y área del círculo después del aumento, como el radio crece un 100 %, su valor se duplica y

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi \left(2r_1\right)^2 = 4\pi r_1^2 = 4A_1.$$

De lo anterior, el porcentaje del incremento pedido es

$$\frac{A_2 - A_1}{A_1} \cdot 100 = \frac{4A_1 - A_1}{A_1} \cdot 100 = 3 \cdot 100 = 300.$$

b) Si a_1 y S_1 son la arista y superficie del cubo original, $S_1 = 6a_1^2$. Si a_2 y S_2 son la arista y superficie del cubo después del cambio, como la arista crece un 50 %, $a_2 = \frac{3}{2}a_1$ y

$$S_2 = 6a_2^2 = 6\left(\frac{3}{2}a_1\right)^2 = \frac{9}{4} \cdot 6a_1^2 = \frac{9}{4}S_1.$$

Así, la variación de la superficie fue

$$S_2 - S_1 = \frac{9}{4}S_1 - S_1 = \frac{5}{4}S_1,$$

es decir, ella aumentó un 125 % (o al 225 %).

c) Si P es el precio original, con el primer descuento del 10 % el nuevo precio es $\frac{9}{10}P$ y con el segundo descuento del 20 %, el precio final es

$$\frac{8}{10}\left(\frac{9}{10}P\right) = \frac{72}{100}P,$$

y entonces, este precio final corresponde al 72 % del precio original, es decir, los dos descuentos equivalen a un único descuento del 28 %.

4. Utilizar propiedades de potencias y raíces para expresar

a) $\dfrac{10^{2020}+10^{2022}}{10^{2021}+10^{2021}}$,

b) $\dfrac{2^{2021}\cdot 3^{2023}}{6^{2022}}$,

c) $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}$,

d) $\sqrt{\dfrac{x}{1-\frac{x-1}{x}}}$, donde $x<0$,

de la manera más simplificada posible.

Desarrollo:

a)

$$\frac{10^{2020}+10^{2022}}{10^{2021}+10^{2021}}=\frac{10^{2020}+10^{2020+2}}{2\cdot 10^{1+2020}}=\frac{10^{2020}+10^{2020}\cdot 10^{2}}{2\cdot 10\cdot 10^{2020}}$$

$$=\frac{\cancel{10^{2020}}\left(1+10^{2}\right)}{20\cdot\cancel{10^{2020}}}=\frac{1+100}{20}=\frac{101}{20}.$$

b)

$$\frac{2^{2021}\cdot 3^{2023}}{6^{2022}}=\frac{2^{2021}\cdot 3^{2023}}{(2\cdot 3)^{2022}}=\frac{2^{2021}\cdot 3^{2023}}{2^{2022}\cdot 3^{2022}}=\frac{2^{2021}\cdot 3^{2022+1}}{2^{2021+1}\cdot 3^{2022}}=\frac{\cancel{2^{2021}}\cdot\cancel{3^{2022}}\cdot 3}{\cancel{2^{2021}}\cdot 2\cdot\cancel{3^{2022}}}=\frac{3}{2}.$$

c)

$$\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}=\left(x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x\left(x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x\left(x\left(x\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left(x\left(x\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x\left(x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left(x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}.$$

d) Como $\dfrac{x}{1-\frac{x-1}{x}}=\dfrac{x}{\frac{x-x+1}{x}}=\dfrac{x}{\frac{1}{x}}=x^{2}$, la expresión dada queda

$$\sqrt{\frac{x}{1-\frac{x-1}{x}}}=\sqrt{x^{2}}=|x|=-x,$$

en donde en la última igualdad, se ha utilizado la definición de valor absoluto y el hecho que $x<0$.

Foro 6
Matemática I (527113/527117)

1. Expresar las siguientes cantidades como una fracción de denominador natural:

   a) $\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{4}}}+\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{2}}}$

   b) $\sqrt{\dfrac{4}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

   c) $1-\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$

   Desarrollo:

   a)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{4}}}+\frac{1}{4-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{2}}} &= \frac{1}{2-\dfrac{1}{\dfrac{12}{4}-\dfrac{1}{4}}}+\frac{1}{4-\dfrac{1}{\dfrac{6}{2}-\dfrac{1}{2}}}\\
&= \frac{1}{2-\dfrac{1}{11/4}}+\frac{1}{4-\dfrac{1}{5/2}}\\
&= \frac{1}{\dfrac{22}{11}-\dfrac{4}{11}}+\frac{1}{\dfrac{20}{5}-\dfrac{2}{5}}\\
&= \frac{1}{18/11}+\frac{1}{18/5}\\
&= \frac{11}{18}+\frac{5}{18}\\
&= \frac{16}{18}\\
&= \frac{8}{9}
\end{aligned}
$$

   b)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{3}{4}} &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{3}\\
&= \frac{4\sqrt{3}}{6}-\frac{3\sqrt{3}}{6}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}
$$

$c)$

$$
\begin{aligned}
1-\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{3}} &= 1-\frac{1}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \\
&= 1-\frac{1-\sqrt{3}}{1-3}+\frac{1+\sqrt{3}}{1-3} \\
&= 1+\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\
&= 1+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 1-\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

2. Factorizar cada una de las siguientes expresiones:

   a) $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10}$
   b) $(2x+3)^2 - (x-1)^2$
   c) $4x^2 + 9y^2 + 12xy$
   d) $x^2 + 11x + 24$
   e) $3x^2 - 5x - 2$
   f) $x^4 - 13x^2 + 36$

Desarrollo:

a) Para factorizar $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10}$, dado que el $MCD(16, 12, 20) = 4$, que todos los términos tienen como mínimo la potencia 3 en a y como mínimo la potencia 2 en b, se considera el factor común $4a^3b^2$.

Ahora, de las divisiones

$$\frac{16a^6b^7c}{4a^3b^2} = 4a^3b^5c, \quad \frac{12a^5b^2c^3}{4a^3b^2} = 3a^2c^3 \quad \text{y} \quad \frac{20a^3b^{10}}{4a^3b^2} = 5b^8,$$

se obtiene que,

$$16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10} = 4a^3b^2\left(4a^3b^5c - 3a^2c^3 + 5b^8\right)$$

b) Para factorizar $(2x+3)^2 - (x-1)^2$, del producto notable

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

identificando la expresión dada con el lado derecho de la identidad anterior, para $a = 2x + 3$ y $b = x - 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} (2x+3)^2 - (x-1)^2 &= (2x+3+x-1)(2x+3-(x-1)) \\ &= (3x+2)(x+4) \end{aligned}$$

c) Para factorizar $4x^2 + 9y^2 + 12xy$, conviene considerar el producto notable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

en donde lo de la derecha es un trinomio cuadrado perfecto.

Reescribiendo,

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 + 12xy &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 \\ &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 \end{aligned}$$

e identificando la última expresión con un trinomio cuadrado perfecto, en donde $a = 2x$ y $b = 3y$, se obtiene que

$$4x^2 + 9y^2 + 12xy = (2x+3y)^2 .$$

d) Dado que

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2+bx+ax+ab\\ &= x^2+ax+bx+ab\\ &= x^2+(a+b)x+ab,\end{aligned}$$

para factorizar una expresión del tipo x^2+mx+n, se deben hallar a y b tales que

$$a+b=m \quad \text{y} \quad ab=n.$$

Aquí, como los dos números cuya suma es 11 y cuyo producto es 24 son 8 y 3, entonces

$$x^2+11x+24=(x+8)(x+3).$$

e) En este caso, como

$$\begin{aligned}3x^2-5x-2 &= \frac{3\left(3x^2-5x-2\right)}{3}\\ &= \frac{(3x)^2-5(3x)-6}{3}\\ &= \frac{(3x-6)\,(3x+1)}{3}\\ &= \frac{\cancel{3}\,(x-2)\,(3x+1)}{\cancel{3}}\\ &= (x-2)(3x+1),\end{aligned}$$

se obtiene que $3x^2-5x-2=(3x+1)(x-2)$.

f) Al considerar $z=x^2$, como $\left(x^2\right)^2=x^4$, se tiene que

$$x^4-13x^2+36=z^2-13z+36.$$

Los dos números cuya suma es -13 y cuyo producto es 36 son -4 y -9, por lo tanto, $z^2-13z+36=(z-4)\,(z-9)$.

Por otra parte, como $z-4=x^2-2^2=(x+2)\,(x-2)$ y como $z-9=x^2-3^2=(x+3)\,(x-3)$, se tiene que

$$z^2-13z+36=(x+2)\,(x-2)\,(x+3)\,(x-3)$$

y entonces,

$$x^4-13x^2+36=(x+3)\,(x+2)\,(x-2)\,(x-3)\,.$$

3. Expresar $\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}$ como un número natural.

   Indicación: Considerar el hecho que

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

   para reescribir las cantidades subradicales.

   Desarrollo: Dado que

$$54 \pm 30\sqrt{3} = 27 \pm 27\sqrt{3} + 27 \pm 3\sqrt{3} = \left(3 \pm \sqrt{3}\right)^3,$$

   entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}} &= \sqrt[3]{\left(3-\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{3}\right)} \\
&= \cancel{\sqrt[3]{\vphantom{1}}}(3-\sqrt{3})^{\cancel{3}}+\cancel{\sqrt[3]{\vphantom{1}}}(3+\sqrt{3})^{\cancel{3}} \\
&= 3-\sqrt{3}+3+\sqrt{3} \\
&= 6.
\end{aligned}$$

4. Sabiendo que $x+y+z=0$, verificar que

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

Indicación 1: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Indicación 2: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

Desarrollo: Dado que

$$\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3-3xyz &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+z^3-3x^2y-3xy^2-3xyz \\
&= \left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)+z^3-\left(3x^2y+3xy^2+3xyz\right) \\
&= (x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z) \\
&= [(x+y)+z]\left[(x+y)^2-(x+y)\,z+z^2\right]-3xy(x+y+z) \\
&= (x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y)\,z+z^2-3xy\right] \\
&= (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right),
\end{aligned}$$

se tiene que si $x+y+z=0$, entonces $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ y por lo tanto,

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

Foro 7
Matemática I (527113/527117)

1. Decidir, justificadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Si a y b están en $\mathbb{R}$ y son tales que $a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

   b) Si $a \geq 0$, entonces $\sqrt{a} \leq a$.

   c) Si a está en $\mathbb{R}$, entonces $a^2 - 6a + 10 > 0$.

   d) Los valores para a y b de modo que la expresión $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ esté definida en $\mathbb{R}$, son los mismos que hacen que $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ esté también definida en $\mathbb{R}$.

Desarrollo:

a) La afirmación es falsa, por ejemplo para $a = -3$ y $b = -2$, se tiene que $a < b$ y no se tiene que $a^2 < b^2$ pues $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ y 9 no es menor que 4.

b) La afirmación es falsa, por ejemplo, si $a = \dfrac{1}{4}$ se tiene que $\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1}{2}$ no es menor o igual que $\dfrac{1}{4}$.

c) La afirmación es verdadera, pues la expresión al lado izquierdo de la desigualdad puede reescribirse como

$$a^2 - 6a + 10 = a^2 - 6a + 9 + 1 = (a - 3)^2 + 1$$

y dado que para cualquier a real, la expresión $(a - 3)^2$ es una cantidad no negativa, al sumarle 1 se obtendrán siempre valores positivos.

d) La afirmación es falsa, por ejemplo, para $a = b = -1$, la primera expresión queda

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{-1}{-1}} = \sqrt{1} = 1 \,(\text{está definida})$$

y la segunda no está definida como un número real.

2. Sabiendo que para a y b dos números reales no nulos cualesquiera, es válida la desigualdad $a^2 + ab + b^2 > 0$, verificar que
$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3.$$

Desarrollo: Como
$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0,$$

al multiplicar por $a^2 + ab + b^2$ en la desigualdad de la derecha, se obtiene que

$$(a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) < 0 \Leftrightarrow a^3 - b^3 < 0 \Leftrightarrow a^3 < b^3$$

y por lo tanto, $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$.

3. Considerar un rectángulo de lados $y+2$ y $x+\dfrac{1}{2}$, los cuales varían dependiendo de los valores de x e y. Si $c+1 \leq x \leq c+4$ y $d \leq y \leq d+5$, con c y d reales positivos, ¿entre qué valores oscila el perímetro P y el área A del rectángulo, respectivamente?

Desarrollo: Sean $b = y+2$ y $h = x+\dfrac{1}{2}$ la base y la altura del rectángulo, teniendo en cuenta que $c+1 \leq x \leq c+4$ y $d \leq y \leq d+5$, se tiene que b y h varían según:

$$d+2 \leq b \leq d+7 \quad \text{y} \quad c+\frac{3}{2} \leq h \leq c+\frac{9}{2}$$

Si P_m es el menor valor del perímetro P asociado a los valores mínimos de b y h, y P_M es el mayor valor, entonces $P_m \leq P \leq P_M$. De la misma forma, si A_m es el menor valor de A y A_M es el mayor valor, entonces $A_m \leq A \leq A_M$.

Considerando las definiciones de perímetro y de área de un rectángulo, se determinan los valores de P_m, P_M, A_m y A_M, donde

- $P_m = 2\left(c+\dfrac{3}{2}\right) + 2(d+2) = 2(c+d)+7$,
- $P_M = 2\left(c+\dfrac{9}{2}\right) + 2(d+7) = 2(c+d)+23$,
- $A_m = \left(c+\dfrac{3}{2}\right)(d+2)$,
- $A_M = \left(c+\dfrac{9}{2}\right)(d+7)$.

De esta forma se obtiene,

$$2(c+d)+7 \leq P \leq 2(c+d)+23 \quad \text{y} \quad \left(c+\frac{3}{2}\right)(d+2) \leq A \leq \left(c+\frac{9}{2}\right)(d+7).$$

4. El valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$, se define por $|x| := \sqrt{x^2}$ y si a y b son dos números en la recta real, la cantidad $|a - b|$ corresponde a la distancia entre ellos. Utilizando este hecho, expresar como un conjunto escrito por comprensión o extensión, el de los x tales que:

   a) La distancia desde x hasta 5 es igual a 3.
   b) La distancia desde x hasta -3 es (estrictamente) menor 2.
   c) La distancia desde x hasta -1 es mayor o igual 5.
   d) La distancia desde $2x$ hasta 8 es menor o igual que 4.

   Además, si es posible, escribir el correspondiente conjunto utilizando intervalos.

   Desarrollo:

   a) Existen solamente dos puntos en la recta real que están a una distancia de 3 unidades del 5, uno está a la izquierda (el 2) y el otro a la derecha (el 8). El conjunto en este caso, es

   $$\{x \in \mathbb{R} : |x - 5| = 3\}$$

   y al escribirlo por extensión, queda $\{2, 8\}$.

   b) Hay solamente dos reales cuya distancia desde el -3 es 2 unidades, uno es el -5 y el otro es el -1. Ahora, como los x están entre -5 y -1, el conjunto es

   $$\{x \in \mathbb{R} : |x + 3| < 2\} = \left]-5, -1\right[.$$

   c) Los dos puntos en $\mathbb{R}$ que están a 5 unidades del -1 son el -6 y el 4. Ahora, como en este caso los x son menores o iguales que -6 o mayores o iguales que 4, el conjunto está representado por

   $$\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \geq 5\} = \left]-\infty, -6\right] \cup \left[4, +\infty\right[.$$

   d) Dado que los dos puntos a 4 unidades del 8 son el 4 y el 12, al considerar que

   $$|2x - 8| \leq 4 \Leftrightarrow |x - 4| \leq 2,$$

   se tiene en este caso, que los x están en

   $$\{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \leq 2\} = [2, 6].$$

5. $a+b=10$ y $ab=9$, sin hallar los valores de a y b, calcular el valor de $a^2+8ab+b^2$.

Desarrollo: De la primera igualdad, al elevar al cuadrado se obtiene que

$$a^2+2ab+b^2=100$$

y de la segunda, al multiplicar por 6, se tiene que

$$6ab=54.$$

Por lo tanto,

$$a^2+8ab+b^2=a^2+2ab+b^2+6ab=100+54=154.$$

6. Pablo tarda 60 minutos en podar el pasto del jardín de su casa y Pedro puede podarlo en 40 minutos. ¿Cuánto tardarían en podar el pasto si trabajaran juntos, usando dos podadoras?

   Desarrollo: Sea t la cantidad de minutos que tardan juntos Pablo y Pedro en podar el pasto del jardín. Al considerar las fracciones

   - $\frac{1}{60}$:= parte del pasto podado por Pablo en un minuto
   - $\frac{1}{40}$:= parte del pasto podado por Pedro en un minuto
   - $\frac{1}{t}$:= parte del pasto podado por ambos en un minuto

   y dado que la parte del pasto podado por Pablo en un minuto, más la parte del pasto podado por Pedro en un minuto es igual a la parte del pasto podado por ambos en un minuto, se tiene la ecuación

$$\frac{1}{60}+\frac{1}{40}=\frac{1}{t}.$$

   Al multiplicar a ambos lados de la ecuación por $120t$,

$$\begin{aligned}
\frac{120t}{60}+\frac{120t}{40} &= \frac{120\cancel{t}}{\cancel{t}}\\
2t+3t &= 120\\
5t &= 120\\
t &= \frac{120}{5}\\
t &= 24
\end{aligned}$$

   y por lo tanto, $t = 24$ minutos es el tiempo que tardan Pablo y Pedro juntos en podar el pasto.

   Observación: Otra manera de resolver la ecuación, es la siguiente

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{60}+\frac{1}{40}\Leftrightarrow t=\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{40}\right)^{-1}=\left(\frac{2}{120}+\frac{3}{120}\right)^{-1}=\left(\frac{5}{120}\right)^{-1}=\frac{120}{5}=24.$$

Foro 8
Matemática I (527113/527117)

1. La altura de un proyectil está dada por $h = 25t - t^2$, con el tiempo t en segundos y h respecto del suelo en metros. ¿Para qué valores de t el proyectil estará a 136 metros sobre el suelo?

   Desarrollo: Reemplazando $h = 136$ en la ecuación que determina la altura del proyectil, se tiene que

$$\begin{aligned} 136 &= 25t - t^2 \\ t^2 - 25t + 136 &= 0 \\ (t-8)(t-17) &= 0. \end{aligned}$$

   De lo anterior, se tiene que $t = 8$ o $t = 17$. Para estos valores, se obtiene que $h = 136$ y por lo tanto, el proyectil estará a 136 metros sobre el suelo a los 8 segundos y también a los 17 segundos.

   Observación: Para resolver $t^2 - 25t + 136 = 0$, al utilizar la fórmula de la ecuación cuadrática,

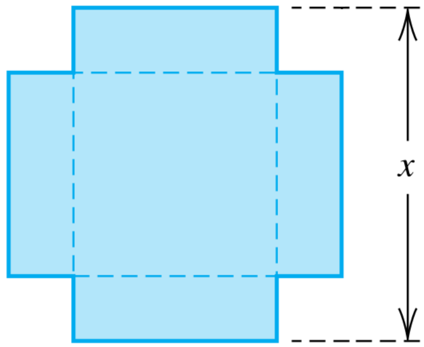
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

   Identificando los valores $a = 1$, $b = -25$ y $c = 136$, se tiene que

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 136} = 9$$

   y se obtienen las soluciones $t_1 = \dfrac{-(-25) - 9}{2 \cdot 1} = 8$ y $t_2 = \dfrac{-(-25) + 9}{2 \cdot 1} = 17$.

2. Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de construirse a partir una pieza cuadrada de hojalata al cortar un cuadrado de 2 centímetros de lado en cada esquina y doblar los lados hacia arriba.



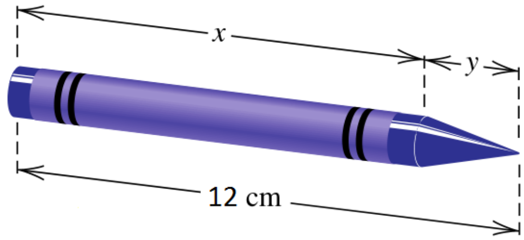
Si el volumen de la caja debe ser igual a 128 centímetros cúbicos, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de hojalata que debe utilizarse?

Desarrollo: Sea x la longitud del lado pieza cuadrada de hojalata. Como el área de la base de la caja es igual a $A = (x-4)^2$ y la altura de ella es igual a $h = 2$, entonces la condición para el valor del volumen se escribe como

$$A \cdot h = V \Leftrightarrow (x-4)^2 \cdot 2 = 128.$$

Como $(x-4)^2 = 64 \Rightarrow (x-4)^2 - 8^2 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-12) = 0 \Rightarrow (x = -4 \vee x = 12)$ y x no puede ser negativo, pues se trata de una longitud, entonces el lado de la pieza cuadrada de hojalata tener longitud $x = 12$ centímetros.

3. Un lápiz tiene forma de cilindro con una pequeña punta cónica. Sabiendo que su largo es de 12 centímetros, el diámetro del cilindro es de 1 centímetro y el volumen del lápiz es de 5 centímetros cúbicos,



determinar la longitud x del cilindro y la altura y del cono.

Desarrollo: Dado que el largo del lápiz es de 12 centímetros, se tiene que

$$x + y = 12. \tag{1}$$

Por otra parte, como el volumen de un cilindro de radio r y altura h es $\pi r^2 h$ y el volumen de un cono de radio r y altura h es $\pi r^2 h/3$, se tiene

$$\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{12}y = 5. \tag{2}$$

Al multiplicar a ambos lados de la ecuación (2) por $\dfrac{12}{\pi}$ se obtiene que

$$3x + y = \frac{60}{\pi},$$

de donde al restar con la ecuación (1), se llega a que la altura del cilindro es

$$x = \frac{30}{\pi} - 6$$

y por lo tanto, nuevamente de la ecuación (1), la altura del cono es

$$y = 18 - \frac{30}{\pi}.$$

4. Resolver en $\mathbb{R}$, la ecuación

$$3x^2 - 5|x| - 2 = 0.$$

Desarrollo: Para hallar la soluciones conviene separar el hecho que $x \in \mathbb{R}$ en dos casos: Si x toma valores negativos **o** si x es no negativo.

Primer caso: Si $x < 0$, como $|x| = -x$, se tiene

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5|x| - 2 &= 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 &= 0 \\ (x+2)(3x-1) &= 0, \end{aligned}$$

de donde $x = -2$ o $x = \dfrac{1}{3}$.

Segundo caso: Si $x \geq 0$, como $|x| = x$, se tiene

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5|x| - 2 &= 0 \\ 3x^2 - 5x - 2 &= 0 \\ (3x+1)(x-2) &= 0, \end{aligned}$$

de donde $x = -\dfrac{1}{3}$ o $x = 2$.

En el primer caso se descarta a $x = \dfrac{1}{3}$ como solución y en el segundo, se descarta $x = -\dfrac{1}{3}$. Por lo tanto, el conjunto solución es $\{-2, 2\}$.

5. Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\left|\dfrac{3-x}{x+5}\right| < 1$

b) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2-x} \geq 1$

c) $\dfrac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18}{(3x^2 - 7x - 6)^3} \geq 0$

d) $|2x-4| - |4x+12| < 4$

Desarrollo:

a) Dado que

$$\left|\frac{3-x}{x+5}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{3-x}{x+5} < 1,$$

se tienen dos inecuaciones.

Para la primera se obtiene que $-1 < \dfrac{3-x}{x+5} \Leftrightarrow \dfrac{8}{x+5} > 0 \Leftrightarrow x > -5$ y una *solución parcial* es $S_i = \,]-5, +\infty[$, mientras que para la segunda se obtiene que $\dfrac{3-x}{x+5} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x+5} > 0$ y otra *solución parcial* es $S_{ii} = \,]-\infty, -5[\, \cup \,]-1, +\infty[$.

Por lo tanto, la solución de la inecuación es

$$S = S_i \cap S_{ii} = \,]-1, +\infty[\,.$$

b) Una condición para que $x \in \mathbb{R}$, sea solución de

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{2-x} \geq 1,$$

es que las raíces del lado izquierdo estén definidas, lo cual ocurre si $x+3 \geq 0$ y si $2-x \geq 0$, es decir, cuando

$$x \in [-3, 2] . \tag{1}$$

Al reescribir la inecuación como

$$\sqrt{x+3} \geq 1 + \sqrt{2-x}$$

y elevar al cuadrado, se obtiene que

$$x \geq \sqrt{2-x}. \tag{2}$$

La condición (1) puede separarse en dos casos:

Primer caso: Si $x \in [-3, 0[$, entonces (2) no se satisface y se obtiene que $S_i = \emptyset$.

Segundo caso: Si $x \in [0, 2]$, entonces de (2), elevando al cuadrado se tiene

$$x^2 \geq 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \geq 0,$$

de donde mediante una tabla de signos, puede obtenerse que

$$x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[1, +\infty\right[$$

y por lo tanto

$$S_{ii} = [0, 2] \cap \left(\left]-\infty, -2\right] \cup \left[1, +\infty\right[\right) = [1, 2] .$$

De lo anterior, la solución de la inecuación es

$$S = S_i \cup S_{ii} = [1, 2] .$$

c) Dado que

$$\begin{aligned}
x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18 &= x^4 - x^3 - (6x^2 - 3x^2) - 3x - 18 \\
&= x^4 - x^3 - 6x^2 + 3x^2 - 3x - 18 \\
&= x^2(x^2 - x - 6) + 3(x^2 - x - 6) \\
&= (x^2 - x - 6)(x^2 + 3) \\
&= (x^2 + 3)(x + 2)(x - 3),
\end{aligned}$$

y que $3x^2 - 7x - 6 = (3x + 2)(x - 3)$, para $x \neq 3$ se tiene

$$\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18}{(3x^2 - 7x - 6)^3} = \frac{(x^2 + 3)(x + 2)\cancel{(x - 3)}}{(3x + 2)^3(x - 3)^2\cancel{(x - 3)}} = \frac{(x^2 + 3)(x + 2)}{(3x + 2)^3(x - 3)^2}$$

y por lo tanto, la inecuación equivale a

$$\frac{x + 2}{3x + 2} \geq 0.$$

Ahora, de la tabla de signos

x		-2		$-2/3$	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x + 2}{3x + 2}$	$+$	0	$-$	¡Indeterminado!	$+$

se obtiene el conjunto $]-\infty, -2] \cup \left] -\frac{2}{3}, +\infty \right[$ y por lo tanto, la solución de la inecuación es

$$S =]-\infty, -2] \cup \left] -\frac{2}{3}, 3 \right[\cup]3, +\infty[\,.$$

d) Conviene separar el hecho que $x \in \mathbb{R}$ en tres casos: Si x es menor o igual que -3, si x es mayor que -3 y menor o igual 2 **o** si x es mayor que 2.

Primer caso: Para $x \leq -3$, dado que $|2x-4| = 4-2x$ y $|4x+12| = -4x-12$, la inecuación se transforma en

$$4 - 2x - (-4x - 12) < 4 \Leftrightarrow x < -6$$

y se obtiene $S_i =]-\infty, -3] \cap]-\infty, -6[=]-\infty, -6[$.

Segundo caso: Si $-3 < x \leq 2$, se tiene que $|2x-4| = 4-2x$ y $|4x+12| = 4x+12$, la inecuación queda

$$4 - 2x - (4x + 12) < 4 \Leftrightarrow x > -2$$

y se obtiene $S_{ii} =]-3, 2] \cap]-2, +\infty[=]-2, 2]$.

Tercer caso: Si $x > 2$, $|2x-4| = 2x-4$ y $|4x+12| = 4x+12$, la inecuación se convierte en

$$2x - 4 - (4x + 12) < 4 \Leftrightarrow x > -10$$

y entonces, se obtiene $S_{iii} =]2, +\infty[\cap]-10, +\infty[=]2, +\infty[$.

De lo anterior, la solución de la inecuación es

$$\begin{aligned} S &= S_i \cup S_{ii} \cup S_{iii} \\ &=]-\infty, -6[\cup]-2, 2] \cup]2, +\infty[\\ &=]-\infty, -6[\cup]-2, +\infty[\end{aligned}$$

Foro 9
Matemática I (527113/527117)

1. Resolver en $\mathbb{C}$, las siguientes ecuaciones:

   a) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

   b) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

   c) $w^3 + 27 = 0$

   d) $z^4 - 16 = 0$

   e) $4t^4 + 11t^2 - 3 = 0$

   Desarrollo:

   a) Dividiendo por 3 y luego completando cuadrado, se tiene

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} &= 0 \\ x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{4}{9} &= \frac{4}{9} \\ x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} &= \frac{4}{9} \\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 &= \frac{4}{9} \\ \left|x - \frac{1}{3}\right| &= \frac{2}{3} \\ x - \frac{1}{3} &= \pm\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

   de donde se obtienen las soluciones $x = -\dfrac{1}{3}$ y $x = 1$.

b) Para determinar las soluciones de la ecuación cuadrática

$$4x^2 - 8x + 5 = 0,$$

al identificar $a = 4$, $b = -8$ y $c = 5$, puede utilizarse la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dado que $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot 5} = \sqrt{16}i = 4i$, las soluciones son

$$x_1 = \frac{8 - 4i}{2 \cdot 4} = 1 - \frac{i}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{8 + 4i}{2 \cdot 4} = 1 + \frac{i}{2}.$$

c) Como $w^3 + 27 = (w + 3)(w^2 - 3w + 9)$, la ecuación puede reescribirse como

$$(w + 3)(w^2 - 3w + 9) = 0.$$

Si $w + 3 = 0$, entonces $w = -3$.

Si $w^2 - 3w + 9 = 0$, entonces $w = \frac{3}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}i\right)$.

De lo anterior, el conjunto solución es

$$S = \left\{-3, \frac{3}{2}\left(1 - \sqrt{3}i\right), \frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{3}i\right)\right\}.$$

d) De la factorización

$$z^4 - 16 = \left(z^2 + 4\right)\left(z^2 - 4\right) = (z + 2i)(z - 2i)(z + 2i)(z - 2),$$

se obtiene que el conjunto solución de

$$z^4 - 16 = 0$$

es $S = \{-2, -2i, 2, 2i\}$.

e) Al utilizar el cambio de variable $u = t^2$, la ecuación queda

$$4u^2 + 11u - 3 = 0 \Leftrightarrow (u + 3)(4u - 1) = 0.$$

Si $u + 3 = 0$, se tiene que $t^2 = -3$ y entonces $t = \pm\sqrt{3}i$.

Si $4u - 1 = 0$, se tiene que $t^2 = \frac{1}{4}$ y entonces $t = \pm\frac{1}{2}$.

De lo anterior, el conjunto solución es $S = \left\{-\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}i\right\}$.

2. Considerar la ecuación

$$3x^2 + \alpha x + 3 = 0,$$

donde α es una constante real.

a) Determinar los valores de α tales que la ecuación tiene solución única.

b) Si $\alpha = -10$, determinar las soluciones de la ecuación.

c) Si $\alpha = 2$, determinar las soluciones de la ecuación.

Desarrollo:

a) La ecuación tiene única cuando su discriminante es nulo, en este caso al identificar $a = 3$, $b = \alpha$ y $c = 3$, se tiene

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ \alpha^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 &= 0 \\ \alpha^2 - 36 &= 0 \\ (\alpha + 6)(\alpha - 6) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación tiene única solución cuando $\alpha = -6$ y cuando $\alpha = 6$.

b) Con $\alpha = -10$, se tiene la ecuación $3x^2 - 10x + 3 = 0$, de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} \\ x &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} \\ x &= \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} \\ x &= \frac{10 \pm 8}{6}, \end{aligned}$$

y el conjunto solución es $S = \left\{3, \frac{1}{3}\right\}$.

c) Si $\alpha = 2$, la ecuación corresponde a $3x^2 + 2x + 3 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 36}}{6} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{-32}}{6} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{16 \cdot 2} i}{6} \\ x &= \frac{-2 \pm 4\sqrt{2} i}{6}. \end{aligned}$$

Así, el conjunto solución en este caso es $S = \left\{ -\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} i, -\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} i \right\}$.

3. ¿Cuál debe ser el valor de m para que el número complejo $z = (m - 2i)(2 + 4i)$ sea un real puro? ¿Y para que sea un imaginario puro? En ambos casos, indicar cuál es el valor de z.

Desarrollo: Escribiendo z en la forma estándar $a + bi$ se tiene:

$$z = (m - 2i)(2 + 4i) = (2m + 8) + 4(m - 1)i$$

- Para que z sea un real puro su parte imaginaria debe ser cero, es decir:

$$Im(z) = 0 \Leftrightarrow 4(m - 1) = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

  En este caso, como $m = 1$, entonces $z = 2 \cdot 1 + 8 + 4(1 - 1)i = 2 + 8 = 10$.

- Para que z sea un imaginario puro su parte real debe ser cero, es decir:

$$Re(z) = 0 \Leftrightarrow 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow 2m = -8 \Leftrightarrow m = -4$$

  En este caso, como $m = -4$, entonces $z = 2 \cdot (-4) + 8 + 4(-4 - 1)i = -20i$.

Por lo tanto, z es un real puro cuando m es igual a 1 y su valor es 10, y z es un imaginario puro cuando m es igual a -4 y su valor es $-20i$.

Foro 10
Matemática I (527113/527117)

1. Describir el conjunto de todos los puntos $P = (x, y)$ del plano, tales que:

   a) $x = -2$
   b) $y = 5$
   c) $x \geq 0$
   d) $xy > 0$
   e) $y < 0$
   f) $x = 0$

   Desarrollo: Cada conjunto dado puede describirse como sigue:

   a) La recta vertical ubicada a dos unidades de longitud a la izquierda del eje y.
   b) La recta horizontal ubicada 5 unidades de longitud por sobre el eje x.
   c) Todos los puntos del plano ubicados en el eje y o a la derecha de dicha recta.
   d) Primer y tercer cuadrante unidos.
   e) Todos los puntos del plano ubicados bajo el eje x.
   f) Eje y.

2. Determinar los valores de x_1 e y_3, sabiendo que $P_2 = (-2, 7)$ corresponde al punto medio entre $P_1 = (x_1, 3)$ y $P_3 = (-6, y_3)$.

   Desarrollo: Como P_2 es el punto medio entre los puntos P_1 y P_3, se tiene que

$$P_2 = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x_1 - 6}{2}, \frac{3 + y_3}{2}\right) = (-2, 7),$$

   de donde,

$$\frac{x_1 - 6}{2} = -2 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

   y

$$\frac{3 + y_3}{2} = 7 \Leftrightarrow y_3 = 11.$$

3. Utilizando distancia, verificar que los puntos:

   a) $A = (-3, 2)$, $B = (1, -2)$ y $C = (6, 3)$ determinan un triángulo rectángulo.

   b) $A = (-4, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (3, -1)$ y $D = (-2, -3)$ son los vértices de un cuadrado.

   Además, en el primer caso, calcular el área del triángulo.

   Desarrollo:

   a) Las longitudes de los lados del triángulo están dadas por:

   - $d(A, B) = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{32}$,
   - $d(B, C) = \sqrt{(6-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{50}$ y
   - $d(A, C) = \sqrt{(6+3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{82}$.

   Se observa entonces que A, B y C son los vértices de un triángulo rectángulo, en donde
   $$d(A, B)^2 + d(B, C)^2 = d(A, C)^2,$$
   $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son los catetos y la hipotenusa es $\overline{AC}$.

   Por otra parte, como los catetos del triángulo corresponden a la base y altura de este, se tiene que su área corresponde a
   $$A_T = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{50}}{2} = 20\,[u^2].$$

   b) Considerando que $d(A, B) = \sqrt{29} = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A)$ y que $d(A, C) = \sqrt{58} = d(B, D)$, se tiene que los puntos A, B, C y D determinan un cuadrilátero con lados iguales y con diagonales iguales, es decir, $ABCD$ es un cuadrado.

4. Utilizando distancia:

   a) Encontrar el punto con coordenadas de la forma $(2a, a)$ que está en el tercer cuadrante y a una distancia de 5 unidades de longitud del punto $P = (1, 3)$.

   b) Determinar los valores de k tales que la distancia entre $P = (k, 3)$ y $Q = (5, 2k)$ es mayor que $\sqrt{26}$.

Desarrollo:

a) Sea $A := (2a, a)$, como la distancia desde P hasta A es 5, se tiene que

$$\begin{aligned} d(A,P) &= 5 \\ \sqrt{(1-2a)^2 + (3-a)^2} &= 5 \\ 5a^2 - 10a + 10 &= 25 \\ (a-1)^2 &= 4 \\ a - 1 &= \pm 2, \end{aligned}$$

de donde $a = -1$ o $a = 3$.

Ahora, como el punto buscado está en el tercer cuadrante, $A = (-2, -1)$.

b) Como la distancia entre P y Q viene dada por $d(P,Q) = \sqrt{5k^2 - 22k + 34}$ y ella debe ser mayor que $\sqrt{26}$, se tiene la inecuación

$$\sqrt{5k^2 - 22k + 34} > \sqrt{26} \Leftrightarrow (5k-2)(k-4) > 0,$$

de donde se obtiene que $k \in \left]-\infty, \dfrac{2}{5}\right[\cup]4, +\infty[$.

5. Justificar por qué existe un punto en el plano en donde las rectas $L_1 : 3x + 4y = 5$ y $L_2 : 2x - y = 4$ se intersectan, luego, determinar dicho punto.

   Desarrollo: Dos rectas no se intersectan cuando ellas son rectas paralelas, es decir, cuando tienen igual pendiente. Aquí:

   - De la ecuación de L_1, si se depeja y en función de x,

     $$4y = -3x + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \tag{3}$$

     por lo que su pendiente es $m_1 = -\frac{3}{4}$.

   - De la ecuación de L_2, al despejar y en términos de x,

     $$2x - y = 4 \Leftrightarrow y = 2x - 4 \tag{4}$$

     por lo tanto, su pendiente es $m_2 = 2$.

   Como $m_1 \neq m_2$, se tiene que las rectas no son paralelas y por lo tanto, ellas se intersectan en algún punto. De (1) y (2), por igualación, se tiene que

   $$-\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 2x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{21}{11}$$

   y reemplazando en (2), se tiene que $y = -\frac{2}{11}$. Así, el punto en donde estas rectas se intersectan es

   $$P = \left(\frac{21}{11}, -\frac{2}{11}\right).$$

6. En cada caso, encontrar la ecuación de la recta que:

   a) pasa por el punto $(-2,4)$ y es paralela a la recta de ecuación $3x+2y=6$.

   b) pasa por el punto $(2,3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $y=-7$.

   c) pasa por el punto $(0,-5)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $y=-3x+5$.

   Desarrollo:

   a) En la ecuación de la recta dada, al despejar y en función de x se tiene que

   $$2y=-3x+6 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+3,$$

   en donde se observa que ella tiene pendiente $-\frac{3}{2}$. La recta paralela a la recta dada y que pasa por el punto $(-2,4)$, utilizando la ecuación punto pendiente, está determinada por

   $$y-4=-\frac{3}{2}(x-(-2)) \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+1.$$

   b) Como la recta $y=-7$ es horizontal (tiene pendiente cero), cualquier recta perpendicular a ella debe ser vertical, de entre todas ellas, la única que contiene al punto $(2,3)$ es la de ecuación $x=2$.

   c) Dado que dos rectas oblicuas son perpendiculares cuando el producto entre sus pendientes es igual a -1, en este caso como la recta dada tiene -3, la recta buscada tiene pendiente $\frac{1}{3}$.

   Así, la recta perpendicular a la de ecuación $y=-3x+5$ y que contiene al punto $(0,-5)$, tiene ecuación

   $$y-(-5)=\frac{1}{3}(x-0) \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+5.$$

Foro 11
Matemática I (527113/527117)

1. Para $A = (-2, 1)$ y $C = (2, 3)$, determinar el lugar geométrico de los puntos $B = (x, y)$ del plano tales que el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles.

   Desarrollo: El triángulo ABC es isósceles si B es tal que $d(B, A) = d(B, C)$, por lo que

   $$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2},$$

   elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes, se obtiene que

   $$4y = -8x + 8 \Leftrightarrow y = -2x + 2.$$

   De lo anterior, el lugar geométrico corresponde al conjunto

   $$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x + 2\} - \{(0, 2)\},$$

   en donde se ha descartado el punto medio entre A y B.

2. Mostrar que los puntos $P_1 = (-2, -2)$, $P_2 = (-1, 4)$ y $P_3 = (1, 16)$, son colineales:

   a) Calculando distancias.

   b) Por cálculo de pendientes.

   c) Verificando que la recta que contiene a P_1 y P_2, contiene también a P_3.

   Desarrollo:

   a) De la fórmula de la distancia entre dos puntos, se tiene que

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-1+2)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{37},$$
$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(1+1)^2 + (16-4)^2} = \sqrt{148} \text{ y}$$
$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(1+2)^2 + (16+2)^2} = \sqrt{333}.$$

   La suma de las distancias desde P_1 a P_2 y desde P_2 a P_3 es

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = \sqrt{37} + \sqrt{148} = 3\sqrt{37} = \sqrt{333}$$

   y como ella es igual a la distancia desde P_1 hasta P_3, entonces P_1, P_2 y P_3 son colineales.

   b) La pendiente determinada por P_1 y P_2 es

$$m_{12} = \frac{4-(-2)}{-1-(-2)} = 6$$

   y la pendiente determinar por P_2 y por P_3 es

$$m_{23} = \frac{16-4}{1-(-1)} = 6.$$

   Así, dado que $m_{12} = m_{23}$, necesariamente P_1, P_2 y P_3 son puntos colineales.

   c) Como $m_{12} = 6$, la recta L que pasa por P_1 y P_2 tiene ecuación:

$$y - (-2) = 6(x - (-2)) \Leftrightarrow y = 6x + 10$$

   Como P_3 satisface esta ecuación, pues $16 = 6 \cdot 1 + 10$, entonces se concluye que $P_3 \in L$ y por lo tanto, P_1, P_2 y P_3 son colineales.

3. Hallar el(los) valor(es) de k tal que la recta de ecuación $4x+3y=k$ y los ejes coordenados determinen un triángulo de área igual a 6 unidades cuadradas de longitud.

Desarrollo: La recta intersecta al eje y para $x=0$ en el punto $P_1 = \left(0, \dfrac{k}{3}\right)$ e intersecta al eje x cuando $y=0$ en punto $P_2 = \left(\dfrac{k}{4}, 0\right)$.

Así, si $\theta = (0,0)$, se tiene que

$$d(\theta, P_1) = \sqrt{\left(\frac{k}{3}\right)^2} = \frac{|k|}{3} \quad \text{y} \quad d(\theta, P_2) = \sqrt{\left(\frac{k}{4}\right)^2} = \frac{|k|}{4}.$$

Considerando a estos valores como la base y la altura del triangulo, se tiene entonces que el área de este es

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{|k|}{3} \cdot \frac{|k|}{4} \cdot = \frac{k^2}{24}$$

y dado que ella debe ser igual a 6, entonces $k = \pm 12$.

4. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1,-4)$, $(6,-5)$ y $(3,4)$.

Desarrollo: Si se considera a $C := (h,k)$ como el centro de la circunferencia, tal que este sea equidistante a los puntos $P_1 := (-1,4)$, $P_2 := (6,-5)$ y $P_3 := (3,4)$.

Así, igualando las distancias desde P_1 a C y P_2 a C, se obtiene

$$\sqrt{(h+1)^2+(k+4)^2} = \sqrt{(h-6)^2+(k+5)^2} \Leftrightarrow 7h-k=22. \tag{5}$$

Por otra parte, igualando las distancias desde P_2 a C y P_3 a C, se tiene

$$\sqrt{(h-6)^2+(k+5)^2} = \sqrt{(h-3)^2+(h-4)^2} \Leftrightarrow 6h-18k=36. \tag{6}$$

Luego, sumando la ecuación (1) multiplicada por -18 con la ecuación (2), se tiene que $h=3$ y reemplazando este valor en la ecuación (1), se obtiene $k=-1$.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-3)^2+(y+1)^2=25,$$

pues su centro está dado por $C=(3,-1)$ y su radio es $d(C,P_1)=5$.

5. Indicar justificadamente, si las siguientes ecuaciones representan o no una circunferencia y en caso afirmativo, según corresponda, determinar el centro y el radio.

   a) $x^2 - y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$,

   b) $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$,

   c) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$,

   d) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 21 = 0$.

   Desarrollo:

   a) Como el coeficiente que acompaña a x^2 es mayor que 0 y el que acompaña a y^2 es menor que 0, entonces, la ecuación no determina una circunferencia.

   b) Reescribiendo el lado izquierdo de la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 \\ &= (x-2)^2 + (y-4)^2. \end{aligned}$$

   De modo que, la ecuación quedaría como

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 0.$$

   La cual no representa una circunferencia, ya que su radio sería cero. Por lo tanto, representa al punto $(2, 4)$.

   c) Reescribiendo la parte izquierda de la igualdad, se tiene que esta es

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 \\ &= (x-3)^2 + (y-2)^2 - 4. \end{aligned}$$

   Así, la ecuación queda

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 2^2.$$

   Por lo tanto, esta representa una circunferencia de centro $C = (3, 2)$ y radio $r = 2$.

   d) Reescribiendo el lado izquierdo de la ecuación, como

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 8y + 21 &= x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 + 1 \\ &= (x-2)^2 + (y-4)^2 + 1, \end{aligned}$$

   esta queda,

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = -1.$$

   Lo cual, no representa una circunferencia, pues la suma de dos cantidades no negativas, no puede ser igual a un número negativo.

6. Considerando la circunferencia de ecuación $(x+3)^2+(y-2)^2=10$ y la recta L_1 de ecuación, $3y=-x+13$ tangente a ella, determinar la ecuación de la recta L_2, perpendicular a L_1 que pasa por el centro de la circunferencia.

Desarrollo: Al despejar y en la ecuación de la recta L_1, se tiene que

$$3y=-x+13 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3},$$

donde se puede identificar la pendiente de L_1 como $m_1=-\dfrac{1}{3}$.

Por otra parte, como dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1, entonces la pendiente de la recta L_2 necesariamente debe ser $m_2=3$. De modo que, como el centro de la circunferencia pertenece a la recta L_2 e identificándolo como el punto $(-3,2)$, entonces la ecuación de la recta es

$$y-2=3(x-(-3)) \Leftrightarrow y=3x+11.$$

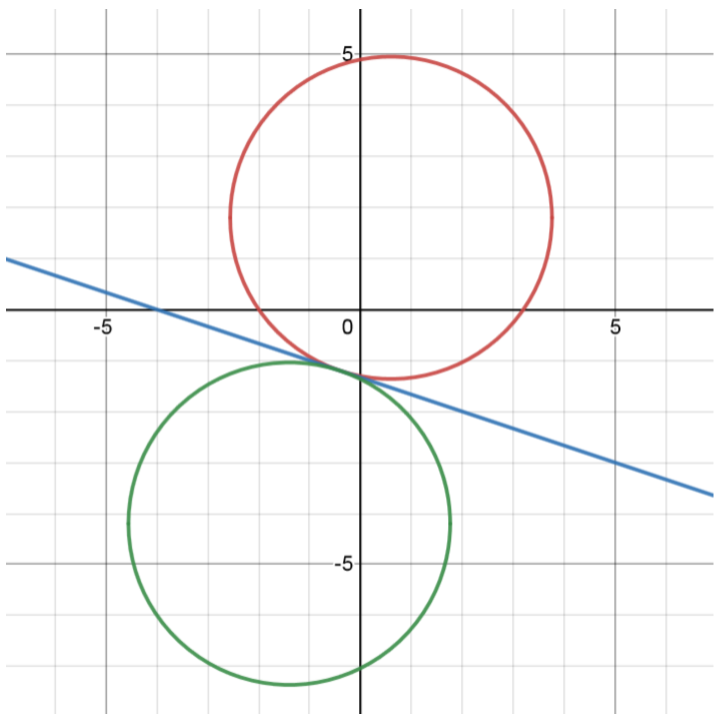
1. Determinar la ecuación de una de las circunferencias de radio $\sqrt{10}$ cuyo centro está sobre la recta $y = 3x$ y es tangente a la recta $x + 3y + 4 = 0$.

   Desarrollo: Utilizando la fórmula de la distancia entre un punto y una recta, se tiene que la distancia entre el centro $(h, k) = (h, 3h)$ de *la* circunferencia y la tangente es

$$\frac{|1 \cdot h + 3 \cdot 3h + 4|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|h + 9h + 4|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

   De la igualdad anterior, **una** posibilidad es que $10h + 4 = 10$, de donde $h = \dfrac{3}{5}$ y $k = \dfrac{9}{5}$ son las coordenadas del centro y la ecuación de la circunferencia es

$$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{5}\right)^2 = 10.$$



   La otra posibilidad es que $10h + 4 = -10$, de donde las coordenadas del centro son $\left(-\dfrac{7}{5}, -\dfrac{21}{5}\right)$ y la ecuación de la **otra** circunferencia que cumple las condiciones dadas es

$$\left(x + \frac{7}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{21}{5}\right)^2 = 10.$$

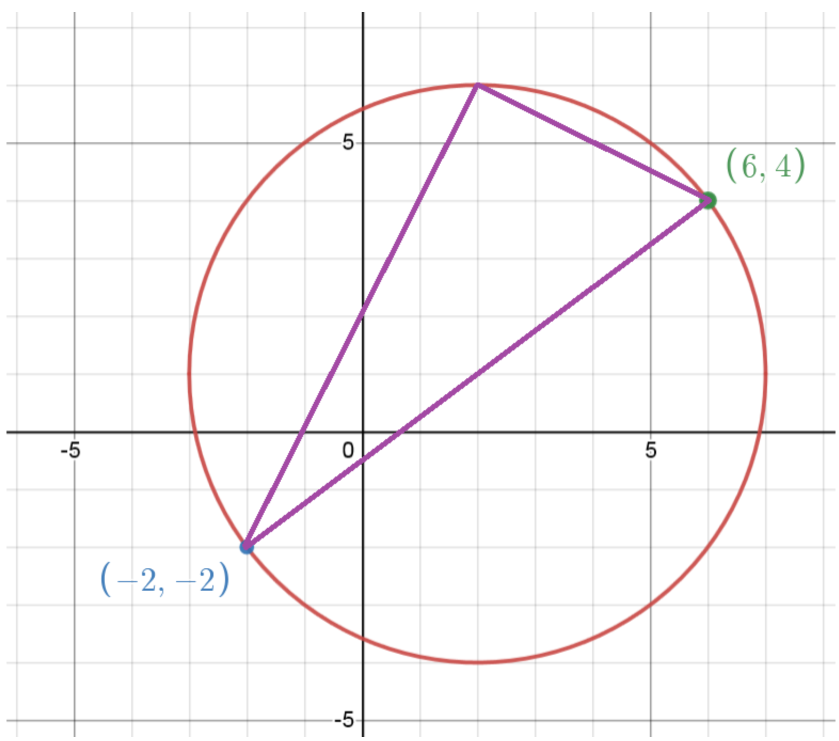
2. Identificar el conjunto de todos los puntos del plano tales que las rectas que los unen a los puntos $(-2,-2)$ y $(6,4)$ son perpendiculares.

   Desarrollo: Sean $A := (-2,-2)$, $B := (6,4)$ y $P := (x,y)$ un punto en el conjunto indicado.

   La pendiente de la recta que contiene a A y a P es $m_A = \dfrac{y+2}{x+2}$ y la pendiente de la recta que contiene a B y a P es $m_B = \dfrac{y-4}{x-6}$, como estas dos rectas anteriores son perpendiculares, se tiene

$$\begin{aligned} m_A \cdot m_B &= -1 \\ \frac{y+2}{x+2} \cdot \frac{y-4}{x-6} &= -1 \\ y^2 - 2y - 8 &= -x^2 + 4x + 12 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 5^2, \end{aligned}$$

   y por lo tanto, el lugar geométrico de todos los puntos tales que las rectas que los unen a $(-2,-2)$ y a $(6,4)$ son perpendiculares, corresponde a la circunferencia de centro en $(2,1)$ y radio 5 exceptuando a los puntos A y B.



3. Determinar el foco, la directriz y el eje de simetría de la parábola

$$3y^2 - 4x + 6y + 11 = 0.$$

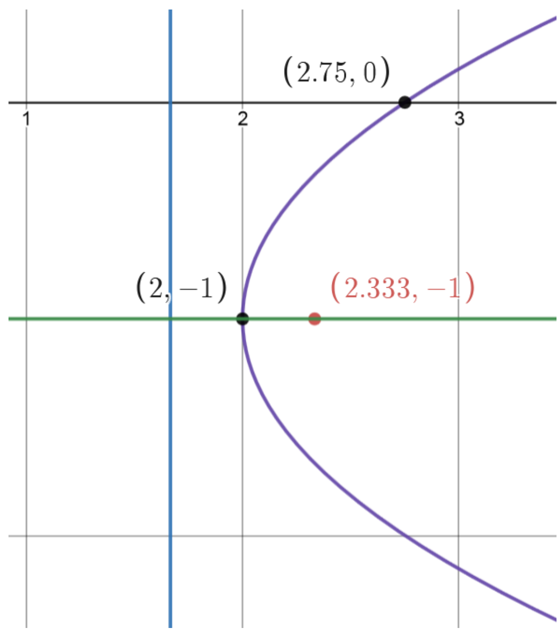
Además, si existen, encontrar los puntos de intersección con los ejes coordenados.

Desarrollo: La ecuación indicada se puede reescribir de la manera siguiente

$$(y+1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{3}(x-2),$$

en donde se observan los valores $h = 2$, $k = -1$ y $p = \frac{1}{3}$, por lo que la parábola se abre hacia la derecha pues $p > 0$, tiene vértice $V = (h, k) = (2, -1)$ y posee:

- Foco en el punto $F = (h + p, k) = \left(\frac{7}{3}, -1\right)$,
- directriz de ecuación $x = h - p \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ y
- eje de simetría, la recta $y = k \Leftrightarrow y = -1$.



La intersección con el eje x se da al reemplazar $y = 0$ en la ecuación,

$$\frac{4}{3}(x-2) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{11}{4},$$

por lo tanto, la parábola intersecta al eje x en el punto $\left(\frac{11}{4}, 0\right)$ y como al reemplazar $x = 0$ en la ecuación, se obtiene que

$$(y+1)^2 = -\frac{8}{3},$$

entonces la parábola no intersecta al eje y.

4. Encontrar los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que la recta $y = x + k$ y la parábola $y = (x-2)^2 + 1$:

   a) no se intersecten.

   b) sean tangentes.

   c) tengan dos puntos en común.

   Desarrollo: De las dos ecuaciones, al igualar y para encontrar el(los) punto(s) de intersección, se tiene

$$x + k = (x-2)^2 + 1$$
$$x^2 - 5x + (5-k) = 0.$$

   El discriminante de esta ecuación es $\Delta = 25 - 4(5-k) = 4k+5$, por lo tanto:

   a) Las curvas no se intersectan, cuando la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$ $(\Delta < 0)$,

$$4k + 5 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k < -\frac{5}{4}.$$

   b) Las curvas son tangentes, cuando la ecuación cuadrática tiene una única solución $(\Delta = 0)$,

$$4k + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{5}{4}.$$

   c) Las curvas tienen dos puntos (distintos) en común, cuando la ecuación tiene dos soluciones $(\Delta > 0)$,

$$4k + 5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > -\frac{5}{4}.$$

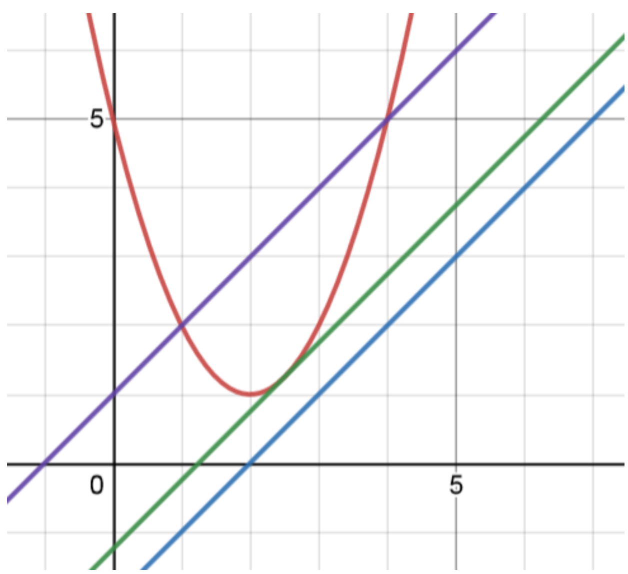


Gráfico de la parábola y las rectas obtenidas para $k = -2$, $k = -\frac{5}{4}$ y $k = 1$.

5. Una circunferencia tiene centro en $(4, -1)$ y pasa por el foco de la parábola de ecuación $x^2 + 16y = 0$. Verificar que dicha circunferencia es tangente a la directriz de la parábola.

   Desarrollo: La ecuación de la parábola puede ser reescrita como

   $$x^2 = -4 \cdot 4y,$$

   de donde $h = 0$, $k = 0$ y $p = -4$, por lo que ella tiene foco $F = (h, k + p) = (0, -4)$ y directriz de ecuación

   $$y = k - p \Leftrightarrow y = 4.$$

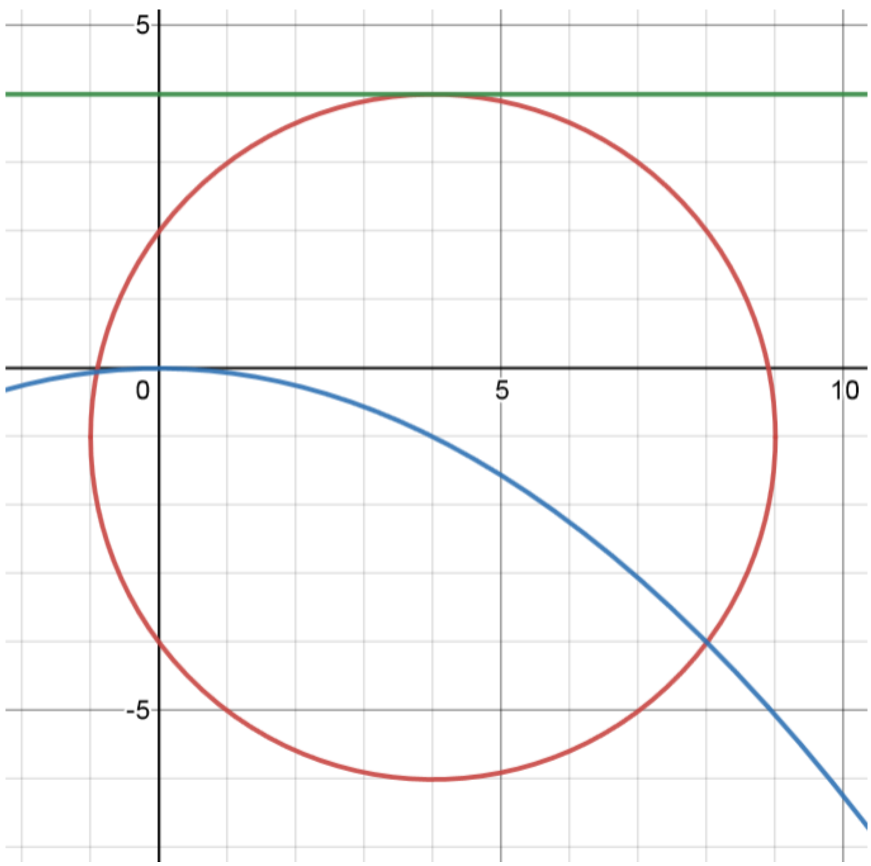
   Como la circunferencia pasa por F y tiene centro en $C = (4, -1)$, entonces su radio es $d(F, C) = 5$ y por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

   $$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

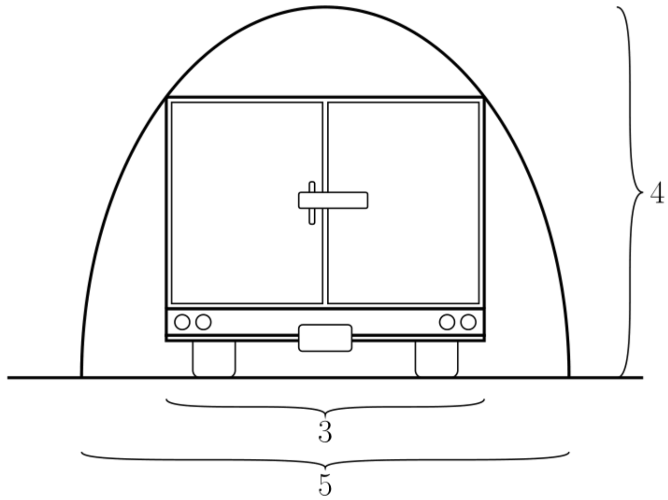
   Ahora para determinar la intersección entre la directriz y la circunferencia, como al reemplazar $y = 4$ en la ecuación anterior, se tiene que

   $$(x - 4)^2 + (4 + 1)^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 4)^2 = 0.$$

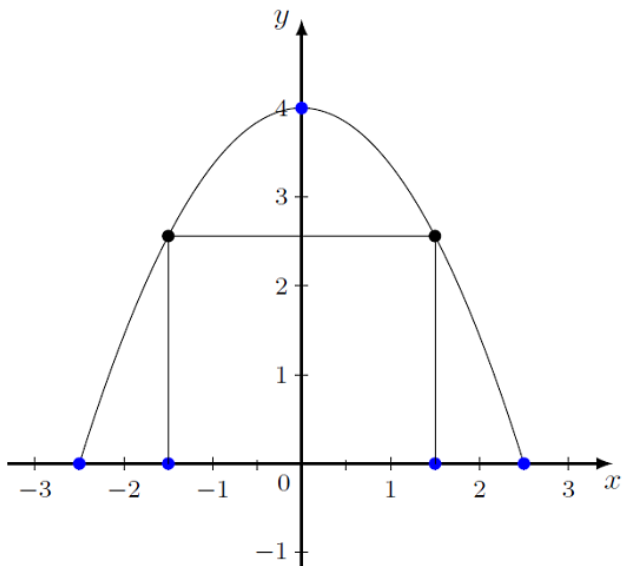
   Como esta última ecuación tiene una única solución, $x = 4$, la directriz de la parábola y la circunferencia se intersectan solamente en un punto y por lo tanto, son tangentes.



6. Un túnel en una carretera tiene forma de arco parábolico con 5 metros de ancho y 4 metros de altura. ¿Cuál es la altura máxima que puede tener un vehículo de 3 metros de ancho para poder pasar por el túnel?



Desarrollo: Conviene graficar el arco parabólico en el plano cartesiano. Como él se abre hacia abajo y tiene 4 metros de altura, se considera su vértice en $(0,4)$, de modo que su eje de simetría sea el eje y y el suelo se encuentre en el eje x. Además, como tiene 5 metros de ancho, las intersecciones del arco parabólico con el eje x se encontrarán en los puntos $P_1 = (-2.5, 0)$ y $P_2 = (2.5, 0)$. Por otra parte, como el vehículo tiene 3 metros de ancho, se ubican sus extremos en $(-1.5, 0)$ y $(1.5, 0)$:



Dado el vértice, la ecuación de la parábola será de la forma

$$x^2 = 4p(y-4),$$

y dado que $P_2 = (2.5, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ pertenece a la parábola, se tiene

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4p\,(0-4) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{25}{4} = -16p \quad \Leftrightarrow \quad p = -\frac{25}{4 \cdot 16}.$$

De este modo, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = -\frac{25}{16}(y-4)$$

y la altura solicitada corresponde al valor de y obtenido al evaluar $x = \pm 1.5 = \pm\frac{3}{2}$ en esta última igualdad:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{25}{16}(y-4) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{9}{4} \cdot \frac{16}{25} = y - 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4 - \frac{24}{25} = \frac{64}{25} = 2.56.$$

Por lo tanto, el vehículo debe medir menos de 2 metros y 56 centímetros de altura para poder pasar por el túnel.

Última actualización: **2 de mayo de 2024**

Prof. Elvis Gavilán
egavilan@udec.cl