Recopilación de ejercicios resueltos para Cálculo en una variable (527119)

© **Prof. E. Gavilán G.**
http://www.udec.cl/~egavilan

Concepción, 31 de enero de 2025

Índice

1. Límite y continuidad **5**

2. La derivada **39**

3. Aplicaciones de la derivada **73**
3.1. Variaciones relacionadas 73
3.2. Gráficos 89
3.3. Optimización (Problemas de máximos y mínimos) 99
3.4. Regla de L'Hôpital 121

4. La integral **131**
4.1. Teorema Fundamental del Cálculo 131
4.2. Cálculo de integrales indefinidas 139
4.3. Cálculo de integrales definidas 155
4.4. Integrales impropias 161

5. Aplicaciones de la integral **167**
5.1. Cálculo de áreas planas 167
5.2. Cálculo de volúmenes por secciones transversales 179
5.3. Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución 187
5.4. Otras aplicaciones 197
5.4.1. Longitud de arco 197
5.4.2. Área de superficie de revolución 201
5.4.3. Crecimiento y decrecimiento exponencial 205
5.4.4. Ley de enfriamiento de Newton 209
5.4.5. Área en coordenadas polares 211

Última actualización: **3 de marzo de 2025**

1. Límite y continuidad

1.1. Utilizar la definición $\varepsilon - \delta$ de límite para demostrar que

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+4) = 10$

b) $\lim\limits_{x\to 3}(5-4x) = -7$

Solución:

a) Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Se debe encontrar $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifique

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x+4)-10| < \varepsilon.$$

Basta elegir $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, pues $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x+4)-10| = |3x-6| = 3\,|x-2| \overset{(1)}{<} 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 2}(3x+4) = 10$.

(1) Como $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, entonces $|x-2| < \delta \Leftrightarrow |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

b) Sea $\varepsilon > 0$. Al escoger $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$|(5-4x)+7| < \varepsilon$$

cada vez que $0 < |x-3| < \delta$, pues con esta elección se tiene que

$$|x-3| < \delta \Leftrightarrow 4\,|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |(5-4x)+7| < \varepsilon$$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 3}(5-4x) = -7$.

1.2. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$, demostrar que $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$.

Solución: Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$, por definición, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que para todo x:

- Si $0 < |x - x_0| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y
- si $0 < |x - x_0| < \delta_2$, entonces $|g(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Sea $\delta := \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$.

Si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces se tiene que $0 < |x - x_0| < \delta_1$ y $0 < |x - x_0| < \delta_2$, por lo tanto

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De lo anterior, considerando que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| &= |f(x) + g(x) - L_1 - L_2| \\ &= |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|, \end{aligned}$$

se tiene que para todo x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$$

y entonces $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$.

Observación: Este resultado en conjunto con otros 3 parecidos son conocidos como el **Álgebra de límites**.

1.3. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x}{2x-1} = 4$.

Solución: Sea $\varepsilon > 0$. Se debe encontrar $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ se verifique

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{4x}{2x-1} - 4\right| < \varepsilon.$$

Basta elegir $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{\varepsilon}{8}\right\}$, pues $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, se tiene que

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{4x}{2x-1} - 4\right| = \frac{4|x-1|}{|2x-1|} \overset{(1)}{<} 8|x-1| \overset{(2)}{<} \frac{8\varepsilon}{8} = \varepsilon.$$

(1) Como $\delta \leq \dfrac{1}{4}$, entonces $|x-1| < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < 2x-1 < \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{|2x-1|} < 2$ y

(2) como $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{8}$, entonces $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{8}$.

1.4. Demostrar que $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3}{x^3-1} = -2$.

Solución: Sea $\varepsilon > 0$.

Se debe encontrar $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ se verifique

$$0 < |x+1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2+3}{x^3-1} + 2 \right| < \varepsilon.$$

Basta elegir $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{9\varepsilon}{56}\right\}$, pues $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, se tiene que

$$0 < |x+1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2+3}{x^3-1} + 2 \right| = \left| \frac{(x+1)(2x^2-x+1)}{x^3-1} \right| \overset{(1)}{<} \frac{56}{9}|x+1| \overset{(2)}{<} \frac{56}{9} \cdot \frac{9\varepsilon}{56} = \varepsilon.$$

(1) Como $\delta \leq \dfrac{1}{2}$, entonces $|x+1| < \dfrac{1}{2}$, de donde $2 < 2x^2 - x + 1 < 7$ y $\dfrac{1}{|x^3-1|} < \dfrac{8}{9}$.

(2) Como $\delta \leq \dfrac{9\varepsilon}{56}$, entonces $|x+1| < \dfrac{9\varepsilon}{56}$.

1.5. Utilizar la definición $\varepsilon - \delta$ de límite para demostrar que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

Solución: Como $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, es suficiente probar que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, al considerar $\delta = \text{mín}\,\{1, \varepsilon\}$, para todo x tal que $0 < |x-1| < \delta$, se tiene que

$$\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x-1|}{|x+1|} \leq |x-1| < \delta \leq \varepsilon,$$

en donde la primera desigualdad se debe al hecho que $x > 0$ porque $\delta \leq 1$.

1.6. Decidir justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{8}{x-4}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x}{x-4}-\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8}{x-4}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+6x-7\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+5x-6\right)}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x-4\right)}$

d) $\dfrac{x^2-16}{x-4}=x+4$

e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)$

Solución:

a) **Falsa:** El límite de una resta corresponde a la resta de los (dos) límites solamente cuando cada uno de ellos existe (por separado).

b) **Falsa:** El límite de un cuociente corresponde al cuociente de los límites solamente cuando ambos existen y el límite del denominador es distinto de 0.

c) **Verdadera:** Es aplicable lo del límite de un cuociente.

d) **Falsa:** La expresión del lado izquierdo no está definida para $x=4$ y la del lado derecho sí.

e) **Verdadera:** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)\,\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)$

1.7. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+4) = 10$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{8}{x-4}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6}$

f) $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{2t+4}{12-3t^2}$

g) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$

h) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-25}$

i) $\lim\limits_{y\to 3}\dfrac{y^2+y-12}{y^3-10y+3}$

j) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{2^{2t}+2^t-20}{2^t-4}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{|x|}}{x^2+\sqrt[4]{|x|}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+4) = 3\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}+4 = 3\cdot 2+4 = 10$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = \lim\limits_{x\to 4}(x+4) = \lim\limits_{x\to 4}x + \lim\limits_{x\to 4}4 = 4+4 = 8$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{8}{x-4}\right) = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-8}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = \lim\limits_{x\to 4}2 = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x-4\right)} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

$e)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+7)\cancel{(x-1)}}{(x+6)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{x+7}{x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+6)}=\frac{8}{7}$

$f)$ $\displaystyle\lim_{t\to -2}\frac{2t+4}{12-3t^2}=\lim_{t\to -2}\frac{2(t+2)}{3(4-t^2)}=-\frac{2}{3}\lim_{t\to -2}\frac{t+2}{(t+2)(t-2)}=-\frac{2}{3}\lim_{t\to -2}\frac{1}{t-2}=\frac{1}{6}$

$g)$ $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x+2}=\lim_{x\to -2}\left[\left(x^2+4\right)(x-2)\right]=-32$

$h)$ $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-9x-5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x+1)(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x+1}{x+5}=\frac{11}{10}$

$i)$ Dado que

$$\begin{aligned} y^3-10y+3 &= y^3-27-10y+30\\ &= (y-3)(y^2+3y+9)-10(y-3)\\ &= (y-3)(y^2+3y-1), \end{aligned}$$

se tiene que

$$\lim_{y\to 3}\frac{y^2+y-12}{y^3-10y+3}=\lim_{y\to 3}\frac{(y+4)(y-3)}{(y-3)(y^2+3y-1)}=\lim_{y\to 3}\frac{y+4}{y^2+3y-1}=\frac{7}{17}$$

$j)$ $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{2^{2t}+2^t-20}{2^t-4}=\lim_{t\to 2}\frac{(2^t)^2+2^t-20}{2^t-4}=\lim_{t\to 2}\frac{(2^t+5)(2^t-4)}{2^t-4}=9$

$k)$ Para cualquier $x\neq 0$, se tiene que

$$0\leq\frac{\sqrt{|x|}}{x^2+\sqrt[4]{|x|}}\leq\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt[4]{|x|}}=\sqrt[4]{|x|}$$

y como $\lim\limits_{x\to 0}0=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[4]{|x|}=0$, por Teorema del sandwich se obtiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}}{x^2+\sqrt[4]{|x|}}=0$$

1.8. Determinar, si es posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1}$

Solución:

a) Como $\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$, se tiene que

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1.$$

`https://www.desmos.com/calculator/ka6zscibjc`

b) Del cambio de variable $z^3=1+x$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} &= \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^3-1}\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{(z-1)(z^2+z+1)}\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2+z+1}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

`https://www.desmos.com/calculator/fapog4frpt`

c) Al considerar la sustitución $y^6=1+x$, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}$$

`https://www.desmos.com/calculator/p4d2yzhdbc`

d) De $y^{12}=1+x$, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y+1)(y^2+1)}{y^2+y+1}=\frac{4}{3}$$

`https://www.desmos.com/calculator/5ko2pgerox`

1.9. Determinar el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+36}-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3}}{x^2+x-2}$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

`https://www.desmos.com/calculator/4sxuxtdtpu`

b) Para $x \neq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+36}-6} &= \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+36}-6}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\cdot\frac{\sqrt{x+36}+6}{\sqrt{x+36}+6}\\
&= \frac{\sqrt{x+36}+6}{\sqrt{x+1}+1}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+36}-6} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+36}+6}{\sqrt{x+1}+1} = 6.$

`https://www.desmos.com/calculator/uxkssc6zmi`

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3}}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3}}{x^2+x-2}\cdot\frac{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{3}}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x+2)\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

`https://www.desmos.com/calculator/qf5ftl7lxd`

1.10. Encontrar valores reales para a y b de modo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+b}-1}{x} = 1.$$

Solución: Dado que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{ax+b} = \sqrt{b},$$

entonces para que el numerador tienda a 0, debe tenerse que $b = 1$.

Por otra parte, como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}{x(\sqrt{ax+1}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{ax+1-1}{x(\sqrt{ax+1}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{a}{\sqrt{ax+1}+1} \\
&= \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, para que el límite exista, debe tenerse también que $a = 2$.

`https://www.desmos.com/calculator/xcbav2q2t5`

1.11. Evaluar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{2x-1}}{2^{4x-3}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{2x-1}}{2^{3x-3}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2-3x+8}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^5-3x+8}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4+2x^3-1}{2x^2-3x+8}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{2x-1}}{2^{4x-3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3^2)^x 3^{-1}}{(2^4)^x 2^{-3}} = \dfrac{8}{3} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{9}{16}\right)^x = \dfrac{8}{3} \cdot 0 = 0$

`https://www.desmos.com/calculator/6zj15dkjqg`

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{2x-1}}{2^{3x-3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3^2)^x 3^{-1}}{(2^3)^x 2^{-3}} = \dfrac{8}{3} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{9}{8}\right)^x = +\infty$

`https://www.desmos.com/calculator/maged4ubid`

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2-3x+8} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(3+2/x-1/x^2\right)}{x^2\left(2-3/x+8/x^2\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+2/x-1/x^2}{2-3/x+8/x^2} = \dfrac{3}{2}$

`https://www.desmos.com/calculator/btwarzr1ua`

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^5-3x+8} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3/x^3+2/x^4-1/x^5}{2-3/x^4+8/x^5} = \dfrac{0}{2} = 0$

`https://www.desmos.com/calculator/u8t4yr3t3d`

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4+2x^3-1}{2x^2-3x+8} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(3+2/x-1/x^4\right)}{2-3/x+8/x^2} = +\infty$

`https://www.desmos.com/calculator/4y0n8f5tul`

1.12. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+8x}-x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+x^3}-\sqrt{x^6-x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)$

Solución:

a) Dado que

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+8x}-x &= \left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+8x}+x}{\sqrt{x^2+8x}+x}\\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+8x}+x\right)}{\sqrt{x^2+8x}+x}\\ &= \frac{x^2+8x-x^2}{\sqrt{x^2+8x}+x}\\ &= \frac{8x}{\sqrt{x^2+8x}+x}\end{aligned}$$

se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+8x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{\sqrt{x^2+8x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\dfrac{8}{x}}+1}=4$$

`https://www.desmos.com/calculator/stexv0i4ie`

b) Como $\sqrt{x^6+x^3}-\sqrt{x^6-x^2}=\dfrac{x^3+x^2}{\sqrt{x^6+x^3}+\sqrt{x^6-x^2}}$, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+x^3}-\sqrt{x^6-x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x^3}+\sqrt{1-1/x^4}}=\frac{1}{2}$$

`https://www.desmos.com/calculator/rxx3jkf5pj`

c) Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+5/x}{2+7/x}=\dfrac{3}{2}$, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{2x+7}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)=\frac{3}{2}\cdot 4=6.$$

`https://www.desmos.com/calculator/stt7yrx3fv`

1.13. Evaluar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x-1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x-1}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+4/x}{\sqrt{2x^2-5}/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+4/x}{\sqrt{2-5/x^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

`https://www.desmos.com/calculator/xidt8qqanm`

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x/|x|+4/|x|}{\sqrt{2x^2-5}/|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3-4/x}{\sqrt{2-5/x^2}} = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

`https://www.desmos.com/calculator/xidt8qqanm`

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6/x-5}{\sqrt{1-5/x+6/x^2}+1} = -\dfrac{5}{2}$

`https://www.desmos.com/calculator/ufp6p9g0kp`

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-|x|\sqrt{1+2/x-1/x^2}\right) = -\infty$

`https://www.desmos.com/calculator/c2c7t5bbrk`

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x-2}{1+\sqrt{1+2/x-1/x^2}} = -1$

`https://www.desmos.com/calculator/c2c7t5bbrk`

1.14. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + x\cos(x)}{2x^3+5}$.

Solución: Cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Además, si $x > 0$, se tiene que

$$x^3 - x \leq x^3 + x\cos(x) \leq x^3 + x \quad \text{y} \quad 2x^3 + 5 > 0;$$

por lo tanto,

$$\frac{x^3-1}{2x^3+5} \leq \frac{x^3 + x\cos(x)}{2x^3+5} \leq \frac{x^3+1}{2x^3+5}$$

y como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-x}{2x^3+5} = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x}{2x^3+5}$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x\cos(x)}{2x^3+5} = \frac{1}{2}.$$

`https://www.desmos.com/calculator/q4ratfo9rz`

1.15. Determinar el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(2x)}{\cos(x)-\sin(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos(x)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(2x)}{\cos(x)-\sin(x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos(x)-\sin(x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\cos(x)+\sin(x)) = \sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sin(4x)}{4x} = 4\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{4x} = 4\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y)}{y} = 4$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(4x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12x\sin(3x)}{12x\sin(4x)} = \dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x\sin(3x)}{3x\sin(4x)} = \dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(4x)}{4x}} = \dfrac{3}{4}$

d) Dado que

$$\frac{1-2\cos(x)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{1-2\cos(x)}{x-\frac{\pi}{3}}}{\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}$$

y cuando x tiende a $\frac{\pi}{3}$, la fracción $\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$ tiende a 1, se tiene que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos(x)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos(x)}{x-\frac{\pi}{3}}.$$

Por otra parte, considerando $y = x-\frac{\pi}{3}$, se tiene

$$\frac{1-2\cos(x)}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{1-2\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)}{y} = \frac{1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(y)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(y)}{y}$$

y por lo tanto,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos(x)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(y)}{y} + \sqrt{3}\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 0+\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

1.16. Justificando adecuadamente, indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

b) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

c) Si no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y tampoco existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) + g(x)]$ no existe.

d) Si existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ no existe, $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)]$ no existe.

Solución:

a) **Verdadera:** El límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no se acerca a ningún número real cuando $x \to 0$ pues el denominador tiende a 0 y el numerador no.

b) **Falsa:** Si $f(x) = \cos(x) - 1$ y $g(x) = x$, se tiene que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

c) **Falsa:** Para $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ -1 & , \quad x > 0 \end{cases}$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \text{ (existe límite)}$$

y que los límites $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existen.

d) **Verdadera:** Dado que

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x) + f(x) - f(x) \\ &= [f(x) + g(x)] - f(x) \end{aligned}$$

si existiera $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)]$, entonces necesariamente (por Álgebra de límites) debería ocurrir que

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] - \lim_{x\to x_0} f(x)$$

y como esto implica la existencia de $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, lo cual contradice la hipótesis, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)]$ no existe.

1.17. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la función definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{x}+2 & , \quad x<-1 \\ 2 & , \quad x=-1 \\ x^3-1 & , \quad x>-1 \end{cases}$

a) Analizar la existencia de los límites $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

b) Verificar que f no es continua en $x_0=-1$ e indicar el tipo de discontinuidad.

c) Evaluar $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}-1}$.

Solución:

a) Para el primer límite, como

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left\{x^2-\frac{1}{x}+2\right\}=4$$

y

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left\{x^3-1\right\}=-2,$$

se tiene que los límites laterales no coinciden y por tanto, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ no existe.

`https://www.desmos.com/calculator/pppfcwg62m`

Por otra parte, para el segundo límite, se tiene que

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\left(x^3-1\right)=0.$$

b) De la parte anterior, como $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ no existe, f no es continua en $x_0=-1$ y la discontinuidad es inevitable.

c) Dado que *cerca* de $x=1$, $f(x)=x^3-1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} \\
&= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x}-1} \\
&= \lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x}-1} \\
&= \lim_{x\to1}\left\{(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)\right\} \\
&= 6
\end{aligned}$$

`https://www.desmos.com/calculator/nfll19igru`

1.18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}}{x-3} & , \quad x \neq 3 \\ 1 & , \quad x = 3 \end{cases}$$

a) ¿Qué significa que f sea continua en x_0?

b) Evaluar $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

c) Determinar si f es continua en $x_0 = 3$.

Solución:

a) Significa que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Como para $x \neq 3$, se tiene que

$$\frac{1 - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}}{x-3} \cdot \frac{1 + \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}}{1 + \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}} = \frac{\dfrac{x+1}{x+1} - \dfrac{4}{x+1}}{(x-3)\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}\right)} = \frac{\dfrac{x-3}{x+1}}{(x-3)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}} + 1\right)},$$

entonces $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x+1)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}} + 1\right)} = \dfrac{1}{8}$.

c) No, ya que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{1}{8}$ y $f(3) = 1$.

`https://www.desmos.com/calculator/2ptfqpzjba`

1.19. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-4x+3}} & , \quad x < 1 \\[2ex] 2 & , \quad x = 1 \\[2ex] \dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} - 6 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Definir, si es posible, $f(1)$ de modo que f resulte continua en $x_0 = 1$.

Solución: Como

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{\sqrt{(x-1)(x-3)}} = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x+1}{x-3} \sqrt{(x-1)(x-3)} \right) = 0$$

y

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} - 6 = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} - 6 = 0$$

se tiene entonces que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

y por lo tanto, como este valor no coincide con $f(1) = 2$, f no es continua en $x_0 = 1$.

Para que f sea continua en $x_0 = 1$, dado que la discontinuidad es evitable, debe (re)definirse $f(1) = 0$.

`https://www.desmos.com/calculator/qfd17cbl7o`

1.20. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \quad x \leq a \\ 2x^2 + 5x - 4 & , \quad x > a \end{cases}$$

sea continua.

Solución: Como las funciones polinomiales son continuas, entonces f es continua para cada $x \neq a$.

Para $x = a$, como

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = a^3 + 2 \quad y \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = 2a^2 + 5a - 4,$$

para que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y en este caso, además coincida con $f(a)$, a debe ser tal que

$$a^3 + 2 = 2a^2 + 5a - 4,$$

de donde

$$\begin{aligned} a^3 - 2a^2 - 5a + 6 &= 0 \\ a^3 - a^2 - \left(a^2 + 5a - 6\right) &= 0 \\ a^2(a-1) - (a+6)(a-1) &= 0 \\ (a-1)(a^2 - a - 6) &= 0 \\ (a+2)(a-1)(a-3) &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto los valores son -2, 1 y 3.

`https://www.desmos.com/calculator/pxnt0hf1tq`

`https://www.desmos.com/calculator/2zz3febyrj`

`https://www.desmos.com/calculator/cwgar1wxju`

1.21. Decidir justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$.

b) Si $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)]$ existe entonces él debe ser igual a $f(x_0)g(x_0)$.

c) Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

d) Si $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe c entre 1 y 3, tal que $f(c) = 0$.

e) Si f es continua en $[-1, 1]$, $f(-1) = 4$ y $f(1) = 3$, entonces existe x_0 tal que $|x_0| < 1$ y $f(x_0) = \pi$.

Solución:

a) **Falsa:** Como el límite lateral $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ no existe, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$ tampoco.

b) **Falsa:** Para $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq 0 \\ -1 & , \quad x > 0 \end{cases}$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} [f(x)g(x)] = -1$$

y este valor no coincide con $f(0)g(0) = 1$.

c) **Falsa:** Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$, se tiene que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ y que

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to +\infty} \left[x^2 - x\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$$

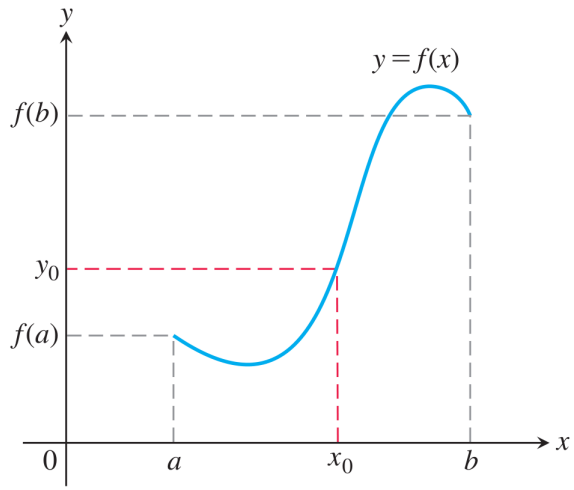
d) **Falsa:** Para $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 2 \\ -1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$, se tiene que $f(1) > 0$, $f(3) < 0$ y f nunca toma el valor 0.

e) **Verdadera:** Como f es continua en $[-1, 1]$ y $\pi \in \,]f(1), f(-1)[\, = \,]3, 4[$, entonces por el Teorema del valor intermedio, existe $x_0 \in \,]-1, 1[$ tal que $f(x_0) = \pi$.

Teorema del valor intermedio: Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y si y_0 es cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces

$$y_0 = f(x_0)$$

para algún $x_0 \in \,]a, b[$.



1.22. Verificar que la ecuación

$$2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$$

tiene exactamente cuatro raíces.

Solución: Dado que

$$f(-4) > 0,\ f(0) < 0,\ f(1) > 0,\ f\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \ \text{ y } \ f(2) > 0$$

por el Teorema de valor intermedio, f posee al menos una raíz en cada uno de los intervalos siguientes

$$]-4, 0[\,,\ ]0, 1[\,,\ \left]1, \frac{3}{2}\right[\ \text{ y } \ \left]\frac{3}{2}, 2\right[$$

y como un polinomio de grado 4 no puede tener más de 4 ceros, se concluye que la ecuación tiene exactamente cuatro raíces (reales y distintas).

`https://www.desmos.com/calculator/ofumxabw9h`

1.23. Para las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = x \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x \neq 2 \\ 1 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

verificar que $\lim\limits_{x \to 2} g(f(x)) \neq g\left(\lim\limits_{x \to 2} f(x)\right)$.

Solución: Como para $x \neq 2$, $g(f(x)) = g(x) = 3$ se tiene que

$$\lim_{x \to 2} g(f(x)) = 3$$

y por otra parte,

$$g\left(\lim_{x \to 2} f(x)\right) = g(2) = 1.$$

Observación: La igualdad entre dos límites como los de este ejercicio,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$$

está asegurada (por un teorema) cuando g es continua en L y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

1.24. Una función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|+2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{3x^2+3}{x+1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Explicar por qué f es una función continua (para $x < 0$ y para $x > 2$).

b) ¿Es posible definir f en el intervalo $[0, 2]$ de modo que la función resultante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea continua y en el intervalo $[0, 2]$ su gráfica corresponda a una recta? Si la respuesta es afirmativa, dar una fórmula para f en $[0, 2]$.

Solución:

a) Para $x < 0$, la función f puede escribirse como $f = g \circ h$, donde $h(x) = |x|$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$ y como la composición de funciones continuas es continua, f es continua. Para $x > 2$, f corresponde al cuociente de dos polinomios con denominador no nulo, luego ella es continua.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{|x|+2} = \sqrt{2}$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^2+3}{x+1} = 5.$

Al definir $f(x) = mx + n$ en $[0, 2]$, se tiene que:

f es continua en $x_0 = 0$ si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (mx + n) = n = \sqrt{2} = f(0)$.

f es continua en $x_0 = 2$ si $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (mx + n) = 2m + n = 5 = f(2)$.

De lo anterior, si

$$m = \frac{5-\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad n = \sqrt{2},$$

se tiene que f resulta continua en todo $\mathbb{R}$.

La fórmula para $x \in [0, 2]$ dada por

$$f(x) = \frac{5-\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2},$$

determina al gráfico de f como un segmento de recta en el intervalo $[0, 2]$ y a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como una función continua.

`https://www.desmos.com/calculator/zpxvtoscwh`

1.25. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x < 0 \\ bx & \text{si} \quad 0 \leq x < b \\ -bx^2 + 4x - 2 & \text{si} \quad b \leq x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

¿Es posible hallar valores para a y b de tal manera que f sea continua?

Solución: En este caso, por definición f es continua si ella es continua en todo $\mathbb{R}$.

Como $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} bx = b^2$ y $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^+} \left\{-bx^2 + 4x - 2\right\} = -b^3 + 4b - 4$, se tiene que $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe si y sólo si $b^3 + b^2 - 4b + 4 = 0$.

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \left\{-bx^2 + 4x - 2\right\} = -9b + 10$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 4 = 4$ se tiene que $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existe si y sólo si $b = \dfrac{2}{3}$.

Como $b = \dfrac{2}{3}$ no es solución de $b^3 + b^2 - 4b + 4 = 0$, $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no pueden existir simultáneamente y por lo tanto, no existen a y b tales que f sea continua.

1.26. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin(6x)} & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{3} < x < 0 \\[2ex] 1 & \text{si} \quad x = 0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}{\sin(3x)} & \text{si} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

a) ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

b) Analizar la continuidad de f en todo su dominio.

Solución:

a) Para $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x}{\sin(6x)} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{6x}{\sin(6x)}$, luego $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{6} \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{t}{\sin t} = \dfrac{1}{6}$.

Para $x > 0$, al multiplicar $f(x)$, por $\dfrac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}}$, se tiene que

$$f(x) = \frac{x}{\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}\right)\sin(3x)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}\right)\sin(3x)},$$

luego, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x}{\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}\right)\sin(3x)} = \dfrac{1}{6} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{\sin u}{u} = \dfrac{1}{6}$.

De lo anterior, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{6}$

b) Para $-\dfrac{\pi}{3} < x_0 < 0$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x}{\sin(6x)} = \dfrac{x_0}{\sin(6x_0)} = f(x_0)$, por lo que f es continua en $\left]-\dfrac{\pi}{3}, 0\right[$.

De manera análoga, para $0 < x_0 < \dfrac{\pi}{3}$, se tiene que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, por lo que f es continua en $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

Por otra parte, como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{6} \neq 1 = f(0)$, se tiene que f no es continua en el origen. En resumen f es continua en todo su dominio excepto en el origen.

1.27. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k-7x}{\sqrt{x^2+3}} & , \quad x < 1 \\ x^3 - 5x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

donde k es una constante real.

a) Determinar el valor de k para el cual f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Encontrar una asíntota horizontal del gráfico de f.

c) Demostrar que existe $x_0 \in [2,3]$, tal que $f(x_0) = 10$.

d) Indicar justificadamente, si f es una función acotada superiormente.

Solución:

a) La función f es continua, tanto para $x < 1$ como para $x > 1$, pues en ambos casos corresponde a una combinación (suma, resta, producto o cuociente con denominador no nulo) de funciones continuas.

Para que f sea continua en 1, debe tenerse

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = -3.$$

Se calculan los correspondientes límites laterales

- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{k-7x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{k-7}{2}.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^3 - 5x + 1) = -3.$

Entonces, dado que

$$\frac{k-7}{2} = -3 \Leftrightarrow k = 1,$$

se concluye que f es continua en $\mathbb{R}$ si y solo si $k = 1$.

b) Se observa que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{k-7x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(\dfrac{k}{x} - 7\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}} = 7.$$

Por lo tanto, la recta de ecuación $y = 7$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

c) Para todo $x \in [2,3]$ se tiene $f(x) = x^3 - 5x + 1$, la cual es una función continua. Dado que $f(2) = -1 < 10$ y $f(3) = 13 > 10$, el Teorema del valor intermedio garantiza que existe $x_0 \in [2,3]$ tal que $f(x_0) = 10$.

d) Dado que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left[x^3\left(1 - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)\right] = +\infty$, se tiene que f no es acotada superiormente.

1.28. Indicar de manera justificada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sin(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos(x)}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(x)}} = +\infty$

c) La recta $y=-2$ es asíntota horizontal del gráfico de la función f definida por $f(x) = x - \sqrt{x^2+4x-1}$.

Solución:

a) **Verdadera:** Al calcular ambos límites se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin(4x)}{4x} = 4\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{4\sin(x)}{x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 4.$$

b) **Falsa:** Definiendo $f(x) := \dfrac{\sqrt{1+\cos(x)}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(x)}}$, para $x \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+\cos(x)}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(x)}} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1-\cos(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}\left(\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2}\right)} \\ &= -\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

y por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

c) **Verdadera:** Dado que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-4x}{x+\sqrt{x^2+4x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x-4}{1+\sqrt{1+4/x-1/x^2}} = -2,$$

se tiene que $y=-2$ es asíntota horizontal del gráfico de f.

1.29. Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 6}{x - 1}$. Hallar todas las asíntotas para el gráfico de f.

Solución: Dado que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(el valor de este límite es eventualmente la pendiente m de *la* asíntota oblicua) y que

$$\lim_{x \to +\infty} \{f(x) - 1 \cdot x\} = \lim_{x \to +\infty} \{f(x) - x\} = -9,$$

(el valor de este segundo límite corresponde al coeficiente de posición n de dicha asíntota) se tiene que la recta de ecuación

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ &= x - 9 \end{aligned}$$

es asíntota oblicua (por la derecha).

De manera completamente análoga, si se considera ahora x tendiendo a $-\infty$, dado que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y que $\lim\limits_{x \to -\infty} \{f(x) - x\} = -9$, se tiene que la misma recta es también asíntota oblicua (por la izquierda).

Por otra parte, como $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, se tiene la recta de ecuación $x = 1$ es asíntota vertical para el gráfico de f (el hecho que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, también es suficiente por sí solo, para afirmar que $x = 1$ es asíntota vertical).

De lo anterior, como el gráfico de f tiene una asíntota oblicua derecha y *una* (en realidad se trata de la misma recta) asíntota oblicua izquierda; entonces, él no tiene ninguna asíntota horizontal.

`https://www.desmos.com/calculator/gtnfgbx8ev`.

1.30. Sea $f : [1, 2] \to [-1, 4]$ una función continua tal que $f(1) = -1$ y $f(2) = 4$. Utilizar el Teorema del valor intermedio para demostrar que f tiene un punto fijo.

Solución: Por definición, x_0 es un punto fijo de una función f, si $f(x_0) = x_0$.

Sea $g(x) := f(x) - x$.

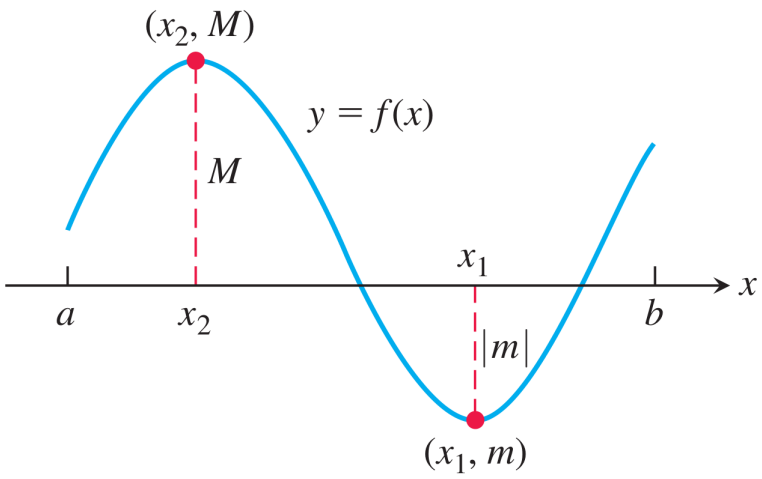
Como g es continua, $g(1) = -2$ y $g(2) = 2$, por Teorema del valor intermedio, g se anula en algún punto $x_0 \in]1, 2[$ y por lo tanto, como

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0,$$

se tiene que f tiene un punto fijo.

Teorema de los valores extremos: Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f alcanza un valor mínimo absoluto m y un valor máximo absoluto M en $[a, b]$, es decir, existen números x_1 y x_2 en $[a, b]$ tales que

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M, \forall x \in [a, b]\,.$$



1.31. El conjunto de todas las imágenes de un conjunto A por una función f se define como

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}\,.$$

¿Existirá f continua, tal que $f([0, 1]) =]0, 1]$?

Solución: No, porque según el Teorema de los valores extremos el conjunto $f([0, 1])$ debería tener un mínimo (absoluto).

1.32. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Determinar los valores extremos absolutos para f.

Solución: Claramente f es continua (en todo su dominio) pues lo es en $]0,1[$, es continua lateralmente por la derecha en $x = 0$ y es continua lateralmente por la izquierda en $x = 1$.

De lo anterior es claro, por el Teorema de los valores extremos, que f posee un valor mínimo absoluto y un valor máximo absoluto.

Como $x \in [0,1]$, entonces $\dfrac{x}{x^2+1} \geq 0$ pues $x \geq 0$ y $x^2+1 > 0$. Además dado que $0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, se tiene que $x^2 + 1 \geq 2x$ y por lo tanto,

$$\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}, \text{ para } x > 0.$$

De lo anterior, como $f(0) = 0$ y $f(1) = \dfrac{1}{2}$, se tiene que

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [0,1]$$

y

- el mínimo absoluto es 0 y
- el máximo absoluto es $\dfrac{1}{2}$.

Fuente: J. Marsden, M. Hoffman, *Análisis clásico elemental*. Segunda edición, Addison Wesley Iberoamericana, 1998.

1.33. Sea f una función continua en todo $\mathbb{R}$ que toma sólo valores racionales (es decir, $Rec(f) \subseteq \mathbb{Q}$). Mostrar que f es función constante.

Solución: Si f no es constante, entonces existen x_1 y x_2 en $\mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2$ y

$$f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2).$$

De la continuidad de f en $[x_1, x_2]$ y del hecho que entre y_1 e y_2 siempre existirá un irracional y^*, por el Teorema del valor intermedio, existe $x^* \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f(x^*) = y^*.$$

Como la igualdad anterior contradice la hipótesis, pues $Rec(f) \subseteq \mathbb{Q}$, entonces se tiene que f es constante.

2. La derivada

2.1. Demostrar que si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Solución: Por definición si f es derivable en x_0, el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe como un número real (y se denota por $f'(x_0)$).

De la igualdad

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0),$$

al tomar límite cuando x tiende a x_0, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \right] \\ &= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

y es claro que f es continua en x_0.

Fuente: J. Marsden, M. Hoffman, *Análisis clásico elemental*. Segunda edición, Addison Wesley Iberoamericana, 1998.

2.2. Probar que si f y g son funciones derivables en x_0, entonces

a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ y

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Solución:

a) De la definición de derivada puntual, se tiene

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0)
\end{aligned}$$

b) Nuevamente, de la definición de derivada puntual

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) \right) + f(x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}$$

Observación: Estos resultados juntos con otros 2 parecidos son conocidos como **Álgebra de derivadas**.

2.3. Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, donde $f(x) = x^3+2x^2$. Utilizando la definición de derivada, calcular:

a) $f'(1)$,

b) $f'(2)$,

c) $f'(x)$

y luego comprobar lo obtenido utilizando las reglas de derivación.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-3}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1+2x^2-2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)+2(x-1)(x+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+3x+3)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \left(x^3+3x+3\right) \\
&= 7
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-16}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \left(x^2+4x+8\right) \\
&= 20
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3+2(x+h)^2-x^3-2x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3+4xh+2h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(3x^2+3xh+h^2+4x+2h\right) \\
&= 3x^2+4x
\end{aligned}$$

Por otra parte, usando las reglas de derivación, se obtiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2\right) = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(2x^2\right) = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + 2\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 3x^2+4x,$$

de donde, $f'(1) = 7$ y $f'(2) = 20$.

2.4. Determinar el valor de los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x-\pi}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left[(x+3)^2\right]-\sin(9)}{x}$

Solución:

a) Si $f(x)=e^{\sin(x)}$, dado que $f'(x)=-\cos(x)\cdot e^{\sin(x)}$, se tiene que

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = f'(\pi) = -1.$$

b) Del cambio de variable $h=x-3$, al considerar $f(x)=\sin(x^2)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin\left[(3+h)^2\right]-\sin(9)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\ &= f'(3)\\ &= 6\cos(9),\end{aligned}$$

en donde en la última igualdad se ha utilizado el hecho que $f'(x)=2x\cos(x^2)$.

Fuente: J. Stewart, D. Clegg, s. Watson, *Calculus*. Ninth Edition, Cengage, 2020.

2.5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & , \quad x \leq 2 \\ x^2 + 5 & , \quad x > 2 \end{cases}$. Analizar la existencia de la derivada de f en todo $\mathbb{R}$.

Solución: Para $x < 2$, se tiene que $f'(x) = 4$; para $x > 2$, se tiene que $f'(x) = 2x$.

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 7$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 9$, se tiene que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe, luego f no es continua en $x_0 = 2$ y por lo tanto, ella no es derivable en dicho punto.

De lo anterior, f es derivable en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x_0 = 2$.

2.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 + x + 1 & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Calcular $f'(x)$, en cada punto donde exista.

b) Calcular $f''(x)$ para $x \neq 0$.

Solución:

a) Para $x \neq 0$, de las reglas de derivación, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot -\frac{1}{x^2} + 2x + 1 \\ &= 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x + 1. \end{aligned}$$

Para $x = 0$, por definición

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x + 1 \right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

pues, si $x \neq 0$, entonces es válida la desigualdad $\left| x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$.

b) Para $x \neq 0$, de las reglas de derivación y de la parte anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} + 2 \\ &= 6x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \end{aligned}$$

2.7. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ c + \sqrt{x-1} & , \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Determinar los valores de a, b y c de modo que f sea derivable en $]0,5[$ y $f(0) = f(5)$.

Solución:

De la condición $f(0) = f(5)$, se obtiene que $c = -2$.

Por otro lado, dado que f debe ser continua en $]0,5[$ y lo es en $]0,2[$ y en $]2,5[$, basta analizar la continuidad para f en $x_0 = 2$. Para que f sea continua en $x_0 = 2$, debe tenerse que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ y por lo tanto

$$4a + 2b = -1 \tag{1}$$

De manera similar a lo anterior, dado que f debe ser derivable en $]0,5[$ y lo es en $]0,2[$ y en $]2,5[$, basta analizar la derivabilidad de f en $x_0 = 2$.

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{a(x^2-4)+b(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} a(x+2)+b = 4a+b$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \dfrac{1}{2}$, entonces $f'(2)$ existe si y sólo si

$$4a + b = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2), se obtiene que $a = \dfrac{1}{2}$ y $b = -\dfrac{3}{2}$.

Así, f es derivable en $]0,5[$ y $f(0) = f(5)$ si

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad c = -2.$$

2.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = (2x^2 + 3)^3$

a) Calcular $f'(x)$ utilizando la regla de la cadena.

b) Desarrollar el cubo de binomio, calcular $f'(x)$ y comprobar lo obtenido en la parte anterior.

Solución:

a) $f'(x) = 3(2x^2 + 3)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2 + 3)^2$

b) Dado que $f(x) = 8x^6 + 36x^4 + 54x^2 + 27$, se tiene

$$f'(x) = 48x^5 + 144x^3 + 108x,$$

de donde se observa que $f'(x) = 12x(4x^4 + 12x^2 + 9) = 12x(2x^2 + 3)^2$.

2.9. Sea $f(x) = \sin^5\left(\dfrac{x^3-1}{4x^6+1}\right)$. Calcular $f'(x)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 5\sin^4\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\\
&= 5\sin^4\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\left(\frac{3x^2(4x^6+1)-(x^3-1)24x^5}{(4x^6+1)^2}\right)\\
&= -\frac{15x^2(4x^6-8x^2-1)}{(4x^6+1)^2}\sin^4\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cos\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)
\end{aligned}
$$

2.10. Utilizar las reglas de derivación para calcular $f'(x)$, si:

a) $f(x) = x^5 \cos(2x^3)$

b) $f(x) = \sin\left(\ln\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)\right)$

c) $f(x) = e^{\tan\left(x^3+2x\right)}$

Solución:

a) $f'(x) = 5x^4 \cos(2x^3) + x^5 \cdot -\sin(2x^3) \cdot 6x^2$

$f'(x) = 5x^4 \cos(2x^3) - 6x^7 \sin(2x^3)$

b) $f'(x) = \cos\left(\ln\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)\right) \cdot \dfrac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} \cdot (4x^3 + 4x)$

$f'(x) = \dfrac{4x^3 + 4x}{x^4 + 2x^2 + 1} \cos\left(\ln\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)\right)$

c) $f'(x) = e^{\tan\left(x^3+2x\right)} \cdot \sec^2\left(x^3 + 2x\right) \cdot (3x^2 + 2)$

$f'(x) = (3x^2 + 2)\, e^{\tan\left(x^3+2x\right)} \sec^2\left(x^3 + 2x\right)$

2.11. Calcular, en cada caso, $f'(x)$:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3+x}{x^6+1}}$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^6+x^2+1}\right)$

c) $f(x) = \tan^3(5x^3+2x)$

Solución:

a) Como $f(x) = \left(\dfrac{x^3+x}{x^6+1}\right)^{1/3}$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+x}{x^6+1}\right)^{-2/3} \cdot \frac{(3x^2+1)(x^6+1)-(x^3+x)\cdot 6}{(x^6+1)^2}$$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x^4+1}{x^6+x^2+1}} \cdot \dfrac{4x^3\cdot(x^6+x^2+1)-(x^4+1)(6+2x)}{(x^6+x^2+1)^2}$

c) $f'(x) = 3\tan^2(5x^3+2x)\sec^2(5x^3+2x)\cdot(15x^2+2)$

2.12. Sea f una función tal que $f(2) = -3$ y $f'(x) = \sqrt{x^2+5}$.

Si $g(x) = x^2 f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$, calcular $g'(2)$.

Solución: Para $x \neq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} g'(2) &= 2xf\left(\frac{x}{x-1}\right) + x^2 f'\left(\frac{x}{x-1}\right)\left[\frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right] \\ &= 2xf\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{x^2}{(x-1)^2} f'\left(\frac{x}{x-1}\right) \end{aligned}$$

y entonces

$$g'(2) = 4f(2) - 4f'(2) = -24$$

2.13. Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ para:

a) $x_0 = 0$

b) $x_0 = 1$

c) $x_0 = \dfrac{5}{2}$

Solución: La recta tangente al gráfico de f en punto $(x_0, f(x_0))$ tiene ecuación

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

donde $f'(x) = x_0^2 - 3x_0 + 2$.

a) Para $x_0 = 0$, se tiene que $f(x_0) = 0$ y que la pendiente es $f'(0) = 2$, la ecuación de la recta tangente en $(0, 0)$ es

$$y - 0 = 2(x - 0) \Leftrightarrow 2x - y = 0.$$

b) Para $x_0 = 1$, se tiene que $f(x_0) = \dfrac{5}{6}$ y que la pendiente es $f'(1) = 0$, la ecuación de la tangente en $\left(1, \dfrac{5}{6}\right)$ es

$$y - \frac{5}{6} = 0(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{5}{6}.$$

c) Para $x_0 = \dfrac{5}{2}$, se tiene que $f(x_0) = \dfrac{5}{6}$ y que la pendiente es $f'\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$, la tangente en $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{6}\right)$ tiene ecuación

$$y - \frac{5}{6} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow 18x - 24y - 25 = 0.$$

`https://www.desmos.com/calculator/3tpyrciynq`

2.14. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, definida para $x > -1$:

a) Obtener, mediante la definición de derivada, $f'(3)$.

b) Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto en donde la ordenada vale $\dfrac{1}{2}$.

Solución:

a) Por definición

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2}}{x-3} \\ &= -\lim_{x\to 3} \frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(2+\sqrt{x+1}\right)} \\ &= -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

b) La recta tangente al gráfico de f en el punto en el punto $\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$ tiene ecuación

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{16}(x-3)$$

`https://www.desmos.com/calculator/oiyjhkbnwq`

2.15. Sea $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$. Calcular $f'(x)$ y luego determinar las ecuaciones de la rectas tangente y normal al gráfico de f en el punto $(1, 1)$.

Solución: Al reescribir $f(x) = (2x^2 - 3x + 2)^{1/3}$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x^2 - 3x + 2\right)^{-2/3}(4x - 3) = \frac{4x - 3}{3\left(2x^2 - 3x + 2\right)^{2/3}},$$

de donde, la pendiente de la recta tangente pedida es $f'(1) = \dfrac{1}{3}$ y por lo tanto, la ecuación de dicha recta es

$$y - 1 = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow x - 3y + 2 = 0.$$

Por otra parte, la ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) \Leftrightarrow 3x + y - 4 = 0.$$

`https://www.desmos.com/calculator/ogpgsxuxki`

2.16. Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que la ecuación de la recta tangente al gráfico de

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + kx + 9$$

en $(0, 9)$ pase por el punto $(1, 24)$.

Solución: Dado que

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + k,$$

la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $(0, 9)$ es $f'(0) = k$ y como dicha debe contener también al punto $(1, 24)$, entonces

$$k = \frac{24 - 9}{1 - 0} = 15.$$

`https://www.desmos.com/calculator/hyzwgsejwd`

2.17. ¿Para qué valor de k la ecuación

$$e^{2x} = k\sqrt{x}$$

tiene exactamente una solución?

Solución: Al considerar las curvas $y = f(x) := e^{2x}$ e $y = g(x) := k\sqrt{x}$, los valores de x en donde ellas se intersectan, son tales que $f(x) = g(x)$ y por lo tanto, debe tenerse que

$$e^{2x} = k\sqrt{x} \tag{1}$$

y necesariamente $k \geq 0$.

Por ejemplo si $k = 1$, la curva $y = \sqrt{x}$

`https://www.desmos.com/calculator/vpq8atxjrr`

no alcanza a $y = e^{2x}$ y entonces para que $y = g(x)$ *sí alcance* a $y = f(x)$, ellas debe tener una recta tangente en común, es decir

$$2e^{2x} = k\frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{2}$$

De (1) y (2) se obtiene que $x = \dfrac{1}{4}$ y $k = 2\sqrt{e}$.

`https://www.desmos.com/calculator/rxskgaujz3`

Fuente: J. Stewart, D. Clegg, s. Watson, *Calculus*. Ninth Edition, Cengage, 2020.

2.18. Mostrar que $y = f(x) = e^{2x} - x$ satisface la ecuación

$$y' - 2y = 2x - 1.$$

Solución:

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 2e^{2x} - 1 - 2\left(e^{2x} - x\right) \\ &= 2e^{2x} - 1 - 2e^{2x} + 2x \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

2.19. Mostrar que $y = 9\sin(x) - \dfrac{1}{3}\cos(x) + 5$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y - 5 = 0.$$

Solución: Dado que

$$\frac{dy}{dx} = 9\cos(x) + \frac{1}{3}\sin(x)$$

y que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -9\sin(x) + \frac{1}{3}\cos(x) = 5 - y$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + y - 5 &= (5 - y) + y - 5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.20. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ para:

a) $y = 2^x$

b) $y = x^{\sin(x)}$

c) $y = (x^8+3)^2(x^4+1)^3(2x^6+7)^7$

Solución:

a) Dado que para $x > 0$ se tiene que $x = e^{\ln(x)}$, reescribiendo

$$y = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x\ln(2)},$$

se obtiene que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(e^{x\ln(2)}\right) = e^{x\ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2)$.

b) Al aplicar logaritmo natural y derivar implícitamente con respecto a x se obtiene

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x^{\sin x} \\
\ln y &= \sin x \ln x \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= y\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) \\
\frac{dy}{dx} &= x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)
\end{aligned}$$

c) Nuevamente, al aplicar logaritmo natural y derivar implícitamente con respecto a x se obtiene

$$\begin{aligned}
\ln y &= 2\ln(x^8+3) + 3\ln(x^4+1) + 7\ln(2x^6+7) \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{16x^7}{x^8+3} + \frac{12x^3}{x^4+1} + \frac{84x^5}{2x^6+7} \\
\frac{dy}{dx} &= (x^8+3)^2(x^4+1)^3(2x^6+7)^7\left(\frac{16x^7}{x^8+3} + \frac{12x^3}{x^4+1} + \frac{84x^5}{2x^6+7}\right)
\end{aligned}$$

2.21. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si:

a) $y = Arcsec(x)$

b) $x^3 + y^3 - 1 = 8xy$

c) $y - \cos(x + y) = 0$

Solución:

a) Si $y = Arcsec(x)$, entonces $\sec(y) = x$. Luego, derivando implícitamente respecto a x en ambos lados tenemos que

$$\sec(y)\tan(y)\frac{dy}{dx} = 1.$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec(y)\tan(y)}$$

Como $\sec(y) = x$, haciendo uso de la identidad $\tan^2(y) + 1 = \sec^2(y)$, se tiene que $\tan(y) = \sqrt{\sec^2(y) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$. De este modo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

b) Si $x^3 + y^3 - 1 = 8xy$, entonces derivando implícitamente la ecuación respecto a x se tiene que

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 8y + 8x\frac{dy}{dx}$$

Luego,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$$

c) Si $y - \cos(x + y) = 0$, derivando implícitamente con respecto a x

$$\frac{dy}{dx} + \sin(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$$

2.22. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación

$$(x^2+y^2)^2 = 4x^2y + 9$$

en el punto $(2,1)$.

Solución: Derivando implícitamente la ecuación, suponiendo $y = y(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} 2(x^2+y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) &= 8xy + 4x^2\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{4x(x^2+y^2) - 8xy}{4x^2 - 4y(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

por lo que la pendiente de la recta tangente pedida es $m = \dfrac{dy}{dx}(2,1) = -6$ y su ecuación es

$$y - 1 = -6(x+2) \Leftrightarrow y = -6x + 13.$$

`https://www.desmos.com/calculator/vlpcpddtbl`

2.23. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva C de ecuación

$$x^3 + y^3 = 6xy,$$

en el punto $(3, 3)$.

Solución: Al suponer $y = y(x)$ y derivar implícitamente la ecuación de C, se tiene

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6y + 6x\frac{dy}{dx},$$

de donde se obtiene que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$.

De lo anterior, la pendiente de la recta tangente C en el punto $(3, 3)$ es

$$m = \frac{dy}{dx}(3, 3) = -1$$

y por lo tanto ecuación de la recta es $y - 3 = -(x - 3) \Leftrightarrow x + y = 6$.

`https://www.desmos.com/calculator/hx6qgnta8o`

2.24. Dada la curva C en $\mathbb{R}^2$, determinada por la ecuación

$$x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - x - y = 0,$$

encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a C en los puntos donde la curva intersecta al eje y.

Solución: Para encontrar los puntos en que C intersecta al eje y, se reemplaza $x = 0$ en la ecuación de la curva, obteniendo la ecuación

$$\frac{1}{4}y^2 - y = 0,$$

la cual se satisface para $y = 0$ e $y = 4$. Entonces los puntos de intersección buscados son $(0, 0)$ y $(0, 4)$.

Por otro lado, al derivar implícitamente la ecuación de la curva, se obtiene

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y\frac{dy}{dx} - 1 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

es decir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x - y}{x + \frac{1}{2}y - 1}.$$

Por lo tanto:

- En $(x, y) = (0, 0)$, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = -1$, la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -x$ y
- en $(x, y) = (0, 4)$, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = -3$, la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -3x + 4$.

`https://www.desmos.com/calculator/oiebgynj5n`

2.25. Dada la curva C en $\mathbb{R}^2$, determinada por la ecuación

$$y^2e^x - x - y = 2,$$

encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a C en los puntos donde la curva intersecta al eje y.

Solución: Al reemplazar $x = 0$ en la ecuación de C se obtienen los valores $y = -1$ e $y = 2$, por lo tanto, la curva intersecta al eje y en los puntos $P_1 = (0, -1)$ y $P_2 = (0, 2)$.

Por otro lado, al derivar implícitamente la ecuación de la curva, se obtiene

$$2y\frac{dy}{dx}e^x + y^2e^x - 1 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2e^x}{2ye^x - 1}.$$

De lo anterior,

- En $P_1 = (0, -1)$, se tiene que $\dfrac{dy}{dx} = 0$ y la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -1$.

- En $P_2 = (0, 2)$, se tiene que $\dfrac{dy}{dx} = -1$ y la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -x + 2$.

`https://www.desmos.com/calculator/zk2qj69inp`

2.26. Sea C la curva de ecuación

$$x^3y + xy^3 = 32,$$

mostrar que las rectas tangentes a C en $(-2,-2)$ y en $(2,2)$ no se intersectan.

Solución: Al suponer $y = y(x)$ y derivar implícitamente la ecuación de C, se tiene

$$3x^2y + x^3\frac{dy}{dx} + y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde se obtiene que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}$.

Si L_1 es la recta tangente a C en el punto $(-2,-2)$, entonces ella tiene pendiente

$$m_1 = \frac{dy}{dx}(-2,-2) = -\frac{-24-8}{-8-24} = -1$$

y su ecuación es $x + y = -4$.

Si L_2 es la recta tangente a C en el punto $(2,2)$, entonces ella tiene pendiente

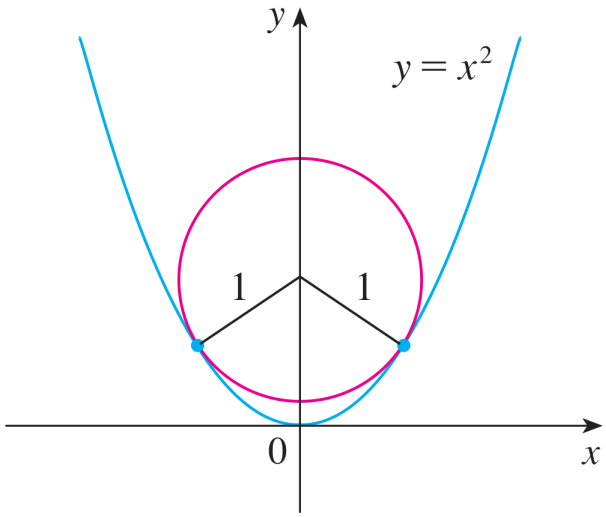
$$m_2 = \frac{dy}{dx}(2,2) = -\frac{24+8}{8+24} = -1.$$

y su ecuación es $x + y = 4$.

De las dos ecuaciones, se obtiene que $-4 = 4$ y como esto es absurdo, las dos rectas no se intersectan.

`https://www.desmos.com/calculator/t9cztxjzhs`

2.27. Una circunferencia de radio 1 y centro en el eje y se inscribe en la parábola $y = x^2$. Determinar los puntos en donde ambas curvas se tocan.



Solución: De la ecuación de la parábola se tiene que $\dfrac{dy}{dx} = 2x$.

Si el centro de la circunferencia está $(0, k)$, con $k > 0$, entonces su ecuación es

$$x^2 + (y - k)^2 = 1$$

y al derivar implícitamente con respecto a x se obtiene que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y - k}$.

De lo anterior, como las pendientes de las tangentes deben coincidir en el (los) punto(s) de intersección, debe tenerse que

$$-\frac{x}{y - k} = 2x,$$

de donde se obtiene que $y - k = -\dfrac{1}{2}$.

Ahora, como los puntos buscados deben satisfacer las ecuaciones de la circunferencia y de la parábola, al remplazar la última expresión en la primera ecuación, se obtiene

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1,$$

por lo tanto $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y reemplazando en la segunda, se obtiene que $y = \dfrac{3}{4}$.

`https://www.desmos.com/calculator/33cwf2zd7u`

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

2.28. Las variables x, y y z son funciones derivables en la variable t y tales que para todo t, se tiene que

$$x^3 - 2xy + y^2 + 2xz - 2xz^2 + 3 = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 4.$$

Hallar los dos valores para $\dfrac{dz}{dt}$ cuando $x = 1$ e $y = 2$.

Solución: De la relación entre x, y y z se tiene que

$$x^3 - 2x(y - z + z^2) + y^2 + 3 = 0,$$

y si $x = 1$ e $y = 2$ se obtiene $z^2 - z - 2 = 0$, es decir, $z = -1$ y $z = 2$.

Por otra parte, de la relación de antes, al derivar implícitamente con respecto a t

$$3x^2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dx}{dt}\left(y - z + z^2\right) - 2x\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + 2z\frac{dz}{dt}\right) + 2y\frac{dy}{dt} = 0.$$

De la última igualdad, como $\dfrac{dx}{dt} = 3$ y $\dfrac{dy}{dt} = 4$, al considerar $x = 1$, $y = 2$ y $z = -1$ se tiene que $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{7}{6}$ y al considerar $x = 1$, $y = 2$ y $z = 2$ se tiene que $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{7}{6}$. De lo anterior, se ha llegado entonces a que $\dfrac{dz}{dt} = \pm\dfrac{7}{6}$.

2.29. Aplicar el Teorema del valor medio para justificar las siguientes afirmaciones:

a) Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ es tal que $\forall x \in]a, b[\ : \ f'(x) = 0$, entonces f es una función constante (sobre $]a, b[$).

b) Si g es una función derivable sobre el intervalo $[-2, 3]$, tal que $g(-2) = 2$ y $g(3) = 17$, entonces el gráfico de g tiene un punto en el que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 3x$.

Solución:

a) Sean x_0 y x dos puntos cualesquiera en $]a, b[$ con $x_0 < x$. Como f es continua en $[x_0, x]$ y derivable en $]x_0, x[$, entonces por el teorema del valor medio, existe x_1 entre x_0 y x tal que

$$f'(x_1) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

de donde, como $f'(x_1) = 0$; se tiene que $f(x) = f(x_0)$, $\forall x \in]a, b[$.

b) Como g es continua en $[-2, 3]$ y derivable en $]-2, 3[$, entonces por el teorema del valor medio, existe c entre -2 y 3 tal que

$$g'(c) = \frac{g(3) - g(-2)}{3 - (-2)} = 3.$$

De lo anterior, el gráfico de g en el punto $(c, g(c))$ posee recta tangente con pendiente 3; dicha recta, es paralalela a la de ecuación $y = 3x$.

2.30. Demostrar que la ecuación

$$2x^3 + x^2 + 4x + \cos(x) - 2 = 0$$

tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

Solución: Al definir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 2x^3 + x^2 + 4x + \cos(x) - 2$, se tiene que ella es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Dado que $f(0) = -1$ y $f(1) = 5 + \cos(1) > 0$, por el Teorema del valor intermedio, la ecuación posee al menos una solución en $]0, 1[$.

Además, como

$$f'(x) = 6x^2 + 2x + 4 - \sin(x) = 5x^2 + (x+1)^2 + 3 - \sin(x) > 0,$$

se tiene que f es estrictamente creciente e inyectiva (a cada imagen le corresponde una única preimagen) y por lo tanto, la solución es única.

`https://www.desmos.com/calculator/angj6qlpb5`

2.31. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(x)}{x}-\dfrac{1}{4}x & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$. ¿Es f derivable en el origen? ¿Es f una función de clase C^1 en $\mathbb{R}$?

Solución: Por definición, f es de clase C^1 en un conjunto *abierto* A, si f' es una función continua en cada punto de A.

Para $x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{x\sin(x)+\cos(x)-1}{x^2}-\dfrac{1}{4}$.

Por otra parte, como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}-\frac{1}{4}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)-\frac{1}{4}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\right]-\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4},\end{aligned}$$

se tiene que $f'(0)=\dfrac{1}{4}$.

De lo anterior, se tiene que la función derivada (de f) está definida por

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x)+\cos(x)-1}{x^2}-\dfrac{1}{4} & , \quad x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{4} & , \quad x=0\end{cases}$$

Además, para $x_0\neq 0$, se tiene que

$$\lim_{x\to x_0}f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{x\sin(x)+\cos(x)-1}{x^2}-\frac{1}{4}=\frac{x_0\sin(x_0)+\cos(x_0)-1}{x_0^2}-\frac{1}{4}=f'(x_0)$$

y en el origen,

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\sin(x)}{x}+\frac{\cos(x)-1}{x^2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}=f'(0),$$

y por lo tanto f' es continua en $\mathbb{R}$, es decir, f es de clase C^1 en dicho conjunto.

2.32. Si f derivable en x_0, se tiene que para valores x *cerca* de x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

a) Determinar un valor aproximado para $\sqrt{4.1}$.

b) En el caso en que f sea dos veces derivable en x_0, para valores x *cercanos* a x_0 se tiene la aproximación

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Utilizar este hecho para obtener un valor aproximado de $\sqrt{4.1}$ y comparar dicho valor con lo obtenido en *a*).

Solución: Sean $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$ y $x_0 = 4$.

a) Dado que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ y $f'(x_0) = \dfrac{1}{4}$, para valores de x cercanos a $x_0 = 4$, se tiene la aproximación

$$\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

de donde, si $x = 4.1$

$$\sqrt{4.1} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} = 2 + 0.025 = 2.025$$

b) Del hecho que $f''(x_0) = -\dfrac{1}{32}$, para x cercanos a $x_0 = 4$, se tiene

$$\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 4) - \frac{1}{64}(x - 4)^2$$

y la mejor aproximación

$$\sqrt{4.1} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{100} = 2.02484375$$

2.33. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con un único punto crítico x_0. Si x_0 es un punto de mínimo local estricto (mínimo relativo), demostrar que dicho punto es de mínimo absoluto.

Solución: Si x_0 no fuese un punto de mínimo absoluto, debería existir $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) < f(x_0)$. Si se considera que el valor máximo de f en el intervalo $[x^*, x_0]$ (o bien en $[x_0, x^*]$), cuya existencia está garantizada por el Teorema de los valores extremos, es $f(\tilde{x})$; entonces necesariamente $\tilde{x} \in]x^*, x_0[$ ha de ser un punto crítico distinto de x_0.

Como lo anterior es una contradicción, x_0 es un punto de mínimo absoluto.

3. Aplicaciones de la derivada

3.1. Variaciones relacionadas

3.1.1. Se deja caer una piedra en agua tranquila, lo cual genera ondas circulares concéntricas como las de la figura

y el radio exterior aumenta a una razón de 1 pie/s. En el instante en que dicho radio es de 4 pies, ¿con qué tasa cambia el área acotada por la circunferencia correspondiente?

Solución: Sean $r(t)$ y $A(t)$ el radio y el área de la primera onda, respectivamente, en el tiempo $t \geq 0$ (en segundos). Como $A(t) = \pi r^2(t)$, al derivar con respecto a t, se tiene que

$$A'(t) = 2\pi r(t) r'(t)$$

y si t_0 es el instante en el cual $r(t_0) = 4$, de la igualdad anterior al considerar $t = t_0$; dado que $r'(t) = 1$ (lo cual implica que en particular $r'(t_0) = 1$), se obtiene que

$$A'(t_0) = 8\pi$$

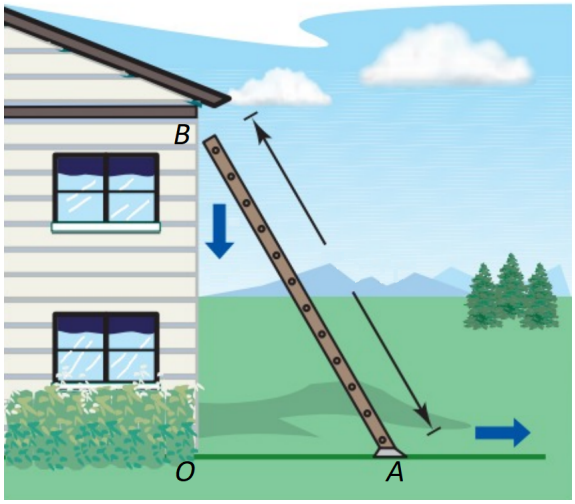
y por lo tanto, en el instante t_0, el área indicada aumenta a razón de 8π pies^2/s.

3.1.2. Una escalera de 5 metros de longitud se desliza por una pared. Cuando el extremo inferior está a 4 metros de la pared, el otro extremo baja por la pared a razón de 2 metros por segundo. En ese instante:

a) ¿Con qué rapidez se desplaza el extremo inferior a lo largo del suelo?

b) ¿Con qué rapidez varía el área encerrada por la pared, el suelo y la escalera?

Solución:



Sean $x(t)$ e $y(t)$ las distancias desde O hasta A y desde O hasta B, respectivamente.

a) Por Teorema de Pitágoras se tiene que $x^2(t) + y^2(t) = 25$.

Sea t_0 el instante en el cual $x(t_0) = 4$; se tiene, $y(t_0) = 3$.

Al derivar implícitamente se tiene que $x'(t) = -\dfrac{y(t)}{x(t)} \cdot y'(t)$ y evaluando en t_0 se obtiene

$$x'(t_0) = -\frac{y(t_0)}{x(t_0)} \cdot y'(t_0) = -\frac{3}{4} \cdot -2 = \frac{3}{2} \text{ metros por segundo.}$$

b) El área está dada por $A(t) = \dfrac{1}{2}x(t) \cdot y(t)$, luego

$$A'(t) = \frac{1}{2}\left(x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t)\right),$$

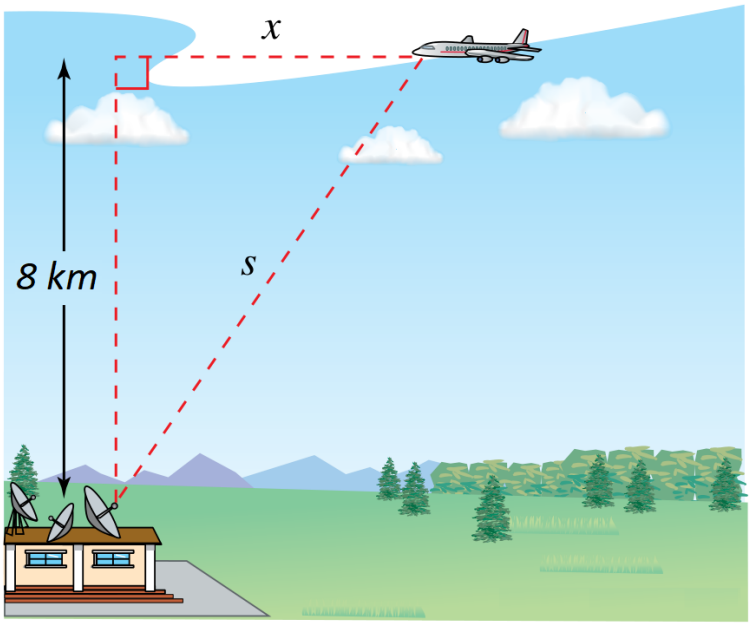
por lo tanto

$$A'(t_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} \cdot 3 + 4 \cdot -2\right) = -\frac{7}{4} \text{ metros cuadrados por segundo.}$$

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.1.3. Un avión se desplaza en un vuelo horizontal a 8 kilómetros de altura. La ruta de vuelo pasa por sobre una estación situada en tierra. Si la distancia entre el avión y la estación disminuye a una razón de 4 kilómetros por minuto, determinar la velocidad del avión en el instante en que dicha distancia es de 10 kilómetros.

Solución:



Sean $x(t)$ y $s(t)$ las distancias, en kilómetros, por Teorema de Pitágoras, se tiene

$$x^2(t) + 64 = s^2(t).$$

Sea t_0 el para el cual $s(t_0) = 10$, dado que $x(t_0) = 6$, al derivar con respecto a t en la relación anterior se tiene

$$x'(t) = \frac{s(t)}{x(t)} \cdot s'(t)$$

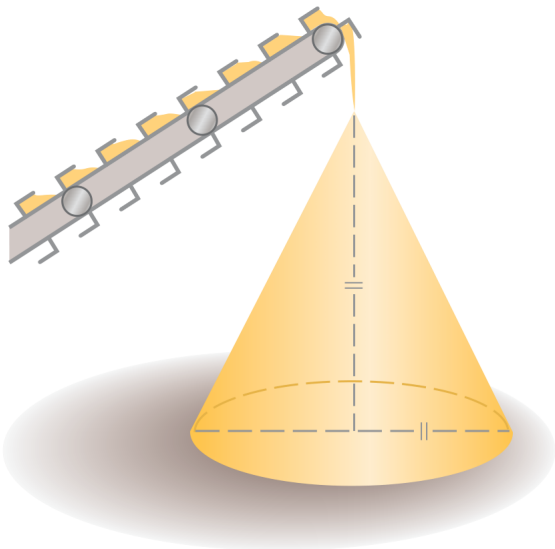
y al evaluar en $t = t_0$ se obtiene

$$x'(t_0) = \frac{s(t_0)}{x(t_0)} \cdot d'(t_0) = \frac{10}{6} \cdot -4 = -\frac{20}{3} \text{ kilómetros por minuto.}$$

De lo anterior, la velocidad del avión es de $\dfrac{20}{3}$ kilómetros por minuto.

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.1.4. Desde un conducto cae arena a razón de 3 metros cúbicos por minuto y va formando un montículo cónico.



Si el diámetro en la base fuese siempre igual al triple de la altura. ¿A qué velocidad cambiaría en el instante en que ella alcance 4 metros?

Solución: Sean $d(t)$, $h(t)$ y $V(t)$ el diámetro, la altura y el volumen del cono, respectivamente, en el tiempo $t \geq 0$ (en minutos). Como $d(t) = 3h(t)$, se tiene

$$V(t) = \frac{3\pi}{4} h^3(t).$$

Al derivar con respecto a t a ambos lados de la ecuación anterior,

$$V'(t) = \frac{9\pi}{4} h^2(t) h'(t).$$

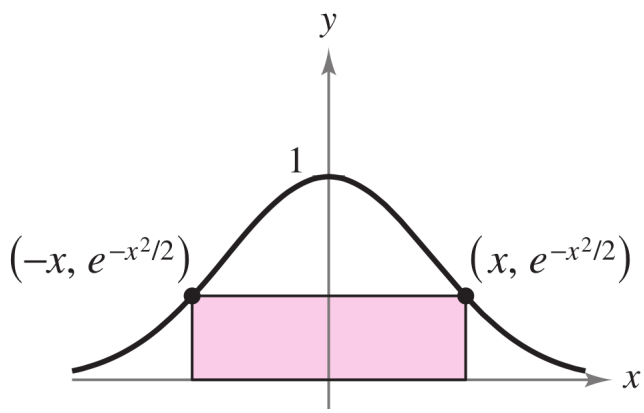
Si t_0 es el instante en el cual $h(t_0) = 4$, como $V'(t_0) = 3$, de la igualdad anterior al considerar $t = t_0$ se obtiene que

$$h'(t_0) = \frac{1}{12\pi}$$

y por lo tanto, la altura aumenta a razón de $1/12\pi$ metros por minuto cuando ella mide 4 metros.

Fuente: J. Stewart, D. Clegg, s. Watson, *Calculus*. Ninth Edition, Cengage, 2020.

3.1.5. Considerar el rectángulo de la figura



a) Expresar el área del rectángulo en función de x.

b) Calcular la razón de cambio del área cuando $x = 2$, si $\dfrac{dx}{dt} = 4$ cm/min.

Solución:

a) $A = 2xe^{-x^2/2}$

b) Como

$$\frac{dA}{dt} = 2\,\frac{dx}{dt}e^{-x^2/2} + 2xe^{-x^2/2} \cdot -x\frac{dx}{dt} = 2\frac{dx}{dt}e^{-x^2/2}\left(1 - x^2\right),$$

si t_0 es el instante tal que $x(t_0) = 2$, entonces

$$A'(t_0) = 2 \cdot 4e^{-2} \cdot -3 = -24e^{-2} \approx -3.25 \text{ cm}^2/\text{min}.$$

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Sixth Edition, Cengage, 2015.

3.1.6. Las longitudes x, y (en la base) y z (altura) de una caja rectangular sin tapa varían en el tiempo y en un cierto instante t_0 dichas aristas miden 2, 3 y 5, respectivamente. Si $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 2$ y $\dfrac{dz}{dt} = -3$, en dicho instante:

a) Calcular la razón de cambio de la superficie total S de la caja.

b) Determinar si la longitud L de la diagonal de la base crece o decrece.

Solución:

a) Como $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{dx}{dt}\,y + x\,\frac{dy}{dt} + 2\left(\frac{dx}{dt}\,z + x\,\frac{dz}{dt}\right) + 2\left(\frac{dy}{dt}\,z + y\,\frac{dz}{dt}\right)\\ &= (y+2z)\frac{dx}{dt} + (x+2z)\frac{dy}{dt} + 2(x+y)\frac{dz}{dt},\end{aligned}$$

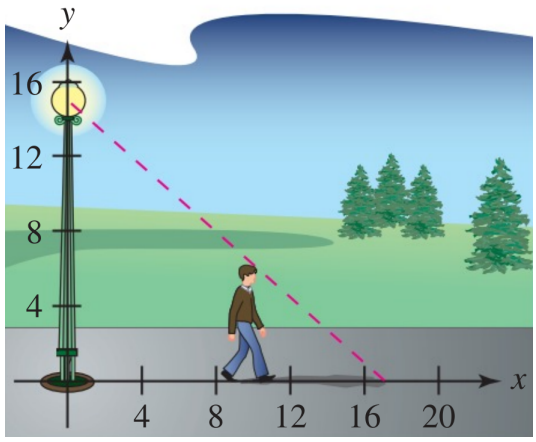
de donde se obtiene que $S'(t_0) = 20$.

b) Como $L(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}\right),\end{aligned}$$

de donde $L'(t_0) = \dfrac{10}{\sqrt{13}}$ y por lo tanto la longitud de la diagonal crece pues $L'(t_0) > 0$.

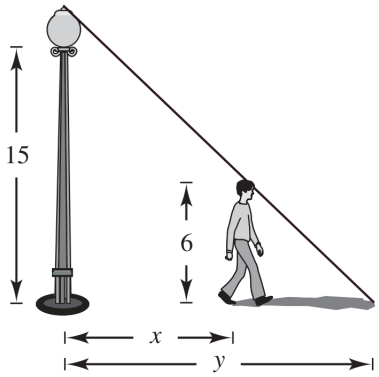
3.1.7. Una persona de 6 pies de estatura se aleja a 5 pies/s de un poste cuya luz está a 15 pies de altura. En el instante en que la persona está a 10 pies de la base del poste:



a) ¿A qué razón se mueve la punta de su sombra?

b) ¿A qué razón está cambiando la longitud de su sombra?

Solución: De la figura



por triángulo semejantes, si x es la distancia de la base del poste a la persona e y la distancia desde la misma base hasta la punta de la sombra, entonces

$$\frac{15}{6} = \frac{y}{y-x} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x$$

y por lo tanto, si t_0 es el instante tal que $x(t_0) = 10$, se tiene que:

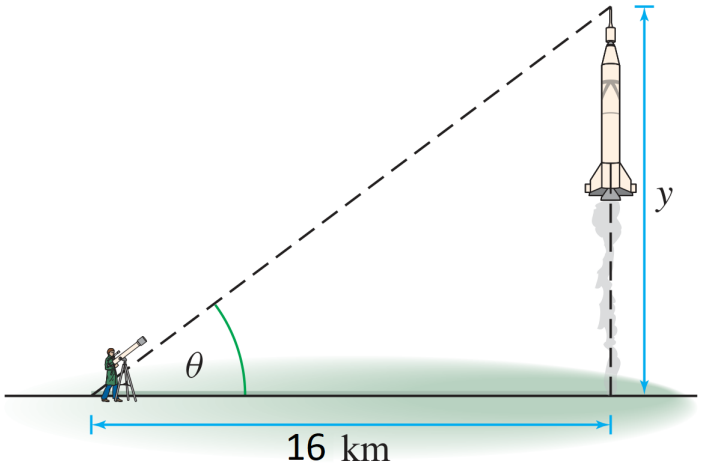
a) $y'(t_0) = \frac{5}{3}x'(t_0) = \frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{25}{3}$ pies/s

b) $(y-x)'(t_0) = y'(t_0) - x'(t_0) = \frac{25}{3} - 5 = \frac{10}{3}$ pies/s

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.1.8. Un cohete se desplaza verticalmente a una velocidad de 1200 km/h. Un observador situado a 16 kilómetros de la plataforma de lanzamiento lo va siguiendo con un telescopio. ¿Con qué rapidez aumenta el ángulo de elevación formado por el telescopio y el suelo después de 3 min del despegue?

Solución: Sea $y(t)$ la altura en kilómetros a la que se encuentra el cohete en un determinado instante t, y sea t_0 tal que $y(t_0) = 60$.



Si θ es el ángulo de elevación, es válida la relación

$$\tan(\theta) = \frac{y}{16},$$

de donde, al derivar con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \sec^2(\theta)\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{16}\frac{dy}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{16}\cos^2(\theta)\frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

De lo anterior, como en el instante t_0 se tiene que $\cos^2(\theta) = \dfrac{16}{241}$, entonces

$$\theta'(t_0) = \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{241} \cdot 1200 = \frac{1200}{241}\,\text{rad/h}$$

y por lo tanto, el ángulo, en el instante t_0 aumenta a esa tasa.

Fuente: J. Rogawski, C. Adams, R. Franzosa *Calculus: Early transcendentals*. Fourth Edition, Macmillan Learning, 2019.

3.1.9. La Ley de Boyle estable que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V, satisfacen la relación

$$PV = k,$$

donde k es una constante. Suponer que en un cierto instante el volumen es de 600 cm^3, la presión es de 150 kPa y que la presión aumenta a una razón de 20 kPa/min. ¿A qué tasa disminuye el volumen en ese instante?

Solución: Al derivar implícitamente con respecto al tiempo en la relación indicada, se tiene

$$P'(t)V(t) + P(t)V'(t) = 0$$

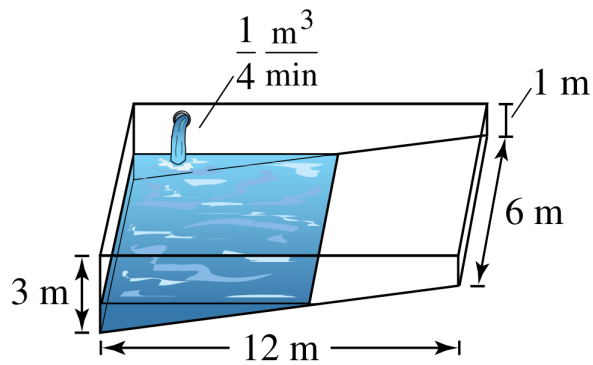
y por lo tanto, en el instante t_0

$$20\,\text{kPa/min} \cdot 600\,\text{cm}^3 + 150\,\text{kPa} \cdot V'(t_0) = 0$$

y entonces $V'(t_0) = -80$ cm^3/min, por lo que en el instante t_0 el volumen disminuye a 80 cm^3/min.

Fuente: J. Stewart, D. Clegg, s. Watson, *Calculus*. Ninth Edition, Cengage, 2020.

3.1.10. Una piscina tiene 12 metros de largo, 6 metros de ancho, 1 metro de profundidad en el extremo menos profundo y 3 metros en el otro. Se bombea agua a la piscina a una velocidad de 1/4 metros cúbicos por minuto y en un instante hay 1 metro de altura de agua en el extremo más profundo.



a) ¿Qué porcentaje de la piscina está *llena*?

b) ¿A qué ritmo está subiendo el nivel del agua?

Solución:

a) Dado que $V_{\text{agua}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot 6 = 18$ y $V_{\text{piscina}} = \left(12 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\right) \cdot 6 = 144$, la proporción entre el volumen de agua y el de la piscina es

$$\frac{V_{\text{agua}}}{V_{\text{piscina}}} = \frac{18}{144} = 12.75\,\%$$

b) Sean $b(t)$ la *base* y $h(t)$ la altura del triángulo de agua transversal al ancho de la piscina. Por triángulos semejantes se observa que

$$b(t) = 6h(t)$$

y por lo tanto el volumen de agua hasta antes de llegar a 2 metros, es

$$V(t) = 18h^2(t).$$

Si t_0 es el instante tal que $h(t_0) = 1$, al derivar en la igual anterior y considerar $t = t_0$, se tiene que

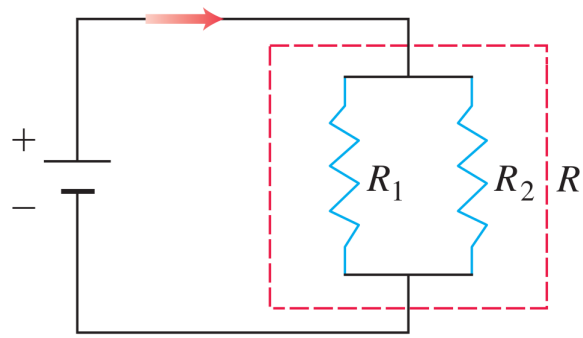
$$V'(t_0) = 36h(t_0)h'(t_0) \Rightarrow \frac{1}{4} = 36 \cdot 1 \cdot h'(t_0),$$

de donde se obtiene que $h'(t_0) = \frac{1}{144}\text{m}^3/\text{min}$.

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.1.11. Si dos resistores con resistencias de R_1 y R_2 se conectan en paralelo en un circuito eléctrico para formar un resistor de resistencia R, el valor de R se puede encontrar a partir de la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$



Si R_1 disminuye a una velocidad de 1 Ω/s y R_2 aumenta a una velocidad de 0.5 Ω/s, ¿a qué velocidad cambia R cuando $R_1 = 75$ Ωs y $R_2 = 50$?

Solución: Si t_0 es tal que $R_1(t_0) = 75$ y $R_2(t_0) = 50$, entonces de la relación indicada se obtiene que $R(t_0) = 30$.

Ahora al derivar con respecto al tiempo en la ecuación, se tiene

$$\frac{R'(t)}{R^2(t)} = \frac{R_1'(t)}{R_1^2(t)} + \frac{R_2'(t)}{R_2^2(t)},$$

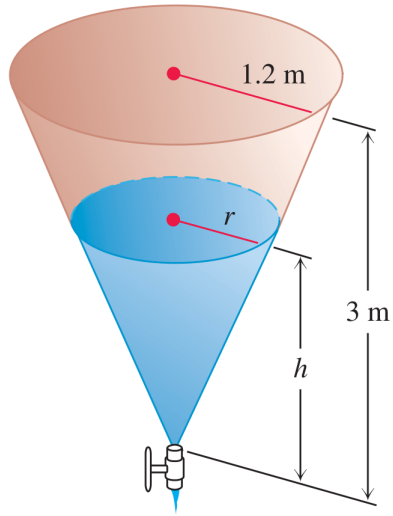
de donde al evaluar en $t = t_0$

$$\frac{R'(t_0)}{900} = -\frac{1}{75^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50^2}$$

y por lo tanto, $R'(t_0) = \dfrac{1}{50} = 0.02$ Ω.

Fuente: G. Thomas, *Calculus*. Fifteenth Edition, Pearson, 2024.

3.1.12. Se drena agua de un tanque cónico como el de la figura



a una velocidad de 0.2 m^3/min. ¿Qué tan rápido baja el nivel del agua si $h = 2$ m?

Solución: De la figura, por triángulos semejantes se tiene que

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{1.2}{3}$$

y por lo tanto, el volumen del cono de agua es

$$V(t) = \frac{\pi}{3} r^2(2)h(t) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{5}h(t)\right)^2 h(t) = \frac{4\pi}{75}h^3(t).$$

Como el volumen está decreciendo a una razón de 0.2, se tiene que $V'(t) = -\frac{1}{5}$, $\forall t$ y si t_0 es el instante en que $h(t_0) = 2$, de la igualdad

$$V'(t) = \frac{12\pi}{25}h^2(t)h'(t),$$

dado que $-\frac{1}{5} = \frac{12\pi}{25} \cdot 4h'(t_0)$ y por lo tanto, el nivel de agua está bajando a una rapidez de

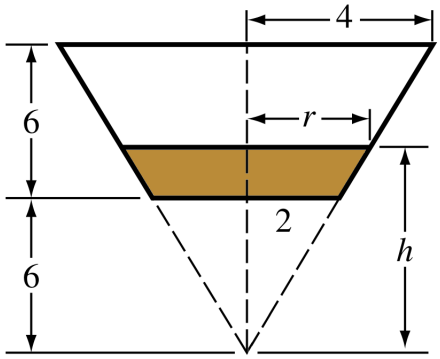
$$-h'(t_0) = \frac{5}{16\pi}\,\mathrm{m/min}.$$

Fuente: G. Thomas, *Calculus*. Fifteenth Edition, Pearson, 2024.

3.1.13. Se vierte café a una velocidad uniforme de 20 cm^3/s en una taza cuyo interior tiene forma de cono truncado.

Si los radios superior e inferior de la taza son 4 cm y 2 cm respectivamente y la altura de la taza es de 6 cm. ¿A qué velocidad subirá el nivel del café cuando esté hasta la mitad?

Solución: Al extender la altura y la *generatriz* de la taza de modo de *completarla* hasta que su forma sea un cono no truncado, de la figura



se observa que si $r(t)$ y $h(t)$ corresponden al radio y altura del volumen de café más el volumen *agregado*, entonces

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{4}{12}$$

y el volumen V (solamente) de café es

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h(t)}{3}\right)^2 h(t) - V_{agregado} = \frac{1}{27}\pi h^3(t) - V_{agregado},$$

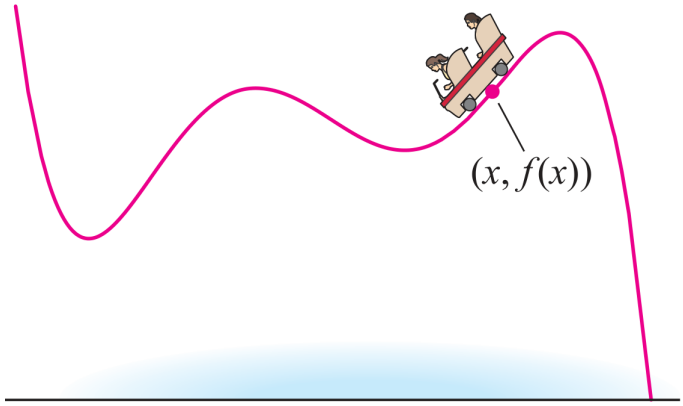
de donde

$$V'(t) = \frac{1}{9}\pi h^2(t)h'(t)$$

y en esta última igualdad, al reemplazar $V'(t) = V'(t_0) = 20$ y $h(t_0) = 9$, se obtiene que $h'(t_0) = \dfrac{20}{9\pi}$ cm/s.

Fuente: H. Anton, I. Bivens, S. Davis, *Calculus*. Eleventh Edition, Wiley, 2015.

3.1.14. El perfil de una montaña rusa tiene la forma indicada en la figura.



Mostrar que cuando un carro para el por el punto $(x, f(x))$ su velocidad vertical es igual a $f'(x)$ multiplicado por su velocidad horizontal.

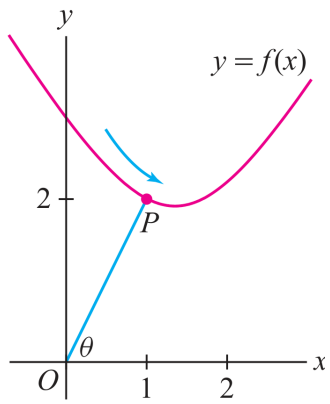
Solución: Si $x = x(t)$ es posición en el eje x de carro e y es la altura, entonces

$$y(t) = f(x(t))$$

y por lo tanto, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{dt} = f'(x)\dfrac{dx}{dt}$.

Fuente: J. Rogawski, C. Adams, R. Franzosa *Calculus: Early transcendentals*. Fourth Edition, Macmillan Learning, 2019.

3.1.15. Una partícula se desplaza por una curva $y = f(x)$,



como se muestra en la figura. Si $L(t)$ es la distancia de la partícula al origen.

a) Mostrar que

$$L'(t) = \left(\frac{x + f(x)f'(x)}{\sqrt{x^2 + f^2(x)}} \right) \frac{dx}{dt}$$

si en el tiempo t la posición de la partícula es $P = (x, f(x))$.

b) Calcular $L'(t)$ cuando $x = 1$ y $x = 2$, si $f(x) = \sqrt{3x^2 - 8x + 9}$ y $\dfrac{dx}{dt} = 4$.

Solución:

a) Dado que $d(O, P) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$, entonces $L(t) = \sqrt{x^2(t) + f^2(x(t))}$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} L'(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x(t) \cdot x'(t) + 2f(x(t)) \cdot f'(x(t)) \cdot x'(t)}{\sqrt{x^2(t) + f^2(x(t))}} \\ &= \left(\frac{x + f(x)f'(x)}{\sqrt{x^2 + f^2(x)}} \right) \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

b) Si t_1 y t_2 son tales que $x(t_1) = 1$ y $x(t_2) = 2$, dado que $x'(t) = 4$, $f(1) = 2$, $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$, $f(2) = \sqrt{5}$ y $f'(2) = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$; se obtiene que

$$L'(t_1) = 0 \quad \text{y que} \quad L'(t_2) = \frac{16}{3}.$$

Fuente: J. Rogawski, C. Adams, R. Franzosa *Calculus: Early transcendentals*. Fourth Edition, Macmillan Learning, 2019.

3.1.16. Cuando cae una *gota esférica* de lluvia, alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a una velocidad proporcional a su superficie. Verificar que el radio de la gota de lluvia disminuye a un ritmo constante.

Solución: Como la tasa de evaporación es proporcional a la superficie, se tiene que

$$\frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2} = k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dV}{dt} = 4k\pi r^2.$$

Ahora, por derivación implícita, dado que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3(t)\right) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt},$$

se obtiene que $\dfrac{dr}{dt} = k$.

3.2. Gráficos

3.2.1. Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^3 + 3x - 2$.

a) Evaluar, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$. Además, sabiendo que G_f intersecta al eje x exactamente en dos puntos, determinar dichos puntos.

b) Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad.

Solución:

a) La valores son $f(-2) = 0$, $f(-1) = -4$, $f(0) = -2$, $f(1) = 0$ y $f(2) = -4$.

Como G_f intersecta al eje x exactamente en dos puntos, de los valores anteriores, se tiene que dichos puntos son $(-2, 0)$ y $(1, 0)$.

b) Como $f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1)$, los puntos críticos de f son $x = -1$ y $x = 1$.

Dado que el signo de la derivada depende del producto $-(x+1)(x-1)$, entonces si $x \in \,]-\infty, -1[$ o si $x \in \,]1, +\infty[$ se tiene que f' es negativa y si $x \in \,]-1, 1[$ se tiene que f' es positiva; por lo tanto, f es decreciente en el conjunto $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ y es creciente en $]-1, 1[$, en $x = -1$ hay un mínimo relativo y en $x = 1$ hay un máximo relativo para f.

Por otra parte, como $f''(x) = -6x$, se tiene f'' es positiva cuando $x < 0$ y f'' es negativa cuando $x > 0$, se tiene entonces que G_f es cóncavo hacia arriba en el intervalo $]-\infty, 0[$ y cóncavo hacia abajo en el intervalo $]0, +\infty[$; por lo tanto, $x = 0$ es un punto de inflexión para G_f.

`https://www.desmos.com/calculator/7hkqndh8ym`

3.2.2. Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, puntos de inflexión e intervalos de concavidad para luego esbozar el gráfico de f.

Solución: Como $f'(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2(x+1)(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2)$, se tiene que los puntos críticos de f son $x_0 = -1$, $x_0 = 1$ y $x_0 = 2$.

Dado que el signo de la derivada depende del producto $(x+1)\,(x-1)\,(x-2)$, entonces si $x \in \,]-\infty, -1[$ o si $x \in \,]1, 2[$ se tiene que f' es negativa y si $x \in \,]-1, 1[$ o si $x \in \,]2, +\infty[$ se tiene que f' es positiva; por lo tanto, f es decreciente en el conjunto $]-\infty, -1[\,\cup\,]1, 2[$ y es creciente en $]-1, 1[\,\cup\,]2, +\infty[$.

Además, de lo anterior y del criterio de la primera derivada, se tiene que en $x_0 = -1$ hay un mínimo relativo, en $x_0 = 1$ hay un máximo relativo y en $x_0 = 2$ hay un mínimo relativo para f.

Por otra parte, como

$$f''(x) = 6x^2 - 8x - 2 = 6\left(x - \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right),$$

se tiene f'' es positiva si $x \in \left]-\infty, \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right[$ y f'' es negativa si $x \in \left]\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$, se tiene entonces que G_f es cóncavo hacia en el conjunto $\left]-\infty, \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right[$ y cóncavo hacia abajo en el intervalo $\left]\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$; por lo tanto, $x_0 = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$ son puntos de inflexión.

`https://www.desmos.com/calculator/hltf205qk6`

3.2.3. Sea $f(x) = x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 1$. Determinar:

a) Puntos críticos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de máximo y de mínimo relativos; intervalos de concavidad de G_f y puntos de inflexión.

b) Si f posee extremos absolutos.

Solución:

a) f es derivable en todo $\mathbb{R}$, luego sus puntos críticos son (solamente) las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$; como $f'(x) = 5x^4 - 5x^2 = 5x^2(x+1)(x-1)$, se tiene que los puntos críticos de f son -1, 0 y 1.

La tabla de signos asociada a f' está dada por

x		-1		0		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

por lo que f es creciente en los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]1, +\infty[$, es decreciente en $]-1, 1[$; tiene un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 1.

Por otra parte como $f''(x) = 20x^3 - 10x = 10\left(\sqrt{2}x + 1\right)x\left(\sqrt{2}x - 1\right)$, se tiene que la tabla asociada a f'' es

x		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

por lo que G_f es cóncavo hacia arriba en los intervalos $\left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right[$ y $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right[$, es cóncavo hacia abajo en los intervalos $\left]-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ y $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Además, de lo anterior; hay tres puntos de inflexión (en donde cambia la concavidad), $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 0 y $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{5}{3x^2} - \frac{1}{-}\right) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

f no posee extremos absolutos.

<u>Observación</u>: Otra justificación para asegurar la no existencia de extremos absolutos, se debe al hecho que f es creciente en los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]1, +\infty[$.

`https://www.desmos.com/calculator/ahdbaebli1`

3.2.4. Sea $f(x) = e^x(x-4)$, definida para $x \in [-2, \infty[$, determinar:

a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Extremos relativos, si existen, indicando la naturaleza de cada uno de ellos.

c) Si f posee máximo absoluto.

d) Intervalos de concavidad del gráfico de f.

Solución:

a) Como $f'(x) = e^x(x-3)$ y $e^x > 0$; se tiene que $f'(x) < 0$ para $x \in]-2, 3[$y $f'(x) > 0$ para $x \in]3, \infty[$, por lo que f es decreciente en $]-2, 3[$ y es creciente en $]3, \infty[$.

b) El único punto crítico para f es $x_0 = 3$ y por el criterio de la primera derivada (f' pasa de negativa a postiva), dicho punto corresponde a un mínimo estricto local.

c) f no posee máximo absoluto pues $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) Como $f''(x) = e^x(x-2)$ se tiene que $f''(x) < 0$ para $x \in]-2, 2[$ y $f''(x) > 0$ para $x \in]2, \infty[$, por lo que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $]-2, 2[$ y cóncavo hacia arriba en $]2, \infty[$.

`https://www.desmos.com/calculator/aoz4apba4y`

3.2.5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$. Determinar:

a) Puntos críticos.

b) Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

c) Si f alcanza máximo y/o mínimo absoluto.

Solución:

a) Para $x < 0$: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, y por tanto, no hay puntos críticos negativos.

Para $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y luego el único punto crítico positivo es $x = 1$.

De lo anterior, el único punto crítico de f es $x_0 = 1$.

Observación: También se considera correcto afirmar que $x_0 = 0$ es un punto crítico para f debido a la discontinuidad de f en dicho punto.

b) De la parte anterior, se tiene que f es decreciente en el intervalo $]-\infty, 0[$.

Para $x > 0$, se tiene $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ y $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Luego, f es creciente en $]0, 1[$ y es decreciente en $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$.

c) Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, f no alcanza mínimo absoluto.

Por otra parte, dado que $f(x) < 0 \ \forall x < 0$, de lo obtenido en *b*) y del hecho que $f(1) = \dfrac{1}{2} > 0$, es claro que f alcanza su máximo absoluto en $x_0 = 1$.

`https://www.desmos.com/calculator/i0s6ayzsmd`

3.2.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y luego esbozar el gráfico de f.

Solución: Como $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, se tiene que los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 3$, además como f' es positiva en $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ y es negativa en $]1, 3[$, se tiene que f es creciente en $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ y es decreciente en $]1, 3[$; además por el criterio de la primera derivada, $x = 1$ es un punto de máximo relativo y $x = 3$ es un punto de mínimo relativo.

Por otra parte, como $f''(x) = 6x - 12$, se tiene que f'' es negativa en $]-\infty, 2[$ y es positiva en $]2, +\infty[$ y por lo tanto, el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $]-\infty, 2[$ y cóncavo hacia arriba en $]2, +\infty[$ y entonces $(2, f(2)) = (2, 2)$ es el único punto de inflexión.

`https://www.desmos.com/calculator/fmtgs0j9oj`

3.2.7. Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{4}(x-1)^2(x+2)^3$, determinar:

a) intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) la naturaleza de cada uno de los puntos críticos.

c) un esbozo del gráfico de f.

d) si f posee máximo absoluto.

Solución:

a) Dado que $f'(x) = \dfrac{(x+2)^2}{4}(5x+1)(x-1)$, de la tabla

x		$-1/5$		1	
$5x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

se observa que f es creciente en el conjunto $\left]-\infty, -\dfrac{1}{5}\right[\cup \,]1, +\infty[$ y que f es decreciente en el intervalo $\left]-\dfrac{1}{5}, 1\right[$.

b) Los puntos críticos son $x_0 = -2$, $x_0 = -1/5$ y $x_0 = 1$, de la parte anterior, se tiene que $x_0 = 2$ no es ni máximo relativo ni mínimo relativo (pues en este punto f' no cambia de signo), $x_0 = -1/5$ es punto de máximo relativo y $x_0 = 1$ es punto de mínimo relativo.

c) De la primera parte se tiene que un esbozo del gráfico de f es

`https://www.desmos.com/calculator/akl5zkmgru`

d) Como para todo $x > 1$, f es siempre creciente, entonces se tiene f no posee máximo absoluto.

3.2.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y luego esbozar el gráfico de f.

Solución: Como $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6\,(x-1)\,(x-2)$, se tiene que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 2)\,.$$

Los puntos críticos de f son $x = 1$ y $x = 2$. Dado que el signo de la derivada depende del producto $(x-1)\,(x-2)$, entonces si $x \in \,]-\infty, 1[$ o si $x \in \,]2, +\infty[$ se tiene que f' es positiva y si $x \in \,]1, 2[$ se tiene que f' es negativa. Por lo tanto f es creciente en el conjunto $]-\infty, 1[\,\cup\,]2, +\infty[$ y es decreciente en $]1, 2[$, en $x = 1$ hay un máximo relativo y en $x = 2$ hay un mínimo relativo para f.

Por otra parte, $f''(x) = 12x - 18 = 12\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

Como f'' es positiva cuando $x > \dfrac{3}{2}$ y f'' es negativa cuando $x < \dfrac{3}{2}$, se tiene que G_f es cóncavo hacia abajo en el intervalo $\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$ y cóncavo hacia arriba en el intervalo $\left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$; por lo tanto, $x = \dfrac{3}{2}$ es un punto de inflexión para G_f.

De lo anterior, un esbozo del gráfico es

`https://www.desmos.com/calculator/k1qqls0xpk`

3.2.9. La **derivada** de una función f está dada por:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 12}{(x-4)^2}$$

Determinar:

a) extremos relativos de f, si existen.

b) intervalos de concavidad del gráfico de f.

c) puntos de inflexión del gráfico de f.

Solución:

a) Dado que $x^2 - 6x + 12 = x^2 - 6x + 9 + 3 = (x-3)^2 + 3 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que f no posee puntos críticos y por lo tanto no tiene extremos relativos.

b) Como $f''(x) = -\dfrac{2x(x-4)}{(x-4)^4} = -\dfrac{2x}{(x-4)^3}$, de la tabla

x		0		4	
$x-4$	$-$	0	$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$

se tiene que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ y hacia arriba en $]0, 4[$.

c) El punto $(0, f(0))$ es de inflexión para el gráfico de f y en el caso en que f esté definida en $x = 4$ (y sea continua en dicho punto), entonces $(4, f(4))$ también es punto de inflexión.

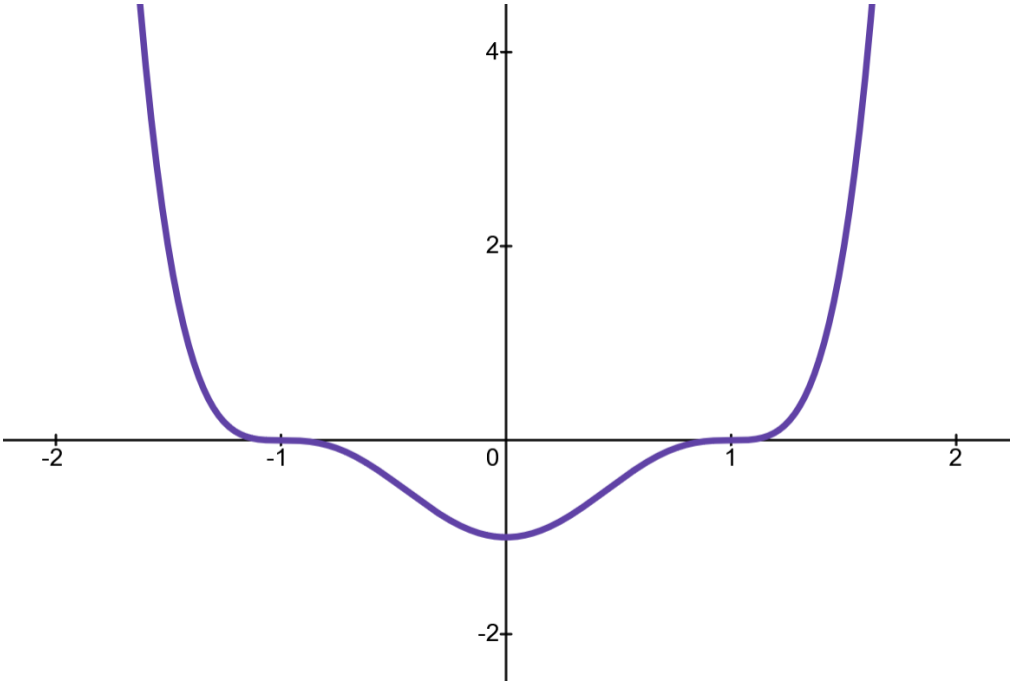
3.2.10. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y luego esbozar el gráfico de f para $f(x) = (x^2 - 1)^3$.

Solución: Como $f'(x) = 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1)$, estos últimos son los puntos críticos. Por otra parte, si $x \in \mathbb{R}^-$ entonces $f' \leq 0$ y si $x \in \mathbb{R}^+$ entonces $f' \geq 0$ y por lo tanto f es decreciente en $]-\infty, 0[$ y creciente en $]0, +\infty[$; además por el criterio de la primera derivada, $x = 0$ es un punto en donde se alcanza un mínimo relativo.

Dado que $f''(x) = 6(x^2 - 1)^2 + 6x(x^2 - 1)4x = 6(x + 1)(\sqrt{5}x + 1)(\sqrt{5}x - 1)(x - 1)$, la tabla de signos asociada a f'' está dada por

x		-1		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$		1	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

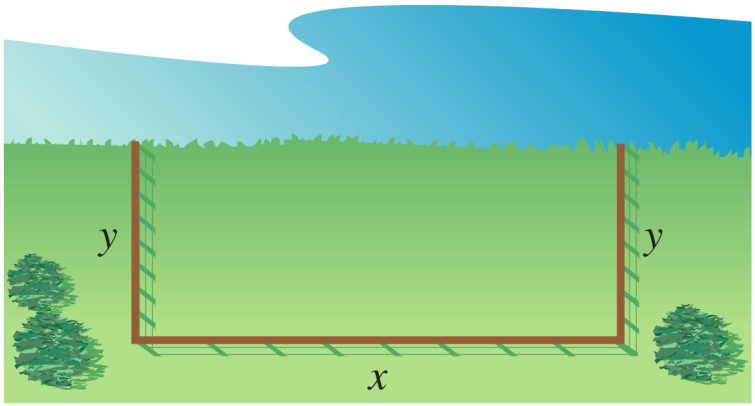
G_f es cóncavo hacia arriba en $]-\infty, -1[$, en $\left]-1/\sqrt{5}, 1\sqrt{5}\right[$ y en $]1, +\infty[$; G_f es cóncavo hacia abajo en $\left]-1, -1/\sqrt{5}\right[$ y en $\left]1, 1\sqrt{5}\right[$. Los puntos de inflexión son $(-1, 0)$, $\left(-1/\sqrt{5}, -64/125\right)$, $\left(1/\sqrt{5}, 64/125\right)$ y $(1, 0)$. Un esbozo de G_f es



3.3. Optimización (Problemas de máximos y mínimos)

3.3.1. Una persona tiene 1200 metros de malla para cercar un terreno rectangular bordeando un río *recto*, de manera que no requiere malla en la orilla. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo para encerrar la mayor área posible?

Solución: Al considerar x e y las dimensiones en metros del rectángulo como en la figura



se tiene que la longitud de la malla es $2x+y=1200$ y que la función que determina el área $A=xy$, puede definirse como sigue:

$$\begin{aligned} A:[0,600] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto A(x)=x(1200-2x)=1200x-2x^2 \end{aligned}$$

Por el Teorema de los Valores Extremos, como A es continua y $[0,600]$ es un intervalo cerrado y acotado, está asegurada la existencia de máximo y mínimo absolutos.

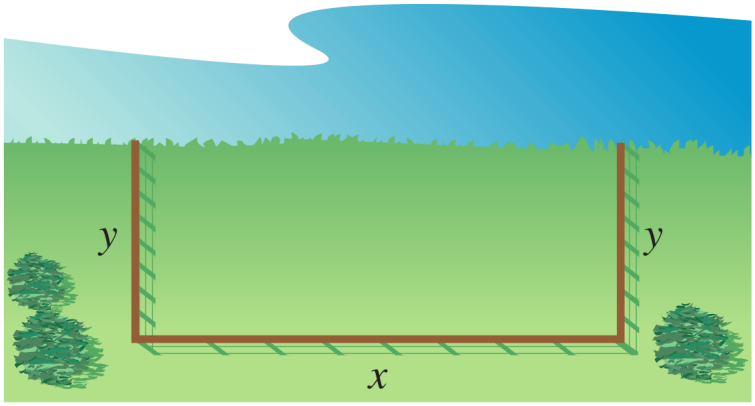
Para $x\in\,]0,600[$, $A'(x)=0 \Leftrightarrow x=300$.

Como $A(0)=0$, $A(300)=180000$ y $A(600)=0$, se tiene que el máximo absoluto se alcanza cuando $x=300$ y por lo tanto, las dimensiones que maximizan el área son: $x=300$ e $y=600$.

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.3.2. Una persona debe cercar un terreno rectangular, de área igual a 245000 metros cuadrados, bordeando un río *recto*. ¿Qué dimensiones minimizan la cantidad de cercado si no es necesario vallar a lo largo del río?

Solución: Al considerar x e y las dimensiones en metros del rectángulo como en la figura



se tiene que el área de $xy = 245000$ y que la función que determina el área $L = x+2y$, puede definirse como sigue:

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & L(x) = x + \dfrac{490000}{x} \end{array}$$

Ahora, como

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{490000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 700,$$

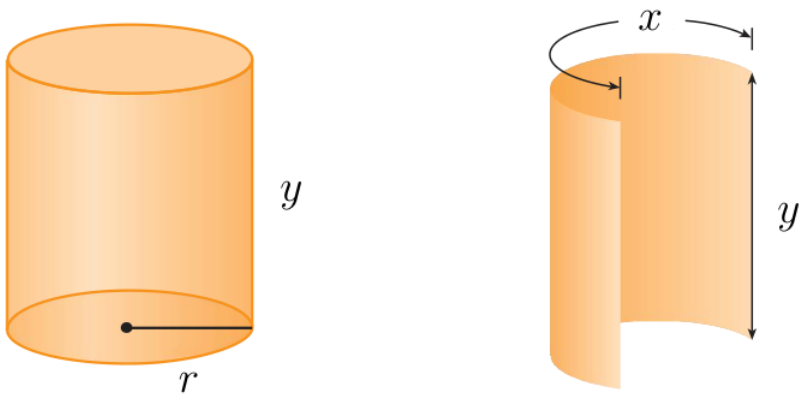
se tiene que $x = 700$ es el único punto crítico de L y dado que $L''(x) > 0, \forall x > 0$, en dicho punto se alcanza el mínimo absoluto.

De lo anterior, las dimensiones son que minizan la longitud son: $x = 700$ e $y = 350$.

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.3.3. Un cilindro se construye pegando dos lados de un rectángulo cuyo perímetro es igual 36 centímetros. Determinar las dimensiones de los lados del rectángulo de modo que el volumen del cilindro sea máximo. Calcular dicho valor y justificar por qué él corresponde efectivamente a un máximo absoluto.

Solución: Sean x e y la base y la altura del rectángulo, al pegar los lados de longitud y se obtiene un cilindro de altura y y con perímetro en la base igual a x.



Como el radio del cilindro es $r = x/2\pi$, entonces el volumen está dado por

$$V = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 y.$$

Por otra parte, como $2x + 2y = 36$, se tiene que $y = 18 - x$ y por lo tanto, el problema es hallar el máximo absoluto para

$$V(x) = \frac{18x^2 - x^3}{4\pi}, \text{donde } 0 \leq x \leq 18.$$

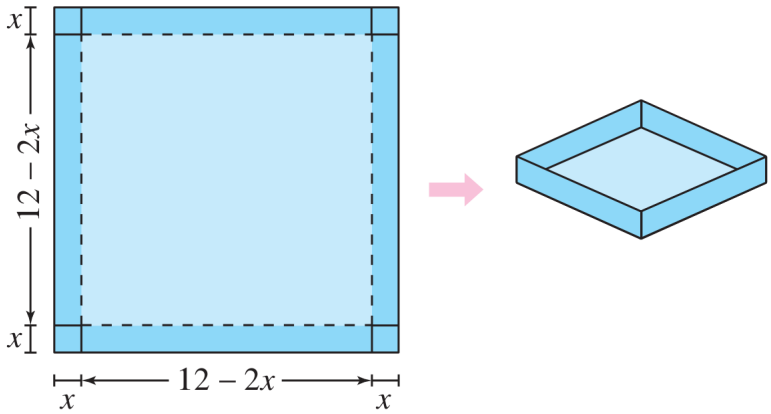
Por el Teorema de los Valores Extremos, como V es continua y $[0, 600]$ es un intervalo cerrado y acotado, está asegurada la existencia de máximo y mínimo absolutos.

Para $x \in]0, 18[$, $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 12$.

Dado que $V(0) = V(18) = 0$ y $V(12) = \dfrac{216}{\pi}$, el valor máximo para el volumen es $\dfrac{216}{\pi}$ y él se alcanza cuando los lados del rectángulo son $x = 12$ e $y = 6$.

Observación: Por tratarse de un problema de máximos y mínimos absolutos, una alternativa al uso del TVE es considerar $V(x) = (18x^2 - x^3)/4\pi$, con $0 < x < 18$ y mostrar que $V'(x) > 0$ $\forall x \in]0, 12[$ y que $V'(x) < 0$ $\forall x \in]12, 18[$.

3.3.4. Se desea fabricar una caja sin tapa a partir de una hoja cuadrada de 12 centímetros de lado, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas como en la figura



y luego doblando los lados hacia arriba. Encontrar la longitud del cuadrado que se debe cortar para obtener una caja cuyo volumen sea máximo.

Solución: Sea x la longitud en centímetros de los cuadrados a cortar en cada una de las cuatro esquinas. La base cuadrada de la caja tiene longitud $12 - 2x$. La función que define el volumen de la caja está dada por

$$\begin{aligned} V : [0,6] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto V(x) = x(12-2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x \end{aligned}$$

Por el Teorema de los Valores Extremos, como V es continua y $[0,6]$ es un intervalo cerrado y acotado, está asegurada la existencia de máximo y mínimo absolutos.

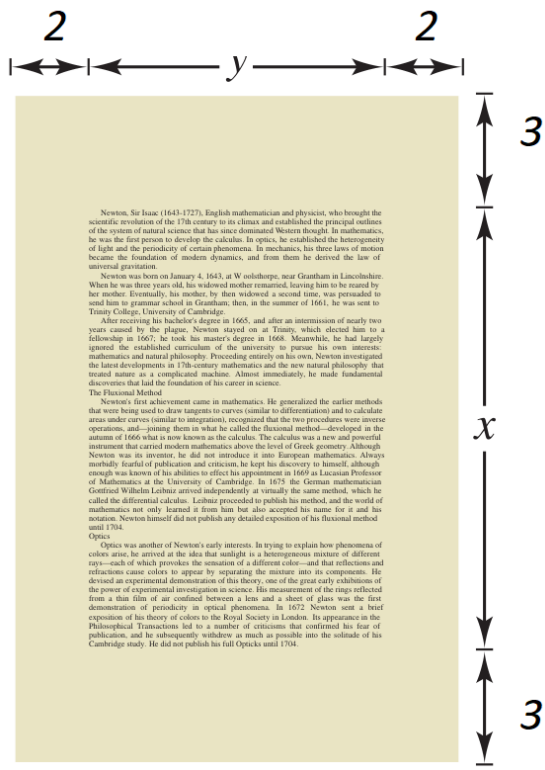
Para $x \in]0,6[$, $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Como $V(0) = 0$, $V(2) = 128$, $V(6) = 0$; se tiene que la longitud que maximiza el volumen de la caja es $x = 2$.

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.3.5. Una página rectangular ha de contener 96 centímetros cuadrados de texto. Los márgenes superior e inferior tienen 3 centímetros de ancho y los laterales 2 centímetros. ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel requerido?

Solución: Sean x e y el ancho y la altura del área del texto, de la condición indicada se tiene que $xy = 96$ y por tanto el área total de la página,



dada por $(x+4)(y+6)$, puede definirse como

$$A(x) = (x+4)\left(\frac{96}{x}+6\right) = 6x + 384x^{-1} + 120,\ x > 0.$$

Como $A'(x) = 6 - 384x^{-2} = 0 \Leftrightarrow x = 8$, A tiene como único punto crítico a $x = 8$.

Por otra parte, como $A''(x) > 0$, $\forall x > 0$, se tiene que $x = 8$ es un punto de mínimo absoluto y por lo tanto las dimensiones pedidas son: ancho 12 centímetros y largo 18 centímetros.

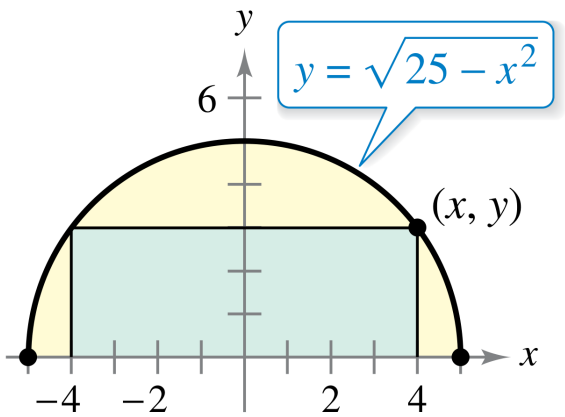
Observación: Dado que

$$A'(x) = 6 - \frac{384}{x^2} = \frac{6x^2 - 384}{x^2} = \frac{6}{x^2}\left(x^2 - 64\right) = \frac{6(x+8)}{x^2}(x-8),$$

el signo de A' depende solamente de $x - 8$. Como A' es siempre negativa (A es decreciente) a la izquierda de $x = 8$ y es siempre positiva (A es creciente) a la derecha de $x = 8$, entonces este hecho también permite concluir que en $x = 8$ se alcanza el mínimo absoluto.

3.3.6. Un rectángulo con la dos paralelos a los ejes está acotado por el eje x y por la semicircunferencia de ecuación $y = \sqrt{25 - x^2}$. ¿Qué largo y ancho debe tener el rectángulo de manera que su àrea se máxima?

Solución: Para $0 \leq x \leq 5$,



el área en función de x está dada por $A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2} = 2\sqrt{25x^2 - x^4}$ y por lo tanto, para hallar la dimensiones pedidas, basta con hallar el máximo (aboluto) de

$$\begin{array}{rcl} f : [0, 5] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 25x^2 - x^4 \end{array}$$

Por el Teorema de los Valores Extremos, como f es continua y $[0, 5]$ es un intervalo cerrado y acotado, está asegurada la existencia de máximo y mínimo absolutos.

Para $x \in]0, 5[$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

Como $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{625}{4}$ y $f(5) = 0$, es claro que el máximo absoluto se alcanza cuando $x = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ y por lo tanto, las dimensiones que maximizan el área son

$$2x = 5\sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.3.7. Considerar los puntos $P(3,4)$ y $Q(x_0,0)$ con $x_0 > 3$. Encontrar:

a) La ecuación de la recta L que pasa por P y Q y el área del triángulo R limitado por la recta la L y los ejes coordenados.

b) El valor de x_0 tal que el área de R sea mínima.

c) La ecuación de la recta que pasa por P y acota, con los semiejes positivos, al triángulo contenido en el primer cuadrante de menor área posible.

Solución:

a) La ecuación de la recta L que pasa por $(3,4)$ y $(x_0,0)$ está dada por

$$y = \frac{4}{3-x_0}\left(x - x_0\right),$$

y su intersección con el eje y está en el punto $\left(0, \dfrac{4x_0}{x_0-3}\right)$.

El área del triángulo acotado por L y los semiejes positivos, en función de x_0, es

$$A\left(x_0\right) = \frac{1}{2}x_0\frac{4x_0}{x_0-3} = \frac{2x_0^2}{x_0-3}, x_0 > 3.$$

b) $A'\left(x_0\right) = \dfrac{4x_0\left(x_0-3\right) - 2x_0^2}{\left(x_0-3\right)^2} = \dfrac{2x_0\left(x_0-6\right)}{\left(x_0-3\right)^2}, x_0 > 3.$

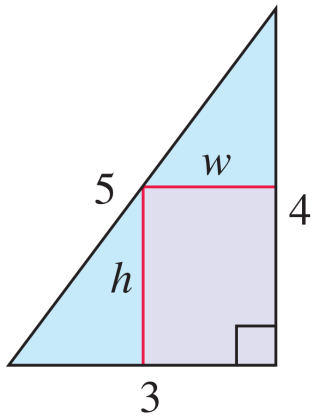
De lo anterior, el único punto crítico para A es $x_0 = 6$.

Además, como $A'\left(x_0\right) < 0$, $\forall x_0 < 6$ y $A'\left(x_0\right) > 0$, $\forall x_0 > 6$, se tiene que $x_0^* = 6$ es el punto en donde se alcanza el mínimo absoluto para el área.

c) De lo anterior, considerando la recta de la parte *a*) y que $x_0 = 6$, la ecuación de la recta buscada es

$$4x + 3y = 24.$$

3.3.8. Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en el triángulo rectángulo que se muestra en la figura adjunta.



Solución: Por triángulos semejantes, se observa que

$$\frac{h}{3-w} = \frac{4}{3}$$

y entonces como $h = \dfrac{4}{3}(3-w)$, al área del rectángulo en términos de w puede definirse por

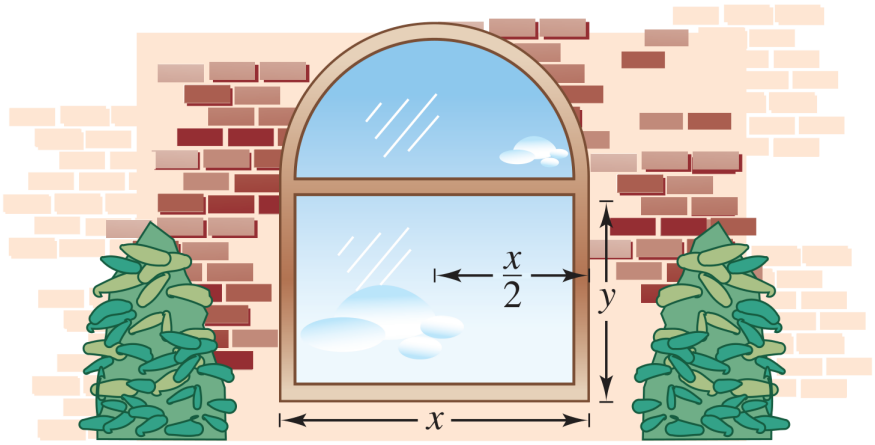
$$A(w) = \frac{4}{3}(3-w)w, \quad 0 \leq w \leq 3.$$

Dado que $A'(w) = 0 \Rightarrow w = \dfrac{3}{2}$; $A(0) = 0$, $A\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3$ y $A(3) = 0$, las dimensiones que maximizan el área son

$$w = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad h = 2.$$

Fuente: G. Thomas, *Calculus*. Fifteenth Edition, Pearson, 2024.

3.3.9. Una ventana normanda se compone de un semicírculo cuyo diámetro calza con la parte superior de un rectángulo, como en la figura:



Si una ventana normanda ha de tener perímetro igual a 16 pies, hallar los valores para x e y que determinan el área máxima.

Solución: Los valores de x e y, dado el perímetro indicado, deben ser tales que

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 16,$$

de donde, $y = \dfrac{32 - 2x - \pi x}{4}$ y por lo tanto, el área de la ventana en función de x, puede expresarse de la manera siguiente

$$A(x) = 8x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{8}x^2, \ \forall x > 0.$$

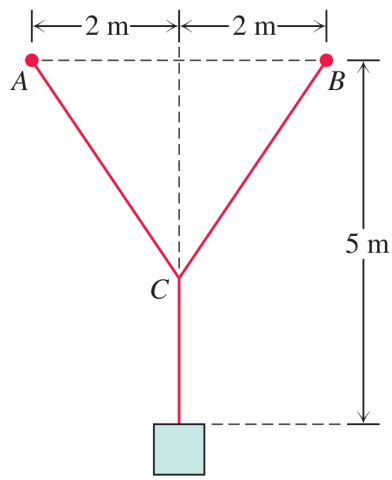
Como $A''(x) < 0$, $\forall x > 0$ y el único punto crítico de A es

$$x = \frac{32}{\pi + 4},$$

esto implica que $y = \dfrac{16}{\pi + 4}$ y estos son los valores que maximizan el área.

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.3.10. Se va a sostener un peso a 5 metros por debajo de una horizontal mediante una cable con forma de Y.



Si los puntos A y B están separados por 4 metros, ¿cuál es la longitud mínima del cable que se puede utilizar?

Solución: Sea y la altura del triángulo de la figura, la longitud del cable puede expresarse como

$$L(h) = 2\sqrt{y^2+4} + 5 - h,\ \forall h \in [0,5]\,.$$

Para $h \in]0,5[$, $L'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{3}$.

Como $L(0) = 9$, $L\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}+5 \approx 8.46$ y $L(5) = 2\sqrt{29} \approx 10.77$, la longitud mínima se alcanza cuando $h = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y su valor es $2\sqrt{3}+5$.

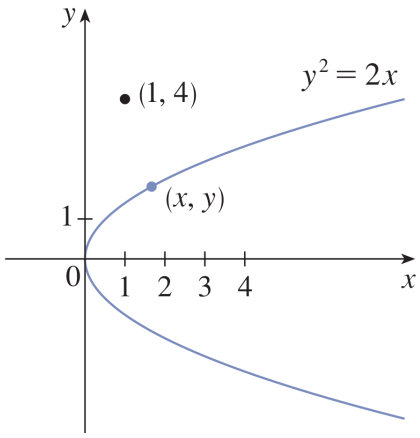
Fuente: G. Thomas, *Calculus*. Fifteenth Edition, Pearson, 2024.

3.3.11. Hallar el punto sobre la parábola de ecuación $y^2 = 2x$ más cercano a $(1, 4)$.

Solución: La distancia desde un punto (x, y) cualquiera del plano al punto $(1, 4)$ está determinada por

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

y si en particular, dicho punto está sobre la parábola de la figura,



entonces la distancia está dada por

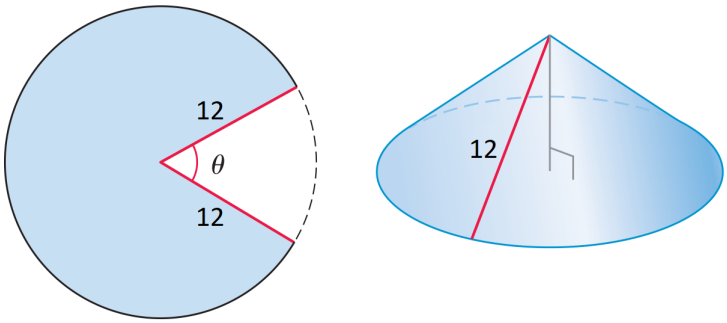
$$d(y) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Al considerar como función objetivo la cantidad subradical,

$$f(y) = \frac{y^4}{4} - 8y + 17, \ \forall y \in \mathbb{R}$$

dado que $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ y que $f''(y) = 3y^2 \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que f alcanza su mínimo absoluto cuando $y = 2$ y por lo tanto, el punto buscado es $(2, 2)$.

3.3.12. Un sector circular con ángulo central θ se corta de un círculo de radio 12 y los bordes rectos del sector se juntan para formar un cono. Determinar el valor de θ tal que el volumen del cono sea un máximo.



Solución: Sean r y h el radio y la altura del cono, por Teorema de Pitágoras, dado que

$$r^2 + h^2 = 144$$

el volumen puede expresarse como sigue

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left(144 - h^2\right) h,\ \forall h \in [0, 12]\,.$$

Para $h \in \,]0, 12[$, $V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 4\sqrt{3}$.

Como $V(0) = 0$, $V\left(4\sqrt{3}\right) = 128\sqrt{3}\pi$ y $V(12) = 0$, es claro que el máximo absoluto se alcanza cuando $h = 4\sqrt{3}$.

Por otra parte como la longitud del arco de un sector circular de radio r que subtiende un ángulo θ es

$$L = \theta r$$

y para el valor de h antes encontrado, se tiene que $r = 4\sqrt{6}$ y el perímetro de la base del cono es tal que

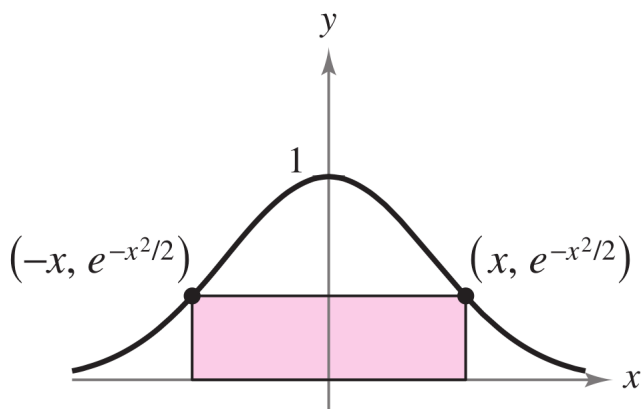
$$24\pi - 12\theta = 2\pi \cdot 4\sqrt{6},$$

de donde $\theta = 2\pi\left(1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) rad \approx 66°$.

Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.3.13. Encontrar el área del rectángulo más grande que se puede inscribir bajo la curva de ecuación $y = e^{-x^2}$ en el primer y segundo cuadrantes.

Solución: De la figura

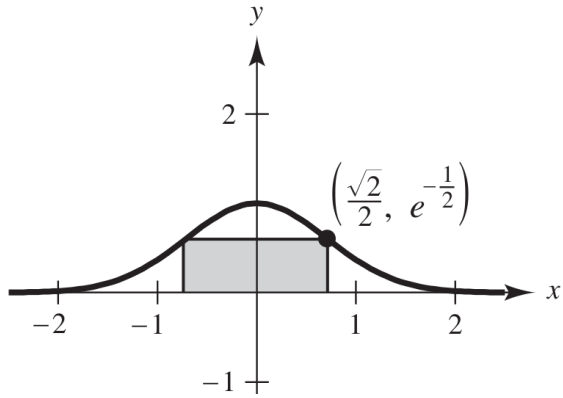


se observa que el área, en función de x, está dada por $A(x) = 2xe^{-x^2}, \forall x > 0$.

Ahora, al calcular la derivada de A se obtiene que

$$A'(x) = -\frac{4}{e^{x^2}}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

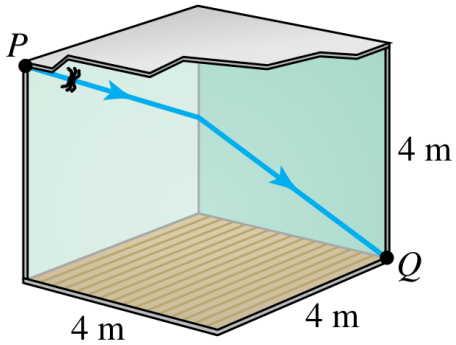
y por lo tanto, como $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ es el único punto crítico para A, A es creciente en $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ y es decreciente en $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$,



entonces el área máxima es $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-1/2}$.

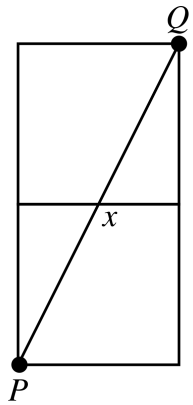
Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Seventh Edition, Cengage, 2019.

3.3.14. Considerar una habitación con forma de cubo, de 4 metros de lado. Un insecto en el punto P quiere caminar hasta el punto Q en la esquina opuesta, como se muestra en la figura.



¿Cuál es la longitud del recorrido más corto posible?

Solución: El problema puede formularse de la manera siguiente: Al considerar las dos paredes en un mismo plano, el xy, de modo que $P = (0, 0)$ y $Q = (4, 8)$;



la distancia recorrida por el insecto es

$$d(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(4 - x)^2 + 16},\ \forall x \in [0, 4]\,.$$

Para $x \in]0, 4[$, $d'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Como $d(0) = 4\sqrt{2} + 4 \approx 9.66$, $d(2) = 4\sqrt{5} \approx 8.94$ y $d(4) = 4\sqrt{2} + 4$, la distancia mínima que puede recorrer el insecto desde P hasta Q es $4\sqrt{5}$.

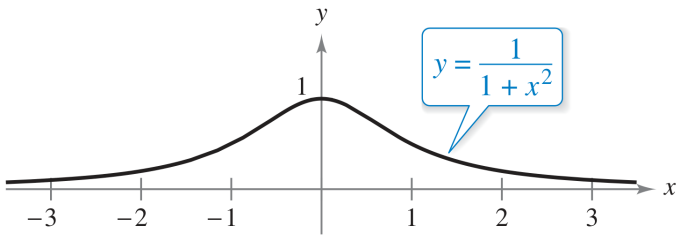
Fuente: R. Larson, B. Edwards, *Calculus*. Twelfth Edition, Cengage, 2023.

3.3.15. Sea C el arco la curva

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

que está en el primer cuadrante. Al rotar el rectángulo que tiene como vértices opuestos al origen y al punto $P = (x, y) \in C$ en torno al eje x, se obtiene un cilindro. Determinar el punto sobre C que genera el cilindro de mayor volumen.

Solución: Da la figura



se observa que el volumen del cilindro, cuyo eje central es parte del eje x, está dado por

$$V(x) = \pi \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 x, \ \forall x > 0.$$

Dado que,

$$\begin{aligned} V'(x) &= -\pi \frac{3x^2-1}{(x2+1)^3} \\ &= -\pi \frac{\left(\sqrt{3}x-1\right)\left(\sqrt{3}x+1\right)}{(x2+1)^3} \end{aligned}$$

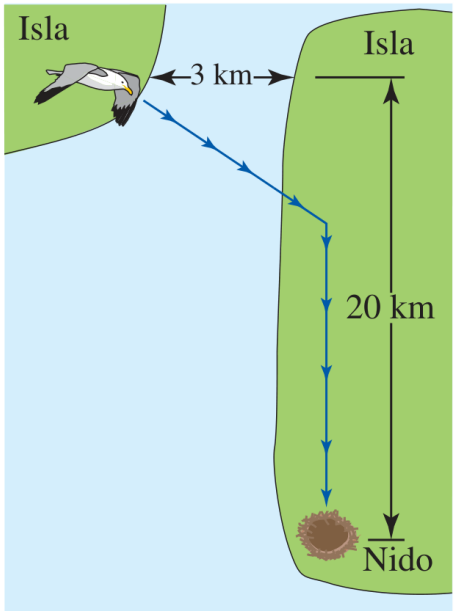
de la tabla de signos

x	0		$1/\sqrt{3}$	
$\sqrt{3}x-1$		$-$	0	$+$
$V'(x)$		$+$	0	$-$

se observa que $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ es el único punto crítico y en él, como V está definida en $]0, +\infty[$, alcanza el máximo absoluto.

De lo anterior, el punto $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$ es el que genera el cilindro de mayor volumen.

3.3.16. Algunas aves vuelan más lentamente sobre agua que sobre tierra. Un ave vuela a razones constantes de 6 km/h sobre agua y 10 km/h sobre tierra.



Dada la información de la figura, hallar la trayectoria que el ave debe seguir para minimizar el tiempo de vuelo entre la costa de una isla y su nido ubicado en la costa de otra.

Solución: Sea y la longitud del lado del triángulo rectángulo que está en la isla en donde está el nido. Las distancias sobre agua y sobre tierra son

$$d_{agua} = \sqrt{y^2+9} \quad \text{y} \quad d_{tierra} = 20 - y$$

respectivamente y entonces el tiempo total de vuelo está dado por

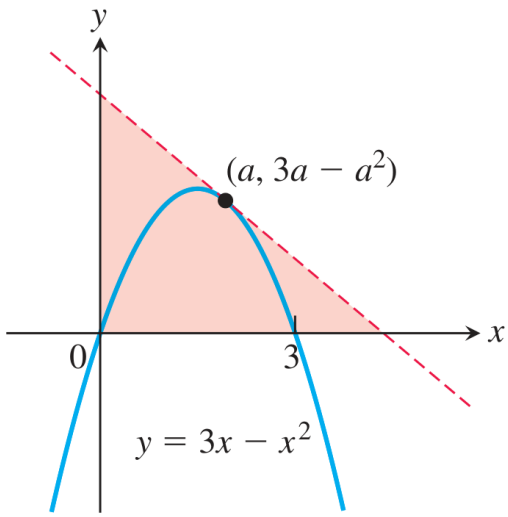
$$T(y) = \frac{\sqrt{y^2+9}}{6} + \frac{20-y}{10}, \forall y \in [0, 20]\,.$$

Para $y \in]0, 20[$, $T'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{9}{4}$.

Como $T(0) = \dfrac{5}{2} = 2.5$, $T\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{1}{4}\sqrt{13} + \dfrac{31}{20} \approx 2.45$ y $T(20) = \dfrac{1}{6}\sqrt{409} \approx 3.37$, el tiempo mínimo en que el ave puede hacer el trayecto es cuando $y = \dfrac{9}{4}$.

Fuente: D. Zill, W. Wright, *Cálculo de una variable*. Cuarta Edición, McGraw-Hill, 2011.

3.3.17. Entre todos los triángulos del primer cuadrante acotados por el eje x, el eje y y rectas tangentes al gráfico de $y = 3x - x^2$, ¿cuál es el de área más pequeña?



Solución: Dado que $\dfrac{d}{dx}(3x - x^2) = 3 - 2x$, la ecuación de la recta tangente al gráfico de la parábola en el punto $(a, 3a - a^2)$ es

$$y - 3a + a^2 = (3 - 2a)(x - a)$$

y ella es tal que:

- Junto con los ejes coordenados acota un triángulo cuando $\dfrac{3}{2} < a \leq 3$,
- intersecta al eje y en el punto $(0, a^2)$ e
- intersecta al eje x en el punto $\left(\dfrac{a^2}{2a - 3}, 0\right)$.

De lo anterior el área de los trángulos puede expresarse como

$$A(a) = \frac{a^4}{2(2a - 3)}, \quad \text{donde} \quad \frac{3}{2} < a \leq 3$$

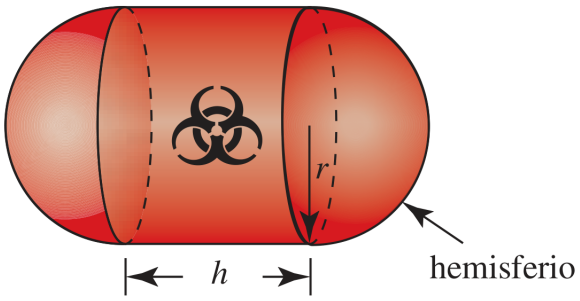
y como

- $A'(a) = 0 \Rightarrow a = 2$,
- $A'(a) < 0, \quad \text{para} \quad \dfrac{3}{2} < a < 2$ y
- $A'(a) > 0, \quad \text{para} \quad 2 < a < 3$

entonces el mínimo absoluto se alcanza cuando $a = 2$ y el valor del área es $A(2) = 8$.

Fuente: G. Thomas, *Calculus*. Fifteenth Edition, Pearson, 2024.

3.3.18. Un contenedor que transporta desechos peligrosos se fabrica de plástico pesado y se forma al unir dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto.



El volumen del contenedor debe ser de 30π pie^3 y el costo por pie^2 para los extremos es una vez y media del costo por pie^2 de la parte cilíndrica. Encontrar las dimensiones del contenedor de modo que su costo de produción sea mínimo.

Solución: El costo es proporcional a la expresión

$$\frac{3}{2} \cdot 4\pi r^2 + 2\pi r h. \tag{1}$$

Si h y r corresponden a la altura y el radio, entonces el volumen es

$$V = \pi r^2 h + \frac{4\pi r^3}{3},$$

de donde, si $V = 30\pi$ se tiene que

$$h = \frac{30}{r^2} - \frac{4r}{3}. \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1), se obtiene que la función a optimizar es

$$C(r) = \frac{10\pi r^2}{3} + \frac{60\pi}{r}, r > 0.$$

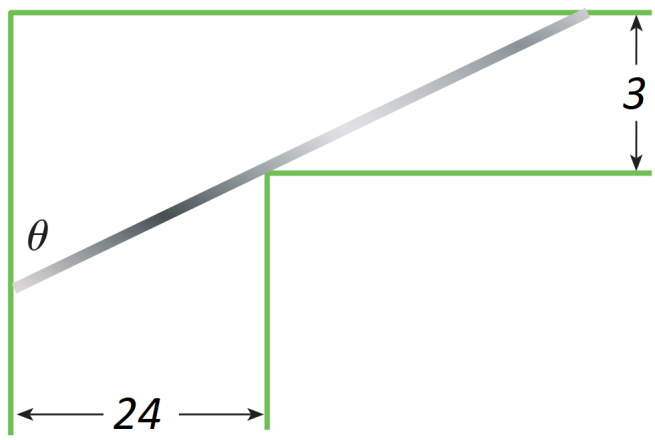
De lo anterior, dado que

$$C'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{9} \quad \text{y} \quad C''(r) > 0, \forall r > 0;$$

el mínimo absoluto se alcanza cuando $r = \sqrt[3]{9}$ y $h = 2\sqrt[3]{9}$.

Fuente: D. Zill, W. Wright, *Cálculo de una variable*. Cuarta Edición, McGraw-Hill, 2011.

3.3.19. ¿Cuál es la longitud de la varilla más grande que se puede transportar horizontalmente por una esquina en que confluyen dos pasillos de anchuras $a = 24$ y $b = 3$?



Solución: De la figura, la longitud de una varilla que **no** *puede* pasar por la esquina en función del ángulo, es

$$L(\theta) = 24\csc(\theta) + 3\sec(\theta), \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

en donde se observa que $\lim\limits_{\theta\to 0} L(\theta) = +\infty = \lim\limits_{\theta\to\pi/2} L(\theta)$; por lo tanto, el problema consiste en hallar el mínimo absoluto para L.

Como $L'(\theta) = -24\csc(\theta)\cot(\theta) + 3\sec(\theta)\tan(\theta)$, se obtiene que

$$L'(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \theta_0 = \arctan\left(\sqrt[3]{8}\right)$$

y dado que $L''(\theta) > 0\,\forall\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, el mínimo absoluto es

$$L(\theta_0) = 15\sqrt{5}$$

y este valor es la máxima longitud de la varilla que sí puede pasar por la esquina.

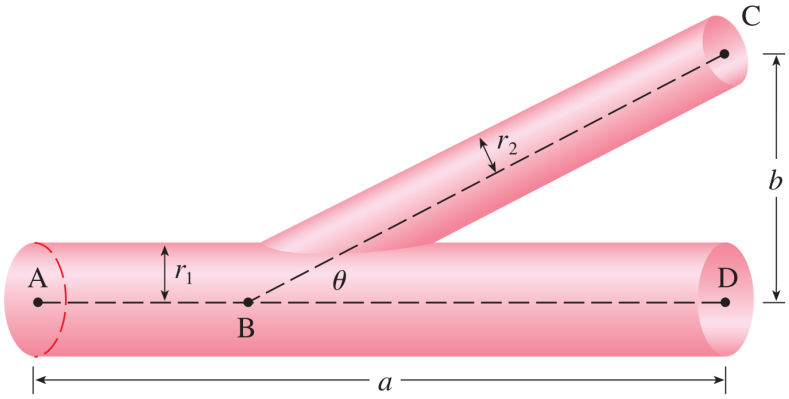
Fuente: J. Rogawski, C. Adams, R. Franzosa *Calculus: Early transcendentals*. Fourth Edition, Macmillan Learning, 2019.

3.3.20. La sangre es transportada por el cuerpo mediante el tejido vascular, que consta de vasos capilares, venas, arteriolas y arterias que llevan la sangre desde el corazón a los órganos y de vuelta al corazón. Una consideración para optimizar la energía utilizada para mover la sangre consiste en encontrar un ángulo θ para la *ramificación vascular* de modo que sea mínima la resistencia total de la sangre a lo largo de una trayectoria de un vaso capilar más grande a uno más pequeño.

La **Ley de Poiseuille**, establece que la resistencia R de un vaso capilar de longitud L y su radio r son tales que

$$R = k\frac{L}{r^4},$$

donde $k > 0$ es una constante determinada por la viscosidad de la sangre. En la figura se muestra un vaso sanguíneo principal de radio r_1 que se ramifica con un ángulo θ en un vaso más pequeño de radio r_2.



a) Expresar la resistencia total R de la sangre a lo largo de la trayectoria ABC en función del ángulo de ramificación.

b) Verificar que R toma su valor mínimo cuando

$$\cos(\theta) = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

c) Determinar el ángulo óptimo cuando el radio del vaso sanguíneo más pequeño es dos tercios del radio del vaso más grande.

Solución:

a) De la figura se observa que

$$\sin(\theta) = \frac{b}{|\overline{BC}|} \Rightarrow |\overline{BC}| = b\csc(\theta) \quad \text{y} \quad \cos(\theta) = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{BC}|} \Rightarrow |\overline{BC}| = \big(a - |\overline{AB}|\big)\sec(\theta),$$

de donde $b\csc(\theta) = \big(a - |\overline{AB}|\big)\sec(\theta)$ y entonces

$$\overline{AB} = a - b\cot(\theta),$$

por lo tanto, de la Ley de Poiseuille,

$$R(\theta) = k\frac{|\overline{AB}|}{r_1^4} + k\frac{|\overline{BC}|}{r_2^4} = k\left(\frac{a - b\cot(\theta)}{r_1^4} + \frac{b\csc(\theta)}{r_2^4}\right), 0 < \theta < \pi$$

b) Dado que $R'(\theta) = bk\csc(\theta)\left(\frac{\csc(\theta)}{r_1^4} - \frac{\cot(\theta)}{r_2^4}\right)$, se tiene que

$$R'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{\csc(\theta)}{r_1^4} = \frac{\cot(\theta)}{r_2^4} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{r_2^4}{r_1^4};$$

además como $\sin(\theta) > 0$ para $0 < \theta < \pi$ y arccos es función decreciente,

$$R'(\theta) < 0 \Leftrightarrow \theta < \arccos\left(\frac{r_2^4}{r_1^4}\right) \quad \text{y} \quad R'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta > \arccos\left(\frac{r_2^4}{r_1^4}\right)$$

y se concluye que cuando $\cos(\theta) = \frac{r_2^4}{r_1^4}$, R alcanza su mínimo absoluto.

c) Si $r_2 = \frac{2}{3}r_1$, se obtiene que

$$\theta = \arccos\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right] \approx 79^\circ.$$

Fuente: D. Zill, W. Wright, *Cálculo de una variable*. Cuarta Edición, McGraw-Hill, 2011.

3.3.21. Considerar un cilindro circular recto de volumen igual a 1 litro.

a) ¿Cuáles son las dimensiones que minimizan su área?

b) ¿Existirán dimensiones que maximizan su área?

Solución:

a) Si la altura h y el radio r están en centímetros, entonces su área está dada por

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, r > 0$$

y por lo tanto, como el único punto crítico es $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ y dado que $A''(r)$ toma siempre valores positivos, en dicho punto se alcanza el mínimo absoluto y él es tal que $h = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$.

b) No, pues como

$$\lim_{r\to 0^+} A(r) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{r\to +\infty} A(r) = +\infty,$$

el cilindro podría ser muy ancho y bajo, o muy delgado y alto, en ambos casos con área *muy* grande.

Observación: En la respuesta a la primera pregunta se tiene que la relación entre la altura y el radio, en general, no depende del volumen del cilindro. Al parecer algunas empresas conocen este problema y (al diseñar sus envases consideran) su solución; por ejemplo, en los tarros del *lujoso* Nescafé Tradición

se observa que $h \approx 2r$.

Fuente: G. Thomas, *Calculus*. Fifteenth Edition, Pearson, 2024.

3.4. Regla de L'Hôpital

3.4.1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

a) Sin utilizar L'Hôpital.

b) Utilizando L'Hôpital.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\right)\\
&= 1^2\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$

3.4.2. Utilizar la Regla de L'Hôpital para determinar el valor de los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{x}$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x^2}$

$d)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln(x)}{x^3-3x+2}$

$e)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

$f)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\ln(x)}$

$g)\ \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$

$h)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\left(e^x+2\right)}{x}$

$i)\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2\sec(x)}\right)$

$j)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(4x)}{1}=4\lim_{x\to 0}\cos(4x)=4\cdot 1=4$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1}=\frac{0}{1}=0$$

$$c)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+e^{-x}}{2x}=-\infty$$

$$d)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln(x)}{x^3-3x+2}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1/x-1}{3x^2-3}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{3x(x+1)}=-\frac{1}{6}$$

$$e)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

$$f)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\ln(x)}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1/x}=\lim_{x\to +\infty}x=+\infty$$

$$g)\ \lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0^+}x=0$$

$$h)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(e^x+2\right)}{x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{e^x+2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1$$

$$i)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\overset{\text{(L'H)}}{=}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

$$j)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=1\cdot 1=1$$

3.4.3. Sea f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + x & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$, calcular $f'(0)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin(x)}{x} + x - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + x^2 - x}{x^2} \\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + 2x - 1}{2x} \\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - \sin(x)}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3.4.4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin(x)}$

Solución: Dado que $x^{\sin(x)} = e^{\ln(x^{\sin(x)})} = e^{\sin(x)\ln(x)}$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\csc(x)} \\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc(x)\cot(x)} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x))}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= (-1)\cdot 1 \cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

se tiene que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = e^0 = 1$.

3.4.5. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x}$

Solución: Sea $y=\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x}$, como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\ln(y) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)}{x}\\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}\\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{x\cos(x)+\sin(x)}\\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)+\sin(x)}{x\sin(x)-2\cos(x)}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

se tiene que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x}=1.$

3.4.6. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{x}$

Solución: El límite es de la forma indeterminada $0/0$, aplicando la Regla de L'Hôpital, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}\left(3^x - 1\right)}{1}.$$

Para calcular la derivada de $y = 3^x$, se puede aplicar logaritmo y luego derivación implícita,

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left(3^x\right) \\
\ln y &= x\ln(3) \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \ln(3) \\
\frac{dy}{dx} &= y\ln(3) \\
\frac{dy}{dx} &= \ln(3)\, 3^x,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \ln(3) \lim_{x\to 0} 3^x = \ln(3).$$

3.4.7. Hallar los valores de a y b de modo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{a-\cos(bx)}{x^2} = 2.$$

Solución: Si $x \to 0$, $\cos(bx) \to 1$ y $x^2 \to 0$, por lo tanto; para que el límite exista (como el denominador tiende a cero, el numerador debe también tender a cero), a necesariamente debe ser igual 1.

Ahora, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{a-\cos(bx)}{x^2} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{b\sin(bx)}{2x} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{b^2\cos(bx)}{2}$$

se tiene que el límite es 2, si y sólo si, $b^2 = 4$.

De lo anterior, $a = 1$ y $b = \pm 2$.

3.4.8. Decidir, si

$$f(x) = \begin{cases} \left(x + e^{x/2}\right)^{2/x} & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x_0 = 0$.

Solución: Como $\lim\limits_{x \to 0} \left(x + e^{x/2}\right)^{2/x}$ es de la forma indeterminada $1^{+\infty}$, al considerar $y = f(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} (\ln(y)) &= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(x + e^{x/2}\right)}{x} \\ &= 2 \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{1}{2} e^{x/2}}{x + e^{x/2}}, \text{ se ha aplicado L'Hôpital} \\ &= 3 \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e^3$.

De lo anterior, como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$, f no es continua en $x_0 = 0$.

3.4.9. Sea f una función de clase C^2 en $\mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$. Verificar que la función

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & , \quad x\neq 0 \\ f'(0) & , \quad x=0 \end{cases}$$

es de clase C^1 en $\mathbb{R}$.

Solución: Para $x\neq 0$, $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Por otra parte, como

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2},$$

(se utilizó dos veces la regla de L'Hôpital) se tiene que $g'(0)=\dfrac{f''(0)}{2}$.

Para $x_0\neq 0$, se tiene que

$$\lim_{x\to x_0}g'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}=g'(x_0)$$

por lo que g' es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y en el origen, se tiene

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=g'(0),$$

(en el cálculo del límite anterior se utilizó la regla de L'Hôpital); luego, como g' también es continua en el origen, entonces ella es continua en todo $\mathbb{R}$, es decir, g es de clase C^1 en dicho conjunto.

4. La integral

4.1. Teorema Fundamental del Cálculo

4.1.1. Calcular $F'(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $F(x) = \displaystyle\int_2^x e^{t^3}\,dt$

b) $F(x) = \displaystyle\int_3^{x^3+x+1} \left(t^4 + 5t^2\right) dt$

c) $F(x) = \displaystyle\int_{3x^3}^{x^4} \sin(t^2)\,dt$

Solución:

a) $F'(x) = e^{x^3}$

b) $F'(x) = \left[(x^3+x+1)^4 + 5(x^3+x+1)^2\right](3x^2+1)$

c) $F'(x) = 4x^3\sin(x^8) - 9x^2\sin(9x^6)$

4.1.2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida por

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\ dt & , \quad x \neq 0 \\ f(0) & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Analizar la continuidad de F en $x_0 = 0$.

Solución: Al tomar límite a F cuando x se acerca a 0, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} F(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt}{2x} \\ &\overset{\text{(L'H y TFC)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(-x)\cdot -1}{2} \\ &= f(0), \end{aligned}$$

de donde $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0)$ y por lo tanto F es continua en $x_0 = 0$.

4.1.3. Sea $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt$, definida para $x > 0$. Calcular $f'(x)$ e indicar los intervalos de crecimiento para f.

Solución: Utilizando el Teorema fundamental del Cálculo para hallar la derivada de f, se tiene

$$f'(x) = \frac{\ln(x^2)}{x} \cdot 2x - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \ln(x)\left(4 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Los puntos críticos para f son $x = \dfrac{1}{16}$ y $x = 1$.

La tabla de signos asociada a f' está dada por

x		$1/16$		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

por lo que f es creciente en los intervalos $\left]0, \dfrac{1}{16}\right[$ y $]1, +\infty[$.

4.1.4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\displaystyle\int_0^{\sin(x)} e^{-t^2}\,dt}{1-\cos(x)}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\displaystyle\int_0^{\sin(x)} e^{-t^2}\,dt}{1-\cos(x)} &\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\sin(x)} e^{-t^2}\,dt + xe^{-\sin^2(x)}\cos(x)}{\sin(x)} \\
&\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-\sin^2(x)}\cos(x) + x\dfrac{d}{dx}\left(e^{-\sin^2(x)}\cos(x)\right)}{\cos(x)} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

4.1.5. Decidir si $y = \displaystyle\int_0^x e^{x^2-t^2}dt$ es una solución de la ecuación diferencial

$$y' = 2xy + 1.$$

Solución: Considerando $y = f(x) = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$, se tiene que

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) \\ &= 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2-x^2} \\ &= 2x\int_0^x e^{x^2-t^2}dt + 1 \\ &= 2xy + 1, \end{aligned}$$

de donde es claro que y satisface la ecuación indicada.

4.1.6. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$. Hallar la expresión para $f(x)$ y luego calcular $\displaystyle\int_0^{e^2-1} f(x)\,dx$.

Solución: Del TFC se tiene que $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,dt\right) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$

y como $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(-\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) = \frac{2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(x+1)}{(x+1)^2}$, se tiene que

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(x+1)}{(x+1)^2},$$

de donde $f(x) = \dfrac{2x-(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$.

Por otra parte, como

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2},$$

$\displaystyle\int f(x)\,dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C$, y por lo tanto

$$\int_0^{e^2-1} f(x)\,dx = 2 + \frac{2}{e^2} - \ln 1 - 2 = \frac{2}{e^2}.$$

4.1.7. Una curva continua de ecuación $y = f(x)$ pasa del origen al primer cuadrante. El área bajo la curva de $(0,0)$ a cada punto (x,y) y sobre el eje x, es un tercio del área del rectángulo que, con lados paralelos a los ejes, tiene esos puntos como vértices. ¿Cuál es la ecuación de la curva?

Solución: Como el área bajo la curva es $\int_0^x f(t)dt$ y el área del rectángulo es xy, se tiene

$$\frac{xy}{3} = \int_0^x f(t)dt.$$

De la continuidad de f y del Teorema Fundamental del Cálculo, al derivar en la igualdad anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) &= f(x) \\
x\frac{dy}{dx} &= 2y \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{2}{x} \\
\frac{d}{dx}\left(\ln(y)\right) &= \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

de donde, al integrar con respecto a x, se llega a $\ln(y) = \ln(x^2) + C$ y por lo tanto, la ecuación de la curva es $y = kx^2$, con k constante positiva.

El logaritmo natural como integral

Sea $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $f(t) = \dfrac{1}{t}, \forall t > 0$. El logaritmo natural ln, se define como la primitiva de f en $\mathbb{R}^+$, dada por

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \end{aligned}$$

4.1.8. Utilizar la definición de logaritmo natural como integral para demostrar que:

a) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \forall a, b > 0$

b) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \forall a, b > 0$

c) $\ln(x^r) = r\ln(x), \forall x > 0, \forall r$

Solución:

a) Sea $g(x) := \ln(ax)$, con $x > 0$. De la regla de la cadena se tiene que $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ y como ln y g tienen igual derivada, entonces ellas difieren de una constante y

$$\ln(ax) = \ln(x) + C,$$

de donde al considerar $x = 1$, se obtiene que $\ln(a) = C$ y por lo tanto,

$$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$$

de donde es claro que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \forall a, b > 0$.

b) Si $a, b > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} a = \frac{a}{b} \cdot b \quad &\Rightarrow \quad \ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b) \\ &\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b). \end{aligned}$$

c) Definiendo $p(x) := r\ln(x)$ y $q(x) := \ln(x^r)$, del Teorema Fundamental del Cálculo y la regla de la cadena, se obtiene que

$$p'(x) = \frac{r}{x} = q'(x)$$

y dado que $p(1) = 0 = q(1)$, entonces $p(x) = q(x)\ \forall x > 0$ y por lo tanto,

$$\ln(x^r) = r\ln(x), \forall x > 0, \forall r.$$

4.2. Cálculo de integrales indefinidas

4.2.1. Evaluar la integral

$$\int \sin^3(x)\,dx.$$

Solución: Dado que la integral puede reescribirse como

$$\int \sin^3(x)\,dx = \int \left(1-\cos^2(x)\right)\sin(x)\,dx,$$

al utilizar el cambio de variable $z=\cos(x)$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \sin^3(x)\,dx &= \int \left(z^2-1\right)dz\\ &= \frac{z^3}{3}-z+C\\ &= \frac{\cos^3(x)}{3}-\cos(x)+C.\end{aligned}$$

4.2.2. Utilizar integración por sustitución para evaluar las siguiente integrales:

a) $\displaystyle\int 10x\sin(5x^2)\,dx$

b) $\displaystyle\int xe^{3x^2+7}dx$

c) $\displaystyle\int \sec(x)\,dx$

Solución:

a) De la sustitución $z = 5x^2$, como $\dfrac{dz}{dx} = 10x$, se tiene

$$\int 10x\sin(5x^2)\,dx = \int \sin(z)\,dz = -\cos(z) + C = -\cos(5x^2) + C.$$

b) Del cambio $z = 3x^2 + 7$, como $\dfrac{dz}{dx} = 6x$, entonces la integral es

$$\int xe^{3x^2+7}dx = \frac{1}{6}\int e^z dz = \frac{1}{6}e^z + C = \frac{1}{6}e^{3x^2+7} + C.$$

c) Como $\sec(x) = \sec(x)\cdot\dfrac{\sec(x)+\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)} = \dfrac{\sec(x)\tan(x)+\sec^2(x)}{\sec(x)+\tan(x)}$, la integral se escribe como

$$\int \sec(x)\,dx = \int \frac{\sec(x)\tan(x)+\sec^2(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,dx$$

y al considerar $z = \sec(x) + \tan(x)$, se obtiene que

$$\int \sec(x)\,dx = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z| + C = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C.$$

4.2.3. Utilizando en cada caso, una sustitución adecuada, calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int 2x(x^2+7)^5 dx$

b) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+7}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}dx$

Solución:

a) Al considerar el cambio $z = x^2+7$, se tiene que

$$\int 2x(x^2+7)^5 dx = \int z^5 dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{(x^2+7)^6}{6} + C$$

b) De $z = x^2+7$ y considerando que $x^3 = x^2 \cdot x$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{x^2+7}\,dx &= \frac{1}{2}\int (z-7)z^{1/2}dz \\
&= \frac{1}{2}\int \left(z^{3/2} - 7z^{1/2}\right) dz \\
&= \frac{1}{5}z^{5/2} - \frac{7}{3}z^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{5}(x^2+7)^{5/2} - \frac{7}{3}(x^2+7)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

c) Como $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1+e^x-e^x}{e^x+1} = \dfrac{1+e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x+1} = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1}$, se tiene que

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = x - \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx.$$

Para la integral $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$, del cambio $z = e^x+1$, se tiene que

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{z}dz = \ln|z| + C.$$

De lo anterior, $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}dx = x - \ln(e^x+1) + C.$

4.2.4. Calcular la integral $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,dx$ considerando:

a) La sustitución $z = \sin(x)$,

b) la sustitución $z = \cos(x)$ y

c) la identidad $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ y la sustitución $z = 2x$.

Solución:

a) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$

b) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C$

c) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C.$

4.2.5. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \sin^8(x)\cos^3(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \cos^4(x)\,dx$

Solución:

a) De la identidad fundamental se tiene que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, por lo que la integral queda

$$\int \sin^8(x)\cos^3(x)\,dx = \int \left(\sin^8(x) - \sin^{10}(x)\right)\cos(x)\,dx.$$

De lo anterior y del cambio de variable $u = \sin(x)$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \sin^8(x)\cos^3(x)\,dx &= \int \left(u^8 - u^{10}\right)du \\ &= \frac{u^9}{9} - \frac{u^{11}}{11} + C \\ &= \frac{\sin^9(x)}{9} - \frac{\sin^{11}(x)}{11} + C\end{aligned}$$

b) De la identidad $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)$, la integral puede escribirse como

$$\int \cos^4(x)\,dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + \cos(2x)\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right)dx.$$

Nuevamente, al utilizar la misma identidad, se tiene que $\cos^2(2x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos(4x)\right)$ y por lo tanto,

$$\int \cos^4(x)\,dx = \frac{1}{4}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int \left(1 + \cos(4x)\right)\,dx$$

de donde se obtiene que

$$\int \cos^4(x)\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + C.$$

4.2.6. Utilizando integración por partes, calcular la integral

$$\int t^2 e^t \, dt.$$

Solución: Al integrar por partes, considerando $u = t^2$ y $dv = e^t \, dt$, se tiene que

$$\int t^2 e^t \, dt = t^2 e^t - 2 \int t e^t \, dt.$$

En la igualdad anterior, al calcular la integral que aparece en el lado derecho, integrando nuevamente por partes con $u = t$ y $dv = e^t \, dt$ se tiene que

$$\int t e^t \, dt = t e^t - \int e^t \, dt = t e^t - e^t + C.$$

De lo anterior, se obtiene

$$\int t^2 e^t \, dt = e^t (t^2 - 2t + 2) + C.$$

4.2.7. Mediante integración por partes calcular:

a) $\displaystyle\int x\sin(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int e^x\sin(x)\,dx$

Solución:

a) Al considerar $u = x$ y $dv = \sin(x)\,dx$, se tiene que

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = -\cos(x)\,,$$

de donde

$$\begin{aligned}\int x\sin(x)\,dx &= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx \\ &= -x\cos(x) + \sin(x) + C.\end{aligned}$$

b) Al considerar $u = \ln(x)$ y $dv = dx$, se tiene que

$$du = \frac{1}{x}\,dx \quad \text{y} \quad v = x\,,$$

de donde

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,dx &= x\ln(x) - \int 1\,dx \\ &= x\ln(x) - x + C.\end{aligned}$$

c) Con $u = e^x$ y $dv = \sin(x)\,dx$, se tiene que $du = e^{2x}dx$ y $v = -\cos(x)$ y la integral queda

$$I := \int e^x\sin(x)\,dx = -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\,dx.$$

Al integrar nuevamente por partes, con $u = e^x$ y $dv = \cos(x)\,dx$, se tiene que $du = e^x dx$ y $v = \sin(x)$ y la integral queda

$$I = -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - I,$$

y por lo tanto,

$$\int e^x\sin(x)\,dx = \frac{e^x}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + C.$$

4.2.8. Calcular la integral $\displaystyle\int e^{2x}\cos(7x)\,dx$.

Solución: Con $u = e^{2x}$ y $dv = \cos(7x)\,dx$, se tiene que $du = 2e^{2x}dx$ y $v = \dfrac{1}{7}\sin(7x)$ y la integral queda

$$\int e^{2x}\cos(7x)\,dx = \frac{1}{7}e^{2x}\sin(7x) - \frac{2}{7}\int e^{2x}\sin(7x)\,dx.$$

Al integrar nuevamente por partes, con $u = e^{2x}$ y $dv = \sin(7x)\,dx$, se tiene que $du = 2e^{2x}dx$ y $v = -\dfrac{1}{7}\cos(7x)$ y la integral queda

$$\int e^{2x}\cos(7x)\,dx = \frac{1}{7}e^{2x}\sin(7x) - \frac{2}{7}\left[-\frac{1}{7}e^{2x}\cos(7x) + \frac{2}{7}\int e^{2x}\cos(7x)\,dx\right],$$

de donde se obtiene

$$\int e^{2x}\cos(7x)\,dx = \frac{e^{2x}}{53}\left(2\cos(2x) + 7\sin(2x)\right) + C.$$

4.2.9. Utilizando el cambio $z = x^2$ y luego integración por partes, calcular la integral

$$\int x^5 \cos(x^2)\, dx.$$

Solución: Considerando que $x^5 = (x^2)^2 \cdot x$ y la sustitución indicada, se tiene que

$$\int x^5 \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int z^2 \cos(z)\, dz.$$

Al integrar por partes considerando $u = z^2$ y $dv = \cos(z)\, dz$, se tiene que $du = 2z\, dz$ y $v = \sin(z)$ y la integral queda

$$\frac{1}{2} \int z^2 \cos(z)\, dz = \frac{1}{2} z^2 \sin(z) - \int z \sin(z)\, dz.$$

En la igualdad anterior, al calcular la integral que aparece en el lado derecho, integrando nuevamente por partes con $u = z$ y $dv = \sin(z)\, dz$ se tiene que

$$\int z \sin(z)\, dz = -z \cos(z) + \int \cos(z)\, dz = -z \cos(z) + \sin(z) + C$$

y por lo tanto, $\displaystyle\int x^5 \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} x^4 \sin(x^2) + x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2) + C.$

4.2.10. Utilizar descomposición en suma de fracciones y calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{8x+4}{x^2+2x-3}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2-6x+3}{x^3-3x^2+x-3}\,dx$

Solución:

a) Al descomponer el integrando, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{8x+4}{x^2+2x-3} &= \frac{5x-5+3x+9}{(x+3)(x-1)}\\ &= \frac{5(x-1)}{(x+3)(x-1)}+\frac{3(x+3)}{(x+3)(x-1)}\\ &= \frac{5}{x+3}+\frac{3}{x-1}\end{aligned}$$

y $\displaystyle\int \frac{8x+4}{x^2+2x-3}\,dx = 5\ln|x+3|+3\ln|x-1|+C$

b) De $\dfrac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,dx &= \int \frac{2}{x-1}\,dx-\int \frac{1}{x+3}\,dx+\int \frac{3}{x}\,dx\\ &= 2\ln|x-1|-\ln|x+3|+3\ln|x|+C\\ &= \ln\left|\frac{x^3(x-1)^2}{x+3}\right|+C\end{aligned}$$

c) Como $\dfrac{5x^2-6x+3}{x^3-3x^2+x-3} = \dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{3}{x-3}$,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2-6x+3}{x^3-3x^2+x-3}\,dx &= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int \frac{3}{x-3}\,dx\\ &= \ln\left(x^2+1\right)+3\ln|x-3|+C\\ &= \ln\left|(x-3)^3(x^2+1)\right|+C\end{aligned}$$

4.2.11. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \cos\left(\ln(x)\right)\, dx$

b) $\displaystyle\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x) + \tan(x)\right) dx$

Solución:

a) Con $t = \ln(x)$, se tiene que $dx = e^t\, dt$ e integrando por partes dos veces,

$$\begin{aligned}
\int \cos\left(\ln(x)\right)\, dx &= \int e^t \cos(t) \\
&= e^t \sin(t) - \int e^t \sin(t)\, dt \\
&= e^t \sin(t) + e^t \cos(t) - \int e^t \cos(t)\, dt
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int e^t \cos(t)\, dt = \frac{e^t}{2}\left(\sin(t) + \cos(t)\right) + C$

luego, $\displaystyle\int \cos(\ln(x))dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))\right) + C.$

b) $\displaystyle\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x) + \tan(x)\right) dx = \int \left(\sec^4(x)\tan^2(x)\right) dx + \int \tan(x)\, dx$

Para la primera integral, como $\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1$, al considerar el cambio de variable $z = \tan(x)$, dado que $dz = \sec^2(x)\, dx$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x)\right) dx &= \int \left(\tan^4(x) + \tan^2(x)\right)\sec^2(x)\, dx \\
&= \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} + C \\
&= \frac{1}{5}\tan^5(x) + \frac{1}{3}\tan^3(x) + C
\end{aligned}$$

Para la segunda integral, haciendo una sustitución simple, se tiene

$$\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\tan(x)}{\sec(x)}\sec(x)\, dx = \ln|\sec(x)| + C$$

y entonces

$$\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x) + \tan(x)\right) dx = \frac{1}{5}\tan^5(x) + \frac{1}{3}\tan^3(x) + \ln|\sec(x)| + C.$$

4.2.12. Utilizar sustitución trigonométrica para calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+13}\,dx$

Solución:

a) Del cambio $t = x^3$, se tiene que $dt = 3x^2\,dx \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}dt = x^2\,dx$ y entonces

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{16-t^2}}\,dt.$$

Para la integral en términos de t se considerará la sustitución $t = 4\sin\theta$, de donde $dt = 4\cos\theta\,d\theta$ y $\sqrt{16-t^2} = 4\cos\theta$, luego

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{16-t^2}}\,dt = \frac{1}{3}\int 1\,d\theta = \frac{\theta}{3} + C = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{t}{4}\right) + C.$$

De lo anterior, $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x^3}{4}\right) + C$

b) Como $x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$, del cambio

$$x - 2 = 3\tan\theta$$

se tiene que $dx = 3\sec^2\theta$ y $x^2 - 4x + 13 = 9\sec^2\theta$, de donde

$$\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,dx = \frac{1}{3}\int 1\,d\theta = \frac{\theta}{3} + C = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$$

4.2.13. Calcular:

a) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\ dx$

b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{2x+1}}\ dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^9+x}\ dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6-1}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx$

f) $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ dx$

Solución:

a) Como $\displaystyle\sqrt{\frac{x-1}{x^5}} = \sqrt{\frac{1}{x^4}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/2}$, al considerar el cambio de variable $y = 1-\dfrac{1}{x}$, se tiene que $dy = \dfrac{1}{x^2}\ dx$ y

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\ dx = \int y^{1/2}\ dy = \frac{2}{3}y^{3/2}+C = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3/2}+C$$

b) Al considerar la sustitución $z=\sqrt{2x+1}$, se tiene que

$$dz = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\ dx \Leftrightarrow z\,dz = dx$$

y entonces

$$\int e^{\sqrt{2x+1}}\ dx = \int\ ze^z\ dz \overset{\text{(Int. por partes)}}{=} e^{\sqrt{2x+1}}\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+C$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^9+x}\ dx = \int \frac{x^8+1-x^8}{x\left(x^8+1\right)}\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx - \int \frac{x^7}{x^8+1}\ dx$

Al considerar el cambio $t = x^8+1$, se tiene que $\dfrac{1}{8}\ dt = x^7\ dx$, luego

$$\int \frac{x^7}{x^8+1}\ dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{t}\ dt = \frac{1}{8}\ln|x^8+1|+C$$

De lo anterior, $\displaystyle\int \frac{1}{x^9+x}\ dx = \ln|x| - \frac{1}{8}\ln\left(x^8+1\right)+C$

$d)$ Al considerar el cambio $z = x^3$, se tiene que $\dfrac{1}{3}dz = x^2\,dx$ y

$$\int \frac{x^2}{x^6-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{z^2-1}\,dz.$$

Por otra parte, como $\dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{2\,(z-1)} - \dfrac{1}{2\,(z+1)}$, la integral queda

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^6-1}\,dx &= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1}\,dz\right\} \\
&= \frac{1}{6}\left\{\ln|z-1| - \ln|z+1|\right\} + C \\
&= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + C.
\end{aligned}$$

$e)$ Como $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$, al considerar el cambio $x - 1 = \sin t$, se tiene que

$$dx = \cos t\,dt,\ x^2 = (\sin t + 1)^2\,,\ \sqrt{2x-x^2} = \cos t \text{ y entonces}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx &= \int \left(\sin^2 t + 2\sin t + 1\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int (1-\cos(2t))\,dt - 2\cos t + t + C \\
&= \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} - 2\cos t + t + C \\
&= \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\sin t\cos t - 2\cos t + C \\
&= \frac{3}{2}\arcsin(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} - 2\sqrt{2x-x^2} + C
\end{aligned}$$

$f)$ Al integrar por partes, eligiendo $u = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ y $dv = dx$, se tiene que

$$du = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx,\ \text{ y } v = x$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx &= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx. \\
&= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + C
\end{aligned}$$

4.2.14. Calcular las integrales:

a) $\displaystyle\int (2x^2+1)e^{x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx$

Solución:

a) Al desarrollar y reescribir el integrando, se tiene que

$$\begin{aligned}\int (2x^2+1)e^{x^2}\,dx &= \int \left(2x^2e^{x^2}+e^{x^2}\right)\,dx\\ &= \int 2x^2e^{x^2}\,dx+\int e^{x^2}\,dx\\ &= \int x\cdot 2xe^{x^2}\,dx+\int e^{x^2}\,dx\end{aligned}$$

y considerando $u=x$ y $dv=2xe^{x^2}dx$, dado que $du=dx$ y $v=e^{x^2}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\int (2x^2+1)e^{x^2}\,dx &= xe^{x^2}-\int e^{x^2}\,dx+\int e^{x^2}\,dx\\ &= xe^{x^2}+C\end{aligned}$$

b) Dado que

$$\frac{2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}=\frac{2x\cdot x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2},$$

si $u=x^2e^{x^2}$ y $dv=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}dx$, como $du=2x(x^2+1)e^{x^2}$ y $v=-\dfrac{1}{x^2+1}$, la integral queda

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx &= -\frac{x^2e^{x^2}}{x^2+1}+\int 2xe^{x^2}\,dx\\ &= -\frac{x^2e^{x^2}}{x^2+1}+e^{x^2}+C\\ &= \frac{e^{x^2}}{x^2+1}+C\end{aligned}$$

4.2.15. Hallar la ecuación de la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(1, 2)$ y es tangente a la recta de ecuación $4x - y = 2$ en dicho punto, sabiendo además que

$$y'' = 6x + 2.$$

Solución: Dado que $f''(x) = 6x + 2$, integrando se tiene que

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + C.$$

Como la recta indicada tiene pendiente 4, entonces

$$f'(1) = 4$$

y se obtiene que $C = -1$.

Integrando nuevamente, se tiene

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + \tilde{C},$$

de donde al considerar que $f(1) = 2$, se llega a que $\tilde{C} = 1$ y por lo tanto, la ecuación de la curva es

$$y = x^3 + x^2 - x + 1.$$

`https://www.desmos.com/calculator/zisbzonerx`

4.3. Cálculo de integrales definidas

4.3.1. Calcular, por definición, las integrales definidas

a) $\displaystyle\int_a^b c\,dx$, *b)* $\displaystyle\int_0^3 x\,dx$, *c)* $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$.

Solución:

a) Aquí como $f(x) = c$, si $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ entonces $m_i = c = M_i$, de donde $\underline{S}(f;\mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n m_i\triangle x_i = \sum_{i=1}^n c\triangle x_i = c\sum_{i=1}^n \triangle x_i = c(b-a)$, $\overline{S}(f;\mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n M_i\triangle x_i = \sum_{i=1}^n c\triangle x_i = c(b-a)$ y por tanto, $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

b) En este caso, como $f(x) = x$, si $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[0, 3]$ entonces $m_i = x_{i-1}$ y $M_i = x_i$, de donde

$$\underline{S}(f;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}\triangle x_i = x_1(x_2 - x_1) + x_2(x_3 - x_2) + \ldots + x_{n-1}(x_x - x_{n-1})$$

y

$$\underline{S}(f;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n x_i\triangle x_i = x_1(x_1 - x_0) + x_2(x_2 - x_1) + \ldots + x_n(x_x - x_{n-1});$$

dado que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $x_{i-1} < \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2} < x_i$ entonces

$$\underline{S}(f;\mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_{i-1} + x_i}{2}(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f;\mathcal{P}).$$

Ahora, como $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{x_{i-1} + x_i}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) = \frac{9}{2}$ y $\mathcal{P}$ es una partición arbitraria de $[0, 3]$ entonces $\displaystyle\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$.

c) Al considerar una partición $\mathcal{P}$ de $[0, 2]$ en n subintervalos iguales definidos por $\left[\dfrac{2(i-1)}{n}, \dfrac{2i}{n}\right]$, cada uno de ellos tiene longitud $\triangle x_i = \dfrac{2}{n}$ y al escoger $t_i = \dfrac{2i}{n}$ (extremo derecho del subintervalo), se tiene para $f(x) = x^2$ que

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^n \left\{\frac{2}{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2\right\} = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2,$$

y como $\displaystyle\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^n f(t_i)\triangle x_i = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^2 x^2 dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} S(f;\mathcal{P}) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f(t_i)\triangle x_i = \frac{8}{3}$.

4.3.2. Calcular:

$a)\ \displaystyle\int_1^3 2x\,dx$

$b)\ \displaystyle\int_2^4 \left(6x^2+4x\right)dx$

$c)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$d)\ \displaystyle\int_1^2 3x^2\left(x^3+1\right)^2 dx$

$e)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{6x^5}{(x^6+1)^4}\,dx$

$f)\ \displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx$

$g)\ \displaystyle\int_{-3}^4 |5x-2|\,dx$

Solución:

$a)\ \displaystyle\int_1^3 2x\,dx = x^2\Big|_1^3 = 9-1=8$

$b)\ \displaystyle\int_2^4 \left(6x^2+4x\right)dx = \left(2x^3+2x^2\right)\Big|_2^4 = 160-24=136$

$c)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

$d)\ \displaystyle\int_1^2 3x^2\left(x^3+1\right)^2 dx = \frac{x^3+1}{3}\Big|_1^2 = \frac{721}{3}$

$e)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{6x^5}{(x^6+1)^4}\,dx = -\frac{1}{3(x^6+1)^3}\Big|_0^1 = \frac{7}{24}$

$f)\ \displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$g)\ \displaystyle\int_{-3}^4 |5x-2|\,dx = \int_{-3}^{2/5}(2-5x)\,dx + \int_{2/5}^4 (5-2x)\,dx = \frac{613}{10}$

4.3.3. Determinar el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_1^2 3x^2\left(x^3+1\right)^2 dx$

b) $\displaystyle\int_1^e e^{e^x}e^x dx$

c) $\displaystyle\int_1^3 4x\sqrt{6-2x}\ dx$

d) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Solución:

a) Si $z = x^3+1$, como $\dfrac{dz}{dx} = 3x^2$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_1^2 3x^2\left(x^3+1\right)^2 dx &= \int_2^9 z^2 dz\\ &= \left.\frac{z^3}{3}\right|_2^9\\ &= \frac{1}{3}\left(9^3-2^3\right)\\ &= \frac{721}{3}\end{aligned}$$

b) Del cambio de variable $u = e^x$, la integral queda

$$\int_1^e e^{e^x}e^x dx = \int_e^{e^e} e^u du = \left.e^u\right|_e^{e^e} = e^{e^e} - e^e$$

c) De $y = 6-2x$, se tiene

$$\int_1^3 4x\sqrt{6-2x}\ dx = \int_4^0 (y-6)\sqrt{y}\ dy = \frac{96}{5}$$

d) Al considerar la sustitución $x = 2\sin(\theta)$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/2} 4\cos^2(\theta)d\theta\\ &= 2\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos(2\theta)\right)d\theta\\ &= \pi\end{aligned}$$

4.3.4. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_4^6 \frac{x-17}{x^2+x-12}\,dx.$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin^2(x)}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$

Solución:

a) Dado que $\dfrac{x-17}{x^2+x-12} = \dfrac{3}{x+4} - \dfrac{2}{x-3}$, se tiene

$$\int \frac{x-17}{x^2+x-12}\,dx = 3\ln|x+4| - 2\ln|x-3| + C$$

y por lo tanto, $\displaystyle\int_4^6 \frac{x-17}{x^2+x-12}\,dx = 3\ln(10) - 2\ln(3) - 9\ln(2).$

b) Al considerar $z = 1+3\sin^2(x)$, se tiene que $dz = 6\sin(x)\cos(x)\,dx$ y

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin^2(x)}}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^4 z^{-1/2}\,dz = \frac{1}{3}$$

c) Para $I := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$, del cambio $z = \dfrac{\pi}{2} - x$, dado que $dz = -dx$, $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$ y $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$, se tiene que

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\cos y}+\sqrt{\sin y}}\,dy,$$

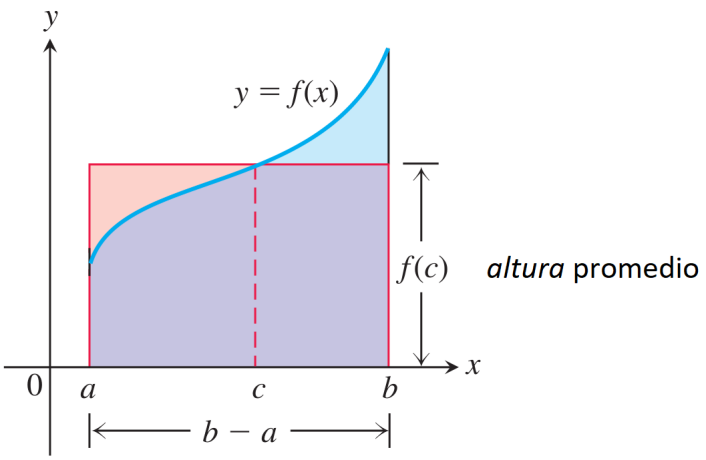
de donde $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx.$

De lo anterior, $2I = I + I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Teorema del valor medio para integrales: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$



4.3.5. Para $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x + 1$, determinar el valor de la constante c a la cual se refiere el Teorema del valor medio para integrales.

Solución: De la continuidad de f y dado que

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{8}{3},$$

se tiene que existe $c \in [1, 3]$ de modo que

$$f(c) = \frac{4}{3} \Rightarrow (c-1)^2 = \frac{4}{3},$$

de donde se obtiene que $c = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

4.3.6. Utilizar el Teorema del valor medio para integrales para calcular

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{n}\int_{n}^{2n}\frac{\sin(x)}{x+1}\,dx\right\}.$$

Solución: Sea $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x+1}$.

Por Teorema del valor medio para integrales, existe $y\in[n,2n]$ tal que

$$\frac{1}{n}\int_{n}^{2n}\frac{\sin(x)}{x+1}\,dx=f(y).$$

Por otra parte cuando $n\to\infty$, se tiene que $y\to\infty$; además como $|f(y)|\leq\dfrac{1}{|y+1|}$, se tiene que $f(y)\to 0$ cuando $y\to\infty$.

De lo anterior,

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{n}\int_{n}^{2n}\frac{\sin(x)}{x+1}\,dx\right\}=0.$$

4.4. Integrales impropias

4.4.1. Determinar si las siguientes integrales convergen.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$

Solución:

a) Dado que

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\, dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{\ln(b)}{b} - \frac{1}{b} + 1\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

se tiene por definición que la integral converge a 1.

b) Dado que $\displaystyle\int_0^b \sin(x)\, dx = 1 - \cos(b)$ y que

$$\lim_{b\to+\infty} (1 - \cos(b))$$

no existe, entonces la integral diverge.

c) Com las integrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$ convergen cada una a $\dfrac{\pi}{4}$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

y la integral dada es convergente.

4.4.2. Determinar el valor de la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}-e^{-x}\right)dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}-e^{-x}\right)dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\left(\frac{1}{x^2+1}-e^{-x}\right)dx \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(\arctan(b)+e^{-b}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{e}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

4.4.3. Analizar la convergencia de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx$.

Solución: Como $\forall x \geq 1$ se tiene que $\ln(x) \leq x$, entonces

$$\frac{\ln(x)}{x^3} \leq \frac{1}{x^2},\ \forall x \geq 1.$$

Por otra parte, como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge a 1, entonces por criterio de comparación directa $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ también converge.

4.4.4. Verificar que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx$ diverge.

Solución: Al definir las funciones $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}$ y $g(x) := \dfrac{1}{x}$ en el intervalo $[1, +\infty[$, dado que ellas son continuas, no negativas y tales que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 > 0,$$

por criterio de comparación en el límite, como la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ también diverge.

4.4.5. Mostrar que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(2x^2-x)^5}\,dx$ es convergente.

Solución: Utilizando el criterio de comparación en el límite, con respecto a la integral convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^9}\,dx$, dado que

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x/(2x^2-x)^5}{1/x^9}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{10}}{(2x^2-x)^5}\right] = \frac{1}{32} > 0,$$

se tiene que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(2x^2-x)^5}\,dx$ es convergente.

4.4.6. Utilizar la definición de integral impropia para:

a) Verificar que las integrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx$ y $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ son divergentes.

b) Determinar el valor de (la integral convergente) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x\ln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$.

Solución:

a) Como $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx = -\frac{1}{\ln(x)} + C$, se tiene que

$$\lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx = \lim_{a\to 1^+} \left\{\frac{1}{\ln(a)} - \frac{1}{\ln(2)}\right\} = +\infty,$$

por lo tanto, la integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx$ diverge (a $+\infty$).

Por otra parte, como $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{x-1} + C$, se tiene que

$$\lim_{b\to 1^+} \int_b^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{b\to 1^+} \left\{\frac{1}{b-1} - 1\right\} = +\infty,$$

por lo tanto, la integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ diverge (a $+\infty$).

b) Dado que

$$\int \left(\frac{1}{x\ln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = -\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{x-1} + C,$$

de la definición, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\frac{1}{x\ln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx &= \lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \left(\frac{1}{x\ln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx \\
&= -\frac{1}{\ln(2)} + 1 - \lim_{a\to 1^+} \left(-\frac{1}{\ln(a)} + \frac{1}{a-1}\right) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

5. Aplicaciones de la integral

5.1. Cálculo de áreas planas

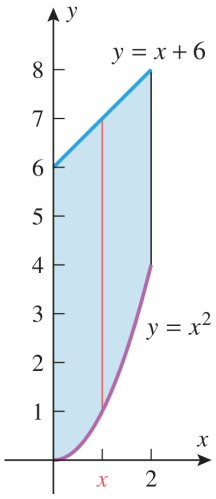
5.1.1. Dibujar cada una de las siguientes regiones y calcular su área.

a) La región acotada superiormente por la recta $y = x + 6$, inferiormente por la parábola $y = x^2$ y lateralmente por las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

b) La región acotada por la recta $y = x + 6$ y la parábola $y = x^2$.

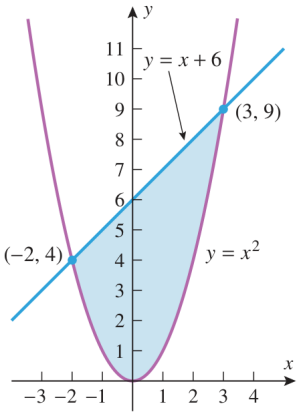
Solución:

a) La región es



y su área es $A_a = \displaystyle\int_0^2 \left(x + 6 - x^2\right) dx = \frac{34}{3}$.

b) La región es



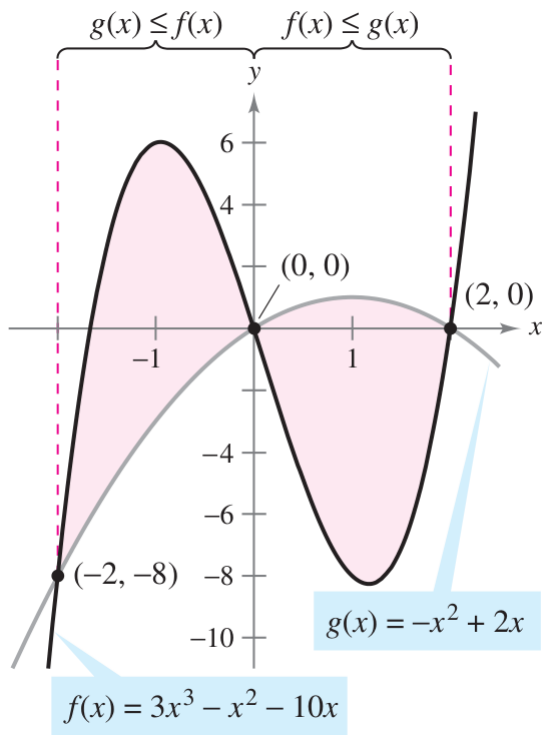
y su área es $A_b = \displaystyle\int_{-2}^3 \left(x + 6 - x^2\right) dx = \frac{125}{6}$.

5.1.2. Calcular el área de la región acotada por las curvas de ecuaciones $y = 3x^3 - x^2 - 10x$ e $y = -x^2 + 2x$.

Solución: Considerando $f(x) := 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) := -x^2 + 2x$, se tiene que los puntos de intersección entre las dos curvas están determinados por

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x \Leftrightarrow 3x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow (x+2)x(x-2) = 0$$

y por lo tanto dichos puntos son $(-2, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$.



Como $g(x) \leq f(x)$ para $x \in [-2, 0]$ y $f(x) \leq g(x)$ para $x \in [0, 2]$, el área de la región es

$$\int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\, dx = 24.$$

5.1.3. Calcular el área de la región encerrada por las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

Solución: Los puntos de intersección entre las curvas se obtiene a partir de la ecuación

$$6x - x^2 = x^2 - 2x,$$

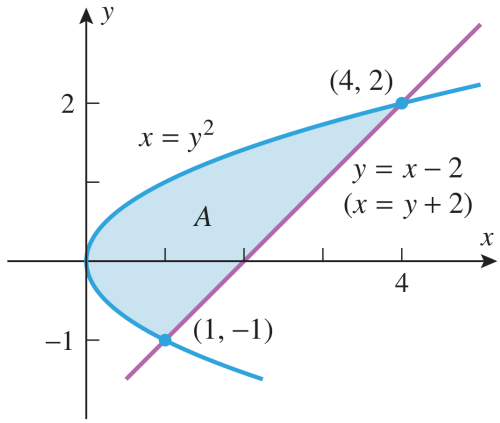
de donde $x = 0$ o $x = 4$ y por lo tanto, dichos puntos son $(0, 0)$ y $(4, 8)$. Dado que para $0 \leq x \leq 4$, se tiene que la parábola $y = 6x - x^2$ está por sobre la parábola $y = x^2 - 2x$, el área está dada por

$$A = \int_0^4 \left[6x - x^2 - \left(x^2 - 2x\right)\right] \, dx = \frac{64}{3}.$$

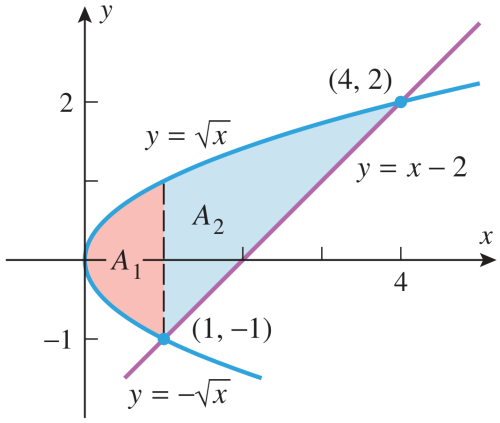
`https://www.desmos.com/calculator/r8vhduktih`

5.1.4. Determinar el valor del área de la región encerrada por la parábola $x = y^2$ y la recta $y = x - 2$ de las dos maneras siguientes:

a) Calculando una integral en la variable y.



b) Calculando la suma de dos integrales en la variable x.



Solución:

a) $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(y + 2 - y^2\right) dy = \frac{9}{2}$

b) $A_1 + A_2 = \displaystyle\int_{0}^{1} \left[\sqrt{x} - \left(-\sqrt{x}\right)\right] dx + \int_{1}^{4} \left[\sqrt{x} - (x - 2)\right] dx = \frac{9}{2}$

5.1.5. Calcular el área de las siguientes regiones:

a) La región R_1 acotada por el eje y, la parábola $y = 2x - x^2$ y la recta $x + y = 2$.

b) La región R_2 encerrada por la parábola $y = 2x - x^2$ y la recta $x + y = 2$.

Solución:

a) $A(R_1) = \displaystyle\int_0^1 \left[2 - x - (2x - x^2)\right] dx = \frac{5}{6}.$

`https://www.desmos.com/calculator/zkz1uvbzv9`

b) $A(R_2) = \displaystyle\int_1^2 \left[2x - x^2 - (2 - x)\right] dx = \frac{1}{6}.$

`https://www.desmos.com/calculator/gazdmtf4us`

5.1.6. Calcular el área de la región R del plano que se encuentra sobre el eje x y bajo la curva $y = \dfrac{e^x}{e^{2x}+9}$, entre $x = 0$ y $x = \ln 3$.

Solución: El área de la región está dada por $A = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+9}\, dx$

Del cambio $u = e^x$, se obtiene que

$$A = \frac{1}{3}\left[\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right]\Bigg|_1^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

`https://www.desmos.com/calculator/stdwvg5cfm`

5.1.7. Calcular el área de la región R del plano acotada por $y = (x-1)^2$ e $y = 2 - 2x^2$.

Solución: $A(R) = \displaystyle\int_{-1/3}^{1} \left[2 - 2x^2 - (x-1)^2\right] dx = \frac{32}{27}$

`https://www.desmos.com/calculator/2xavtcbz8l`

5.1.8. Calcular el área de la región R acotada por el eje x y la curva $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ que se encuentra a la derecha de la recta $x = 3$.

Solución: $A(R) = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \ln\sqrt{2}$

`https://www.desmos.com/calculator/nnnytq6v1c`

5.1.9. Calcular el área de la región R limitada por las curvas $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ en el intervalo $[1, +\infty[$.

Solución: Dado que para $x \geq 1$, se tiene que $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x(x^2+1)} > 0$ y por lo tanto la primera curva está siempre por sobre la segunda,

`https://www.desmos.com/calculator/zumlmssxa9`

luego el área está dada por

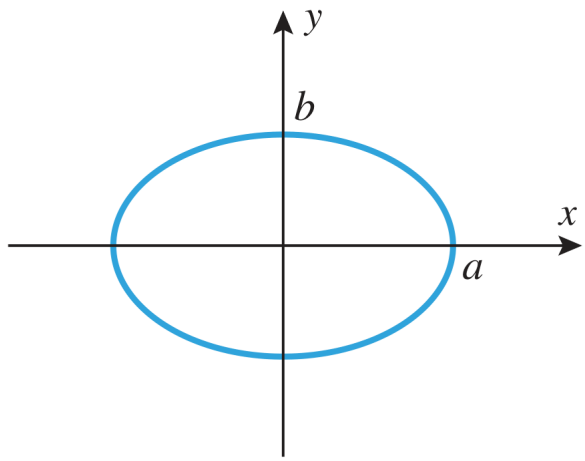
$$A(R) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \ln \sqrt{2}$$

5.1.10. Mediante integración y la sustitución $x = 2\sin\theta$ para calcular el área de la región del primer cuadrante acotada por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Solución: De $x^2 + y^2 = 4$ se tiene que $y = f(x) := \sqrt{4 - x^2}$ y el área está dada por

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\,d\theta = \pi$$

5.1.11. Usando integración, hallar el área acotada por la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.



Solución: De la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ al despejar y se obtiene que

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

de donde al considerar $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ con a y b positivos, se tiene que el valor de la integral

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

representa un cuarto del área A encerrada por la elipse y de la sustitución $x=a\sin\theta$, se obtiene

$$A=\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2(\theta)d\theta=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos(2\theta)\right]d\theta=ab\pi.$$

Fuente: H. Anton, I. Bivens, S. Davis, *Calculus*. Eleventh Edition, Wiley, 2015.

5.1.12. Calcular, usando dos integrales definidas, el valor del área acotada por el eje x y la parábola de ecuación

$$x^2 + y^2 + 2xy - 7x - 6y + 10 = 0.$$

Solución: Al despejar y de la ecuación de la parábola para obtener *dos curvas*, se tiene

$$y = 3 - x \pm \sqrt{(x-3)^2 - (x^2 - 7x + 10)} = 3 - x \pm \sqrt{x-1}$$

`https://www.desmos.com/calculator/dzw1yogvk8`

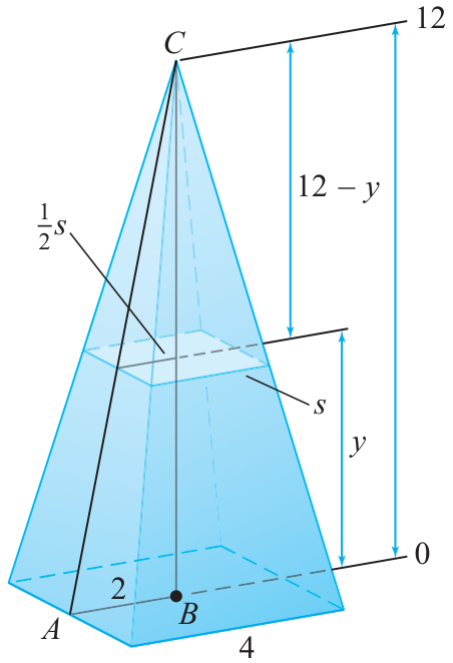
y el área es

$$\int_1^5 \left(3 - x + \sqrt{x-1}\right) dx - \int_1^2 \left(3 - x - \sqrt{x-1}\right) dx = \frac{9}{2}$$

5.2. Cálculo de volúmenes por secciones transversales

5.2.1. Calcular el volumen de una pirámide con base cuadrada de lado 4 y de altura 12.

Solución: De la figura



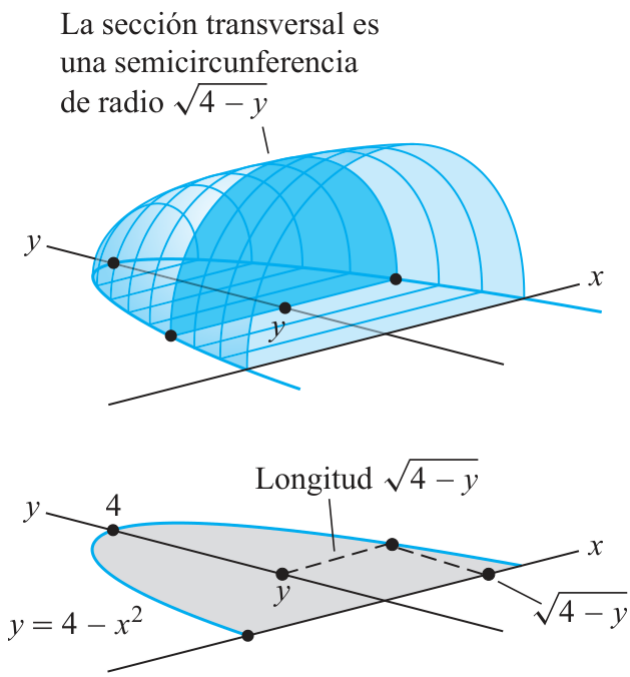
se observa, por triángulos semejantes, que la relación entre las longitudes de las bases y de las alturas de la pirámide y de las pirámides pequeñas, si las bases de estas últimas son a, está dada por

$$\frac{2}{12} = \frac{a/2}{12-y},$$

luego, como las áreas de las bases son $A = a^2 = \left[\frac{1}{3}(12-y)\right]^2 = \frac{1}{9}(12-y)^2$ el volumen es

$$V = \int_0^{12} A(y)\,dy = 64$$

5.2.2. Calcular el volumen del sólido en la figura,



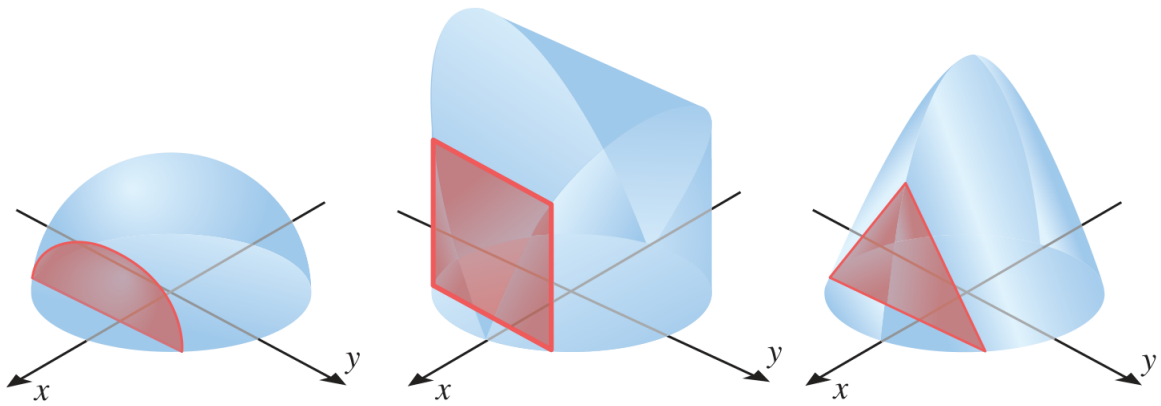
cuya base es la región limitada por la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y el eje x, y cuyas secciones verticales transversales perpendiculares al eje y son semicircunferencias.

Solución: En este caso, el área de las secciones transversales, está definida por

$$A(y) = \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{4-y}\right)^2 = \frac{\pi}{2}(4-y)$$

y entonces $V = \displaystyle\int_0^4 A(y)\,dy = 4\pi$

5.2.3. Hallar el volumen del sólido cuya base es el área acotada por la circunferencia unitaria y con secciones transversales perpendiculares son:



a) Semicírculos.

b) Cuadrados.

c) Triángulos equiláteros.

Solución: Para los tres casos se tiene que la longitud de la mitad del lado de la sección transversal (en rojo en cada figura) de la base del sólido que es perpendicular al eje x es

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

a) Para $A = \pi y^2 = \pi(1 - x^2) = A(x)$, $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \frac{2\pi}{3}$.

b) Para $A = (2y)^2 = 4(1 - x^2) = A(x)$, $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \frac{16}{3}$.

c) Para $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(2y)^2 = \sqrt{3}(1 - x^2) = A(x)$, $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Fuente: H. Anton, I. Bivens, S. Davis, *Calculus*. Eleventh Edition, Wiley, 2015.

5.2.4. Hallar el volumen del cuerpo sólido cuya base es la región determinada por

$$|x| + |y| \leq 1$$

y para el que las secciones transversales verticales, perpendiculares al eje y, son semicircunferencias (con diámetro a lo largo de la base).

Solución: La mitad de la base del volumen es la región

`https://www.desmos.com/calculator/ykudig7vio`

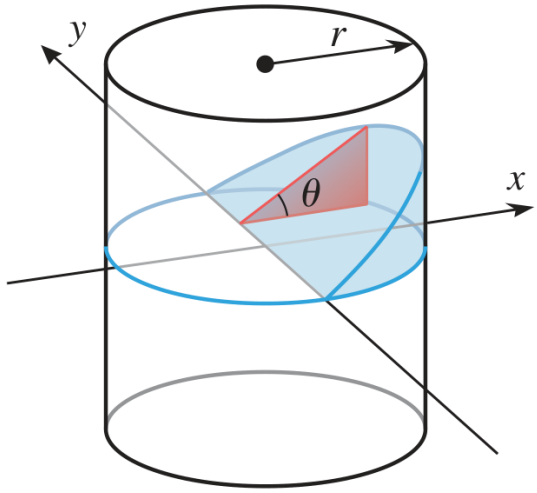
y como con esta consideración, se tiene que

$$A(y) = \frac{1}{2}\pi\,(1-y)^2$$

entonces, por simetría, se obtiene que $V = 2\displaystyle\int_0^1 A(y)\,dy = \frac{\pi}{3}$.

Fuente: J. Rogawski, C. Adams, R. Franzosa, *Calculus: Early transcendentals*. Fourth Edition, Macmillan Learning, 2019.

5.2.5. Desde un cilindro cirucular recto de radio r se extrae una cuña cortando el cilindro con dos planos, uno perpendicular al ejel del cilindro y el otro formando un ángulo θ con el primero. Calcular el volumen de la cuña.



Solución: La longitud de la base en el plano xy de los triángulos transversales es

$$b = \sqrt{r^2 - y^2}.$$

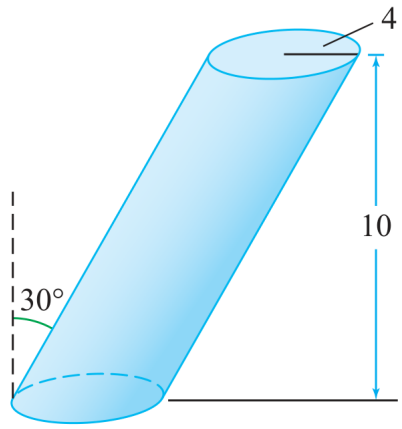
Como la altura de los triángulos es $h = \sqrt{r^2 - y^2}\tan(\theta)$, entonces el área de la sección transversal es

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{r^2 - y^2}{2}\tan(\theta)$$

y por lo tanto, el volumen es $V = \displaystyle\int_{-r}^{r} A(y)\,dy = \frac{2r^3}{3}\tan(\theta)$.

Fuente: H. Anton, I. Bivens, S. Davis, *Calculus*. Eleventh Edition, Wiley, 2015.

5.2.6. Calcular el volumen de un cilindro inclinado en un ángulo $\theta = 30°$ de altura 10 y radio en la base igual a 4.

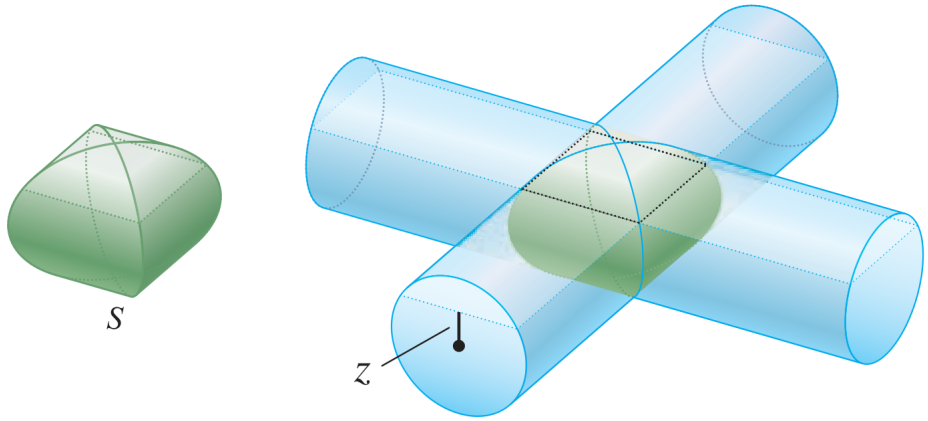


Solución: En en este caso $A(z) = 16\pi$ y el volumen es

$$V = \int_0^{10} A(z)\,dz = 160\pi$$

Fuente: J. Rogawski, C. Adams, R. Franzosa, *Calculus: Early transcendentals*. Fourth Edition, Macmillan Learning, 2019.

5.2.7. Un sólido S está acotado por dos cilindros circulares rectos de radio r cuyos ejes son perpendiculares.

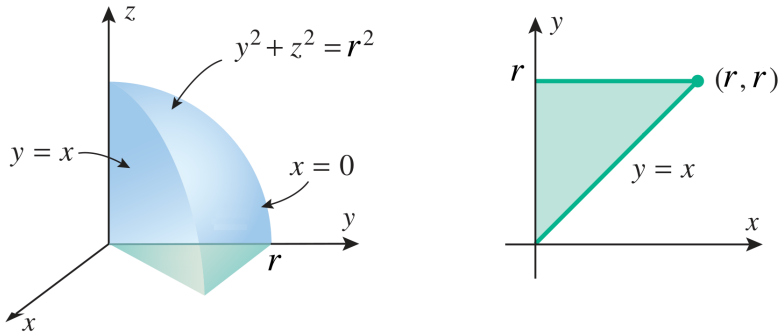


Calcular el volumen de S.

Solución: Al considerar los dos cilindros con sus ejes, como el eje x y el eje y, se tiene que sus ecuaciones son

$$y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{y} \quad x^2 + z^2 = r^2,$$

respectivamente. La parte de S en el primer octante bajo el primer cilindro,



corresponde a 1/16 del sólido y como sus secciones transversales perpendiculares al eje z son triángulos isósceles de área

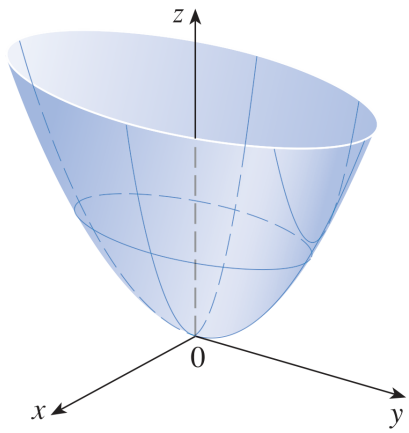
$$A = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(r^2 - z^2) = A(z),$$

se tiene que $V(S) = 16 \displaystyle\int_0^r A(z)\,dz = \frac{16}{3}r^3$.

Fuente: J. Rogawski, C. Adams, R. Franzosa, *Calculus: Early transcendentals*. Fourth Edition, Macmillan Learning, 2019.

5.2.8. Calcular el volumen acotado por el paraboloide $z = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25}$ y el plano $z = 10$.

Solución: La intersección del paraboloide con el plano xy ($z = 0$) está en $(0, 0, 0)$.



Las intersecciones del paraboloide y los planos de ecuación $z = w$, con $w > 0$, están determinadas por *la curva* de ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = w,$$

la cual puede reescribirse como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a = 4\sqrt{w}$ y $b = 5\sqrt{w}$. Cada una de dichas curvas encierra en los planos correspondientes un área (secciones transversales al eje z) de valor igual a

$$A(w) = ab\pi = 20\pi w$$

y por lo tanto, el volumen es $V = \displaystyle\int_0^{10} A(w)dw = 1000\pi$.

5.3. Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

5.3.1. Utilizar integración para calcular el volumen de un cono de radio r y altura h.

Solución: Sea $y = f(x) := \dfrac{r}{h}x$ la ecuación de la recta que pasa por el origen y el punto (h, r). Al rotar en torno al eje x la región triangular de vértices $(0, 0)$, $(h, 0)$ y (h, r) se genera el volumen que se pide calcular.

Al usar el métodos de los discos, se tiene

$$V = \pi \int_0^h [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2} dx = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

5.3.2. Sean r y h dos constantes positivas.

a) Determinar la ecuación de la recta L que contiene a los puntos $(r, 0)$ y $(0, h)$.

b) Utilizando el método de anillos, calcular el volumen obtenido al rotar la región que se encuentra en el primer cuadrante acotada por la recta L y los ejes coordenados, en torno al eje y

Solución:

a) La ecuación de la recta es $y = -\dfrac{h}{r}x + h$.

b) $V = 2\pi \displaystyle\int_0^r x\left(-\frac{h}{r}x + h\right) dx = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

5.3.3. Sea R la región del plano acotada por las curvas $x+y=4$, $x=0$ e $y=\sqrt{2x}$.

a) Calcular el área de R.

b) Determinar el volumen del sólido generado al rotar R en torno al eje x.

c) Determinar el volumen del sólido generado al rotar R en torno a la recta de ecuación $x=-1$.

d) Escribir las integrales que permiten calcular el volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $y=5$ utilizando los dos métodos conocidos y luego, determinar dicho volumen.

Solución: `https://www.desmos.com/calculator/w8ljed7t96`

a) El área de la región R está dada por $A(R)=\displaystyle\int_0^2 \left\{4-x-\sqrt{2x}\right\} dx = \frac{10}{3}$

b) Discos: $V_{y=0}=\pi\displaystyle\int_0^2 \left[(4-x)^2-\left(\sqrt{2x})\right)^2\right] dx = \frac{44\pi}{3}$

c) Anillos: $V_{x=-1}=2\pi\displaystyle\int_0^2 (1+x)\left(4-x-\sqrt{2x}\right) dx = \frac{164\pi}{15}$

d) El volumen, utilizando anillos, está dado por

$$V_{y=5}=2\pi\int_0^2 (5-y)\,\frac{y^2}{2}\,dy+2\pi\int_2^4 (5-y)\,(4-y)\;dy$$

y utilizando discos, se tiene

$$V_{y=5}=\pi\int_0^2 \left\{\left(5-\sqrt{2x}\right)^2-(5-(4-x))^2\right\}\,dx.$$

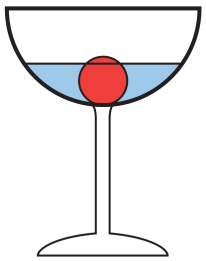
Además, $V_{y=5}=\dfrac{56\pi}{3}$.

5.3.4. Para $r > 0$ fijo y h positivo y menor o igual que r también fijo, la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ con $r - h \leq x \leq r$, gira en torno al eje x para generar un casquete esférico de altura h.

a) Utilizando el método de discos, calcular el volumen acotado por el casquete.

b) ¿Qué se observa al considerar $h = r$?

c) Una copa con forma de semiesfera y de diámetro 8 centímetros contiene una cereza *de* diámetro 2 centímetros. Si se vierte líquido en la copa hasta una profundidad h centímetros,



¿cuál es el volumen del líquido?

Solución:

a) $V = \pi \displaystyle\int_{r-h}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$

b) Si $h = r$, se obtiene el volumen de la mitad de una esfera.

c) Si $2 \leq h \leq 4$, la cereza está totalmente sumergida y de la primera parte

$$V_{\text{líquido}} = V_{\text{casquete}} - V_{\text{cereza}} = \frac{1}{3}\pi h^2(12 - h) - \frac{4\pi}{3} \cdot 1 = \frac{\pi}{3}(12h^2 - h^3 - 4).$$

Si $0 \leq h < 2$, la cereza no está totalmente sumergida y también de la primera parte, se tiene

$$\begin{aligned} V_{\text{líquido}} &= V_{\text{casquete grande}} - V_{\text{cereza}} + V_{\text{casquete pequeño}} \\ &= \frac{1}{3}\pi h^2(12 - h) - \frac{4\pi}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3}\pi(2 - h)^2(3 - (2 - h)) \\ &= 3\pi h^2 \end{aligned}$$

y así,

$$V(h) = \begin{cases} 3\pi h^2 & , \quad 0 \leq h < 2 \\ \dfrac{\pi}{3}(12h^2 - h^3 - 4) & , \quad 2 \leq h \leq 4 \end{cases}$$

Fuente: H. Anton, I. Bivens, S. Davis, *Calculus*. Eleventh Edition, Wiley, 2015.

5.3.5. La región del primer cuadrante que se encuentra acotada por las curvas $y = \sin(x^2)$, $y = \cos(x^2)$ y el eje y, rota en torno al eje y. Determinar el volumen del sólido resultante.

Solución: `https://www.desmos.com/calculator/hb691zepjk`

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}/2} x\left[\cos(x^2) - \sin(x^2)\right] = \pi(\sqrt{2} - 1)$$

5.3.6. Sea R la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$ $(m > 0)$. Sabiendo que los volúmenes generados por la rotación de R en torno al eje x y en torno al eje y son iguales, calcular el área de R.

Solución: Como $mx = x^2 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = m)$, se tiene que la parábola y la recta se intersectan en el origen y en el punto (m, m^2).

El volumen obtenido al rotar R en torno a el eje x está dado por

$$V_x = \pi \int_0^m \left[(mx)^2 - \left(x^2\right)^2 \right] dx.$$

El volumen obtenido al rotar R en torno a el eje y está dado por

$$V_y = 2\pi \int_0^m x \left(mx - x^2\right) \, dx.$$

De lo anterior, al igualar V_x y V_y, se obtiene que $m = \dfrac{5}{4}$ y el área de la región R está dada por

$$A(R) = \int_0^{5/4} \left[\frac{5}{4}x - x^2 \right] dx = \frac{125}{384}.$$

5.3.7. Sea R la región acotada por las curvas $y = 2x^2$ y $2x - y + 4 = 0$. Esbozar la región R y luego, calcular:

a) El área de R.

b) El volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $x = 4$.

c) El volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $x = -1$.

d) El volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $y = 10$.

e) El volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $y = -1$.

Solución: `https://www.desmos.com/calculator/cwjlgclcdh`

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(2x + 4 - 2x^2\right)\, dx = 9$

b) $\displaystyle 2\pi \int_{-1}^{2} (4 - x)\left(2x + 4 - 2x^2\right)\, dx = 63\pi$

c) $\displaystyle 2\pi \int_{-1}^{2} (x + 1)\left(2x + 4 - 2x^2\right)\, dx = 27\pi$

d) $\displaystyle \pi \int_{-1}^{2} \left(10 - (2x^2)\right)^2 - (10 - (2x + 4))^2\, dx = \frac{612\pi}{5}$

e) $\displaystyle \pi \int_{-1}^{2} (1 + 2x + 4)^2 - \left(1 + 2x^2\right)^2\, dx = \frac{378\pi}{5}$

5.3.8. Encontrar el volumen del sólido generado al rotar alrededor de la recta $x = -4$ la región acotada por las curvas $x = y - y^2$ y $x = y^2 - 3$.

Solución: `https://www.desmos.com/calculator/s48cokcj1l`

De $y - y^2 = y^2 - 3 \Rightarrow y = -1 \vee y = \dfrac{3}{2}$, se obtiene que los puntos de intersección entre las dos parábolas son $(-2, -1)$ y $\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$.

Utilizando discos, se tiene que el volumen está dado por

$$V = \pi \int_{-1}^{3/2} \left[\left(y - y^2 + 4\right)^2 - \left(y^2 - 3 + 4\right)^2 \right] dy = \frac{875\pi}{32}.$$

5.3.9. Determinar el volumen del sólido que se obtiene al rotar en torno a la recta $x = 2$ la región acotada por el eje x y la curva $y = x - x^2$.

Solución: `https://www.desmos.com/calculator/0i70qx2dmc`

Utilizando anillos, se tiene que el volumen está dado por

$$V = 2\pi \int_0^1 (2 - x)\left(x - x^2\right) dx = \frac{\pi}{2}.$$

5.3.10. Determinar el volumen del sólido generado al rotar la región del plano, limitada por $y = \sqrt{x}$, la recta $x = 4$ y el eje x, en torno a las siguientes rectas

a) $y = 0$,

b) $x = 0$,

c) $x = 4$,

d) $x = 5$,

e) $y = 2$ e

f) $y = 3$;

primero utilizando el método de anillos y luego el de discos.

Solución: `https://www.desmos.com/calculator/tmkuyeuaqq`

a) Anillos: $2\pi \displaystyle\int_0^2 (4y - y^3)dy = 8\pi$

Discos: $\pi \displaystyle\int_0^4 x\,dx = 8\pi$

b) Anillos: $2\pi \displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx = \frac{128\pi}{5}$

Discos: $\pi \displaystyle\int_0^2 \left(16 - y^4\right) dy = \frac{128\pi}{5}$

c) Anillos: $2\pi \displaystyle\int_0^4 (4 - x)\sqrt{x}\,dx = \frac{256\pi}{5}$

Discos: $\pi \displaystyle\int_0^2 \left(4 - y^2\right)^2 dy = \frac{256\pi}{15}$

d) Anillos: $2\pi \displaystyle\int_0^4 (5 - x)\sqrt{x}\,dx = \frac{416\pi}{5}$

Discos: $\pi \displaystyle\int_0^2 \left[\left(5 - y^2\right)^2 - 1\right] dy = \frac{416\pi}{15}$

e) Anillos: $2\pi \displaystyle\int_0^2 (2 - y)(4 - y^2)dy = \frac{40\pi}{3}$

Discos: $\pi \displaystyle\int_0^4 \left[4 - \left(2 - \sqrt{x}\right)^2\right] dx = \frac{40\pi}{3}$

f) Anillos: $2\pi \displaystyle\int_0^2 (3 - y)(4 - y^2)dy = 24\pi$

Discos: $\pi \displaystyle\int_0^4 \left[9 - \left(3 - \sqrt{x}\right)^2\right] dx = 24\pi$

5.4. Otras aplicaciones

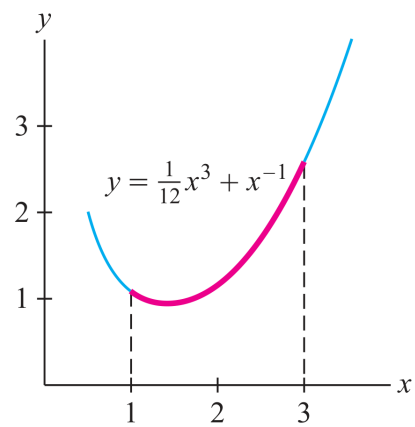
5.4.1. Longitud de arco

5.4.1.1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. La longitud del arco de $y = f(x)$ desde $(a, f(a))$ hasta $(b, f(b))$ está dada por

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Calcular la longitud de la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x}$ para $x \in [1, 3]$.

Solución: Para $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x}$



$$\mathcal{L} = \int_3^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_3^1 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{17}{6}.$$

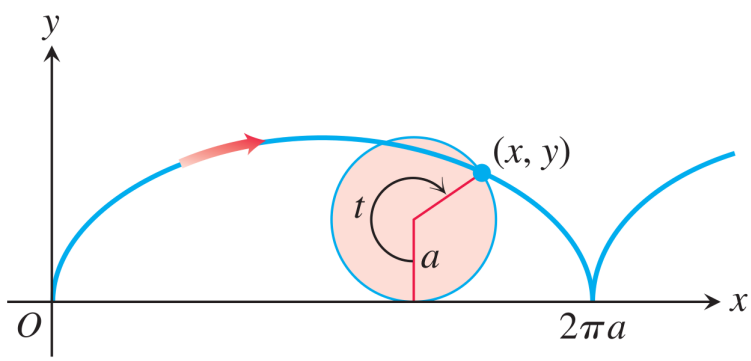
5.4.1.2. La longitud del arco de una curva en el plano parametrizada por $c(t) = (x(t), y(t))$, donde x e y son funciones de clase C^1, para $a \leq t \leq b$ está dada por

$$\int_a^b \sqrt{(x'(x))^2 + (y'(x))^2}\, dt.$$

Un imán se ha pegado a la llanta de una rueda de radio a. En cada vuelta, mientras la rueda avanza, la trayectoria recorrida por el imán está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = a(t - \sin t) \quad \text{e} \quad y(t) = a(1 - \cos t),$$

donde $t \in [0, 2\pi]$. ¿Qué distancia recorre el imán cuando la rueda da una vuelta?



Indicación: Puede considerarse la identidad $\dfrac{1 - \cos x}{2} = \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Solución: La distancia recorrida por el imán cuando la rueda da una vuelta corresponde a la longitud de arco de la curva $C(t) = (x(t), y(t))$, donde $t \in [0, 2\pi]$, determinada por la integral

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos t)}\, dt \\
&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\, dt \\
&= 8a.
\end{aligned}$$

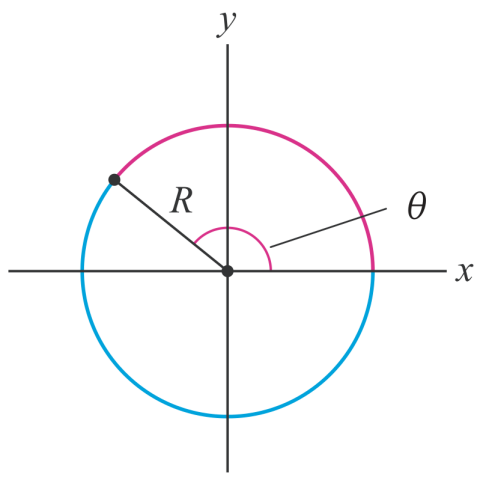
Fuente: H. Anton, I. Bivens, S. Davis, *Calculus*. Eleventh Edition, Wiley, 2015.

5.4.1.3. Hallar la longitud del arco que se encuentra en una circunferencia de radio R y que subtiende un ángulo de θ radianes.

Solución: La circuferencia de radio R y centro en el origen puede parametrizarse por medio de las ecuaciones

$$x(t) = R\cos(t) \quad \text{e} \quad y(t) = R\sin(t),$$

donde $t \in [0, 2\pi]$.



Utilizando la fórmula de la longitud de arco, la longitud del arco que que subtiende un ángulo de θ radianes es

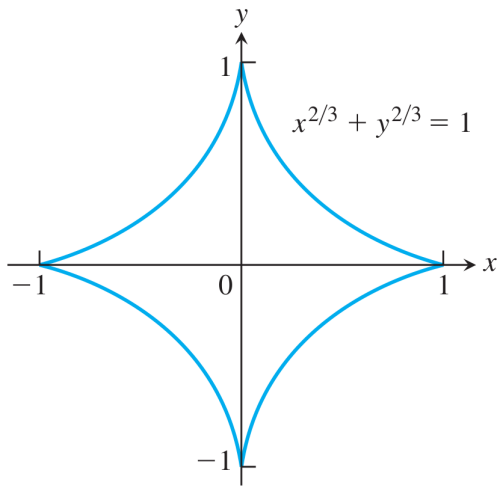
$$\mathcal{L} = \int_0^\theta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = R\theta.$$

Fuente: H. Anton, I. Bivens, S. Davis, *Calculus*. Eleventh Edition, Wiley, 2015.

5.4.1.4. Calcular la longitud de la parte de la astroide de ecuación

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

que se encuentra en el primer cuadrante



considerando $x \in \left[\frac{1}{8}, 1\right]$.

Solución: `https://www.desmos.com/calculator/axe4a1bajw`

De las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = \cos^3(t) \quad \text{e} \quad y(t) = \sin^3(t),$$

se tiene que

$$\mathcal{L} = \int_0^{\pi/3} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \frac{9}{8}.$$

Fuente: G. Thomas, *Calculus*. Fifteenth Edition, Pearson, 2024.

5.4.2. Área de superficie de revolución

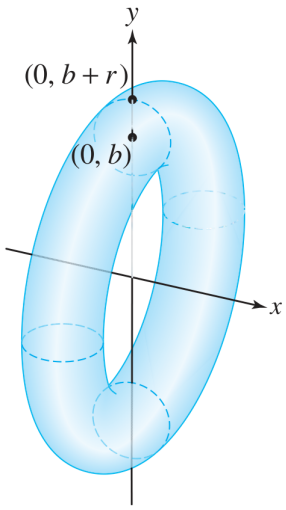
5.4.2.1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y no negativa. Al rotar la curva $y = f(x)$ en torno al eje x se obtiene una superficie de revolución cuya área está dada por

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Utilizar la fórmula anterior para calcular el área del toro obtenido al rotar la circunferencia

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

en torno al eje x.



Solución: De la ecuación del toro, se tiene que

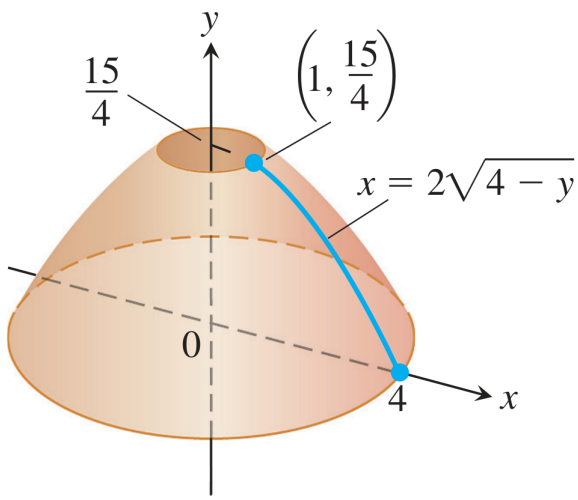
$$y = b \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

de donde si $f(x) = b - \sqrt{r^2 - x^2}$ y $g(x) = b + \sqrt{r^2 - x^2}$, el área del toro es

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx + 2\pi \int_{-r}^{r} g(x)\sqrt{1 + (g'(x))^2}dx \\ &= 4br\pi \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx \\ &= 4br\pi^2. \end{aligned}$$

Fuente: J. Rogawski, C. Adams, R. Franzosa, *Calculus: Early transcendentals*. Fourth Edition, Macmillan Learning, 2019.

5.4.2.2. Hallar el área de la superficie de revolución obtenida al rotar la curva de ecuación $x = 2\sqrt{4-y}$, con $0 \leq y \leq \dfrac{15}{4}$ en torno al eje y.

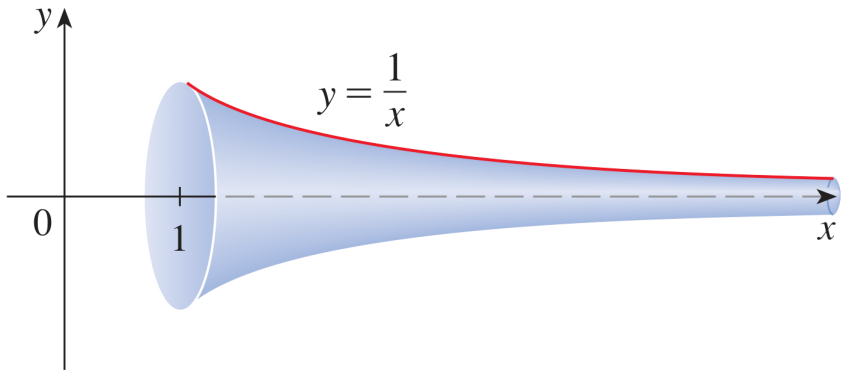


Solución: Considerando $f(y) = 2\sqrt{4-y}$, de la fórmula del ejercicio anterior, se tiene

$$A = 2\pi \int_0^{15/4} f(y)\sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy = \frac{35}{3}\sqrt{5}\pi.$$

Fuente: G. Thomas, *Calculus*. Fifteenth Edition, Pearson, 2024.

5.4.2.3. Se llama *Cuerno de Gabriel* o *Trompeta de Torricelli* al sólido de revolución generado al rotar en torno al eje x el área comprendida entre la curva $f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x \geq 1$ y dicho eje. Verificar que el sólido se puede llenar pero no pintar.



Solución: Dado que el volumen del sólido es (método de discos)

$$V = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi,$$

es claro que él *se puede* llenar.

Por otra parte como la integral que *permite* calcular superficie del sólido es

$$2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = 2\pi \int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}\, dx,$$

pero dado que

$$\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}} \leq \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}$$

y que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge a $+\infty$, el área superficial del sólido *es* infinito.

De lo anterior, el sólido se puede llenar pero no pintar.

Fuente: J. Stewart, D. Clegg, s. Watson, *Calculus*. Ninth Edition, Cengage, 2020.

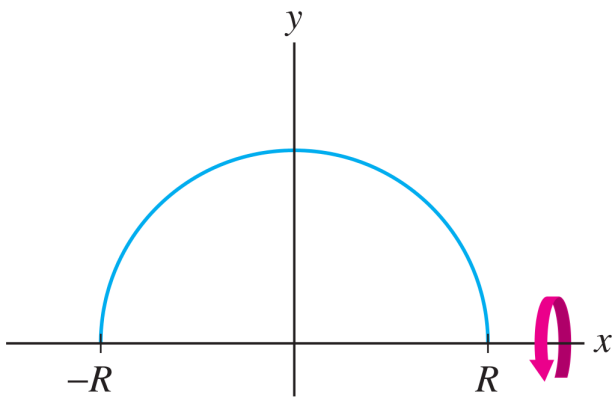
5.4.2.4. Sea $\mathcal{C}$ una curva simple contenida en el semiplano $y \geq 0$ con ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para $t \in [a, b]$, donde f y g son de clase C^1, si $\mathcal{C}$ gira en torno al eje x se genera una superficie de área

$$2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}dt.$$

Utilizando esta fórmula, calcular el área de la superficie de una esfera de radio R.

Solución: Una parametrización de la semicircunferencia contenida en el semiplano $y \geq 0$, de radio R y centro en el origen está dada por

$$x(t) = R\cos(t) \ \text{ e } \ y(t) = R\sin(t),$$



donde $t \in [0, \pi]$ y al rotar dicha curva en torno al eje x se obtiene una esfera de radio R, cuya área está dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\pi R\sin(t)\sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}\, dt \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin(t)\, dt \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

5.4.3. Crecimiento y decrecimiento exponencial

Definición: Dos cantidades son directamente proporcionales cuando su cuociente es constante, es decir, y es directamente proporcional con x, si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{y}{x} = k.$$

Notación: Si y es (directamente) proporcional con x, se escribe $y \propto x$.

Si la rapidez a la cual crece una *población* en un cierto instante es proporcional a la *población* en ese mismo momento y $x(t)$ representa el número de individuos en el tiempo t, entonces

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

donde k es una constante.

Cuando $k > 0$, se habla de **crecimiento exponencial** y cuando $k < 0$, de **decaimiento exponencial**. Si $x(0) = x_0$ es conocido, se tiene un PVI (problema de valor inicial).

5.4.3.1. Una población cuyo número de individuos en el tiempo t es $x(t)$, obedece la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

con k constante. Si $k < 0$, resolver la ecuación y calcular la semivida (o vida media).

Solución: Al separar variables e integrar (esto resuelve el problema de manera informal pero correcta), se tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \int k\,dt \\ \ln|x| &= kt + C \\ x(t) &= x_0 e^{kt}, \end{aligned}$$

donde $x(0) = x_0 := e^C$ es la cantidad inicial de individuos. Si T es el tiempo en que la cantidad de individuos tarda en reducirse a la mitad, entonces

$$x(T) = \frac{x_0}{2} \Rightarrow e^{kT} = \frac{1}{2} \Rightarrow T = \frac{\ln(1/2)}{k}.$$

Fuente: J. Stewart, *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.* Octava edición, Cengage, 2018.

5.4.3.2. Un cierto tipo de bacteria aumenta continuamente en razón proporcional a su cantidad presente. Si inicialmente hay 100 bacterias presentes y cinco horas más tarde hay 300 bacterias presentes. ¿Cuántas habrá diez horas después del momento inicial?

Solución: Se considera $N = N(t)$ como la cantidad bacterias en el instante t, donde t es el tiempo medido en horas. Dado que N aumenta de manera proporcional a su cantidad presente, se tiene

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

y como $\frac{d}{dt}(\ln(N)) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$, se obtiene que

$$\frac{d}{dt}(\ln(N)) = k$$

e integrando con respecto a t, se llega a que $N(t) = N_0 e^{kt}$.

$N(0) = 100 \Rightarrow N_0 = 100$

$N(5) = 300 \Rightarrow 100e^{5k} = 300 \Rightarrow k = \frac{\ln(3)}{5}$

De lo anterior, $N(t) = 100e^{\frac{\ln(3)}{5}t}$ y como $N(10) = 100e^{2\ln(3)} = 900$, después de 10 horas se tendrán 900 bacterias.

Fuente: J. Rogawski, C. Adams *Calculus: Early transcendentals*. Third Edition, Macmillan, 2015.

5.4.3.3. En un laboratorio el número de bacterias *Escherichia coli* aumenta continuamente en razón proporcional a su cantidad presente y se replica cada 3 minutos. Si en el instante inicial había una sola bacteria. ¿Cuántas habrá después de 1 hora?

Solución: Sea $A = A(t)$ la cantidad bacterias en el minuto t.

Dado que A aumenta de manera proporcional a cantidad presente, se tiene que

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

e integrando se obtiene que $A(t) = A_0 e^{kt}$.

$A(0) = 1 \Rightarrow A_0 = 1$

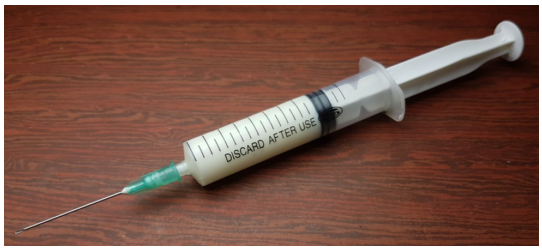
$A(3) = 2 \Rightarrow k = \dfrac{\ln(2)}{3}$

De lo anterior, $A(t) = 100e^{\frac{\ln(2)}{3}t}$ y después de 1 hora la cantidad de bacterias será

$$A(60) = e^{20\ln(3)} = 1048576.$$

Fuente: J. Rogawski, C. Adams *Calculus: Early transcendentals*. Third Edition, Macmillan, 2015.

5.4.3.4. Los farmacólogos han demostrado que el nivel de penicilina en la sangre de un persona disminuye a un ritmo proporcional a la cantidad presente.



a) Hallar la constante de decaimiento, si después de 6 horas de una inyección inicial de 450 mg, la cantidad de penicilina presente en sangre es de 90 mg.

b) ¿Qué cantidad de penicilina habrá después de 18 horas de aplicada la inyección?

c) ¿En qué momento la cantidad de penicilina habrá sido de 18 mg?

Solución: Si la cantidad de penicilina (en mg) t horas después de la inyección es x, dado que el nivel de penicilina disminuye a un ritmo proporcional a la cantidad presente, entonces

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

y se obtiene que $x(t) = x_0 e^{kt}$.

a) De $x(0) = 450$ y de $x(6) = 90$, se obtiene que $k = -\ln(5)/6$

b) $x(18) = 3.6$ mg

c) $x(t^*) = 18 \Rightarrow 450e^{-t^* \ln(5)/6} = 18 \Rightarrow t^* = 12$ horas

Fuente: J. Rogawski, C. Adams *Calculus: Early transcendentals*. Third Edition, Macmillan, 2015.

5.4.4. Ley de enfriamiento de Newton

La **Ley de enfriamiento de Newton** señala que la razón de cambio de la temperatura T de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura T^* del medio que lo rodea, es decir, si T es una función derivable que depende del tiempo t entonces

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T^*\right),$$

donde k es una constante.

5.4.4.1. Se ha cometido un asesinato. El cadáver fue encontrado a las 14:00 horas, momento en que se le tomó la temperatura, siendo ésta de $32°C$ y dos horas más tarde la temperatura fue de $29°C$. Considerando que la temperatura de la habitación donde se encontraba el cadáver era constante y de $28°C$ y que la temperatura de un cuerpo con vida es de $36°C$, determinar la hora del asesinato.

Solución: Sean $T^* = 28°C$ la temperatura de la habitación y $T = T(t)$ la temperatura del cadáver después de la primera medición, donde t es el tiempo en horas.

De $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - T^*\right)$ y el hecho que $\dfrac{d}{dt}\ln|T - T^*| = \left(\dfrac{1}{T - T^*}\right)\dfrac{dT}{dt}$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\ln|T - T^*| = k.$$

Integrando, se tiene que

$$\int\left(\frac{d}{dt}\ln|T - T^*|\right)dt = \int k\,dt,$$

y entonces $T(t) = Ce^{kt} + T^*$.

$T(0) = 32 \Rightarrow C + 28 = 32 \Rightarrow C = 4.$

$T(2) = 29 \Rightarrow 4e^{2k} + 28 = 29 \Rightarrow k = -\ln(2).$

De lo anterior, $T(t) = 4e^{-t\ln(2)} + 28$ y si t_a es la hora del asesinato, entonces

$$4e^{-t_a\ln(2)} + 28 = 36$$

de donde $t_a = -1$ y por lo tanto, el asesinato fue a las 13:00 horas.

5.4.4.2. Un termómetro que marca $70°F$ se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante de $390°F$, medio minuto después el termómetro marca $110°F$. Determinar el tiempo que tardó el termométro en marcar $145°F$.

Solución: Sean $T^* = 390°F$ la temperatura del horno y la $T = T(t)$ la temperatura del termómetro en el instante t (en segundos) una vez puesto en el horno. La variación de temperatura del termómetro es proporcional a la diferencia entre su temperatura (variable) y la del horno, luego

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T^*\right).$$

Integrando, se tiene que $T(t) = T^* - Ce^{kt}$.

$T(0) = 70 \Rightarrow 70 = 390 - C \Rightarrow C = 320.$

$T(30) = 110 \Rightarrow 110 = 390 - 320e^{30k} \Rightarrow k = \dfrac{\ln(7/8)}{30}.$

De lo anterior, $T(t) = 390 - 320e^{\frac{\ln(7/8)}{30}t}$, luego si $\tilde{t}$ representa el tiempo en que la temperatura es $145°F$, entonces

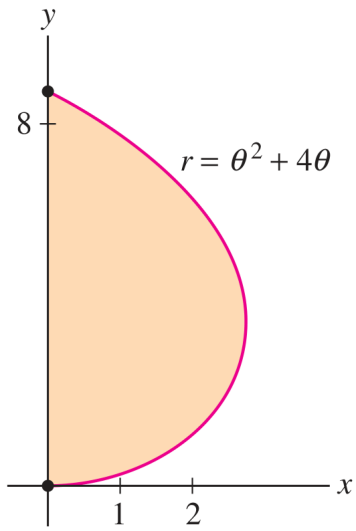
$$390 - 320e^{\frac{\ln(7/8)}{30}\tilde{t}} = 145.$$

Al resolver la ecuación anterior, se tiene que $\tilde{t} = 60$ y por lo tanto, el termómetro tardó un minuto en marcar $145°F$.

Fuente: D. Zill *A First Course in Differential Equations With Modeling Applications.* Ninth Edition, Cengage, 2009.

5.4.5. Área en coordenadas polares

5.4.5.1. Calcular el área de la figura



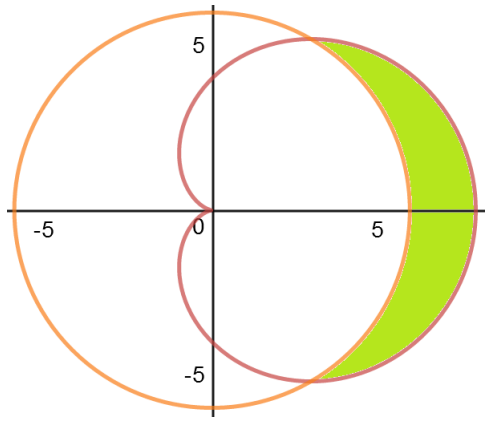
barrida por la curva $r = \theta^2 + 4\theta$ y que se encuentra en el primer cuadrante.

Solución: $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\theta^2 + 4\theta\right)^2 d\theta = \dfrac{\pi^5}{320} + \dfrac{\pi^4}{16} + \dfrac{\pi^3}{3}$

Fuente: J. Rogawski, C. Adams *Calculus: Early transcendentals*. Third Edition, Macmillan, 2015.

5.4.5.2. Calcular el área de la región interior a la cardioide $r = 4 + 4\cos\theta$ y exterior a la circunferencia $r = 6$.

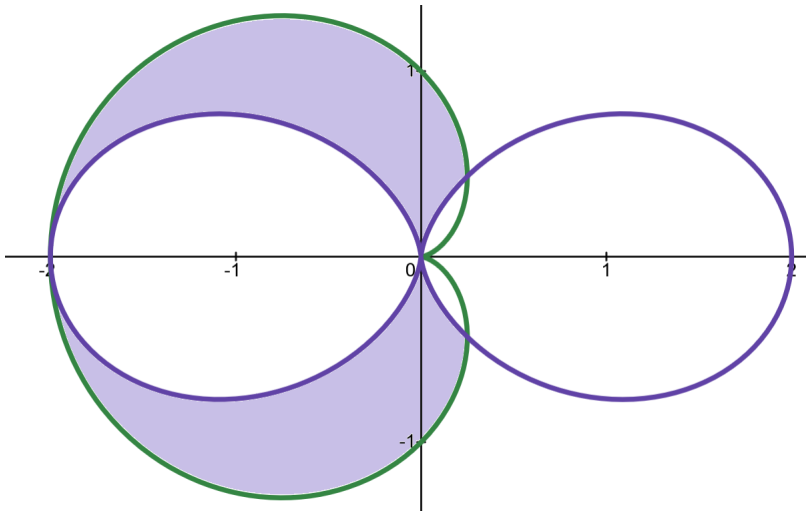
Solución: Como las curvas se intersectan cuando $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ y dada la simetría de los gráficos, el área de la región



está dada por

$$A = \int_0^{\pi/3} \left[(4 + 4\cos\theta)^2 - 6^2\right] d\theta = 18\sqrt{3} - 4\pi.$$

5.4.5.3. Calcular el área de la región acotada interior al cardioide $r = 1 - \cos(\theta)$ y exterior a la curva *infinito* $r = 1 + \cos(2\theta)$.



Solución: Al resolver la ecuación

$$1 - \cos(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$$

se obtiene que $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ y $\theta = \pi$, que son los ángulos en donde las curvas se intersectan.

El área de la región acotada por el cardioide y fuera de la curva infinito es

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} \left[(1 - \cos(\theta))^2 - (1 + \cos(2\theta))^2 \right] d\theta = \frac{21}{16}\sqrt{3}.$$

`https://www.desmos.com/calculator/j6gd5y4uwb`

5.4.5.4. Sean C_1 y C_2 dos curvas de ecuaciones polares $r = 2\cos(\theta) + 2\sin(\theta)$ y $r = \sqrt{2}$, respectivamente.

a) Escribir la ecuación cartesiana de cada curva.

b) Bosquejar dichas curvas, indicando sus puntos de intersección en coordenadas polares.

c) Escribir la integral que permite calcular el área de la región interior a ambas curvas.

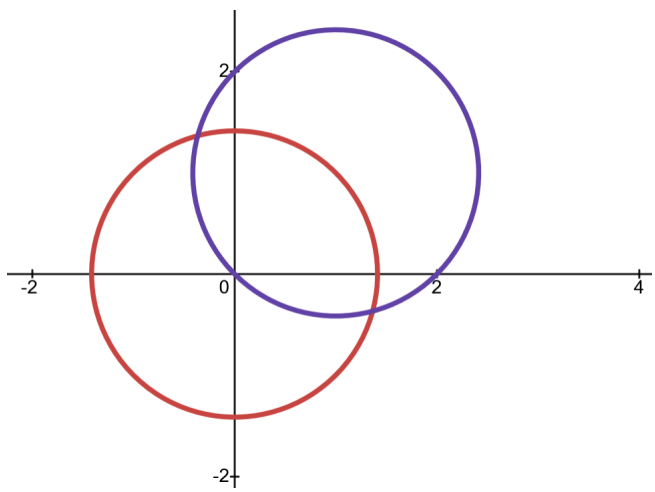
Solución:

a) Del cambio $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, se tiene que $x^2 + y^2 = r^2$ y por lo tanto, la segunda ecuación en coordenadas cartesianas está dada por $x^2 + y^2 = 2$.

De la primera ecuación, se que tiene $r^2 = 2r\cos(\theta) + 2r\sin(\theta)$, lo cual en coordenadas cartesianas se escribe como

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

b) Un bosquejo de las curvas es



`https://www.desmos.com/calculator/m13hmq52wu`

De la ecuación

$$2\cos(\theta) + 2\sin(\theta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(2\theta) = -\frac{1}{2}$$

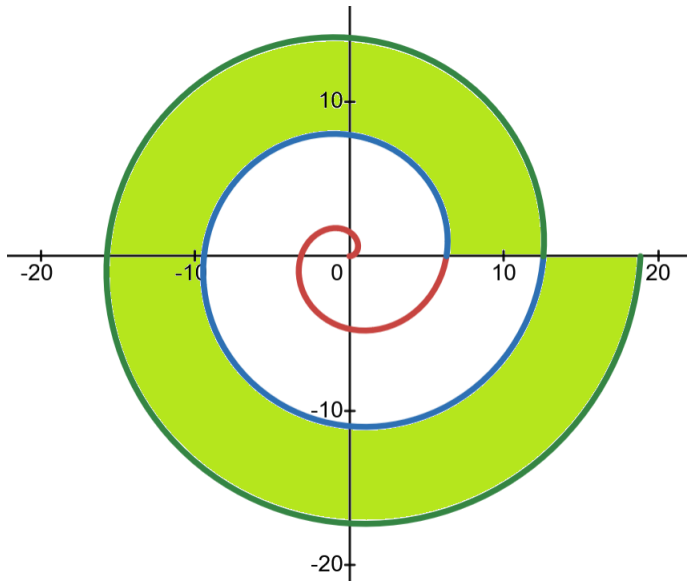
se obtiene que $\theta = -\dfrac{\pi}{12}$ y que $\theta = \dfrac{7\pi}{12}$, por lo tanto los puntos de intersección son $\left(\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{12}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{12}\right)$.

c) Utilizando simetría con respecto a la recta $\theta = \pi/4$, el área de la región interior a ambas curvas puede calcularse por medio de la integral

$$A(R) = \int_{\pi/4}^{7\pi/12} \left[\sqrt{2}\right]^2 d\theta + \int_{7\pi/12}^{3\pi/4} \left[2\cos(\theta) + 2\sin(\theta)\right]^2 d\theta.$$

5.4.5.5. Calcular el área de la región barrida por el espiral $r = \theta$, durante su tercera revolución que no fue barrida durante las dos revoluciones anteriores.

Solución:

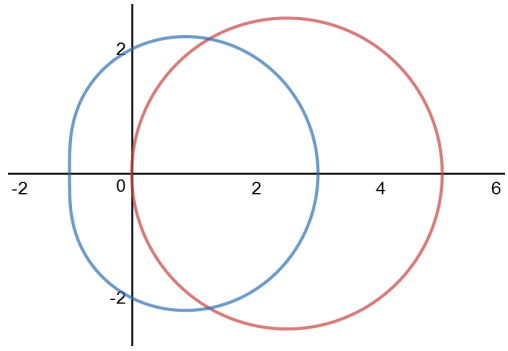


$$A = \frac{1}{2}\int_{4\pi}^{6\pi} \theta^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \theta^2\, d\theta = 16\pi^3$$

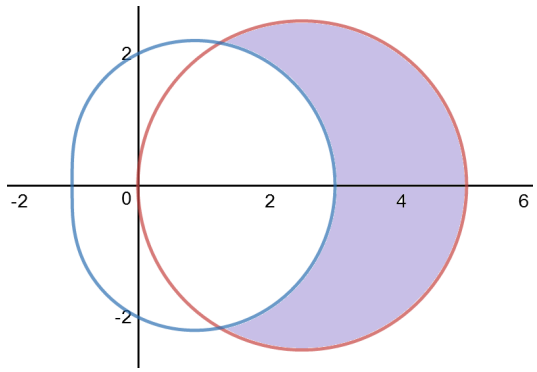
`https://www.desmos.com/calculator/nzr28qyso2`

Fuente: L. Leithold, *The Calculus 7 of a Single Variable*. HarperCollins College Publishers, 1996.

5.4.5.6. Calcular el área de la región interior a la circunferencia $r = 5\cos\theta$ y exterior al limaçon $r = 2 + \cos\theta$.



Solución: Como las curvas se intersectan cuando $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ y dada la simetría de los gráficos, el área de la región

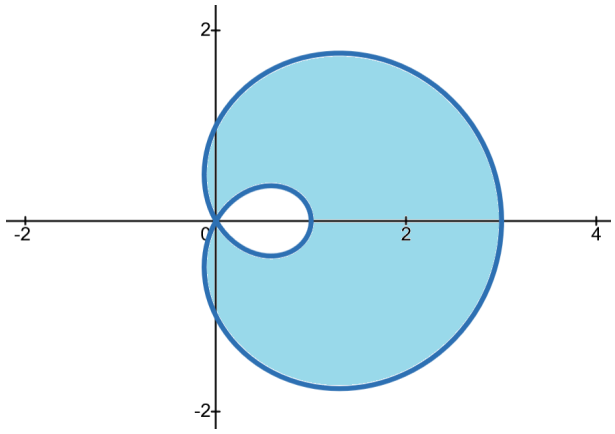


está dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/3} \left[(5\cos\theta)^2 - (2+\cos\theta)^2\right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} \left[12\cos(2\theta) - 4\cos\theta + 8\right] d\theta \\ &= \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

5.4.5.7. Calcular el área dentro del lazo mayor de la curva $r = 1 + 2\cos\theta$ que es exterior a su lazo menor.

Solución:

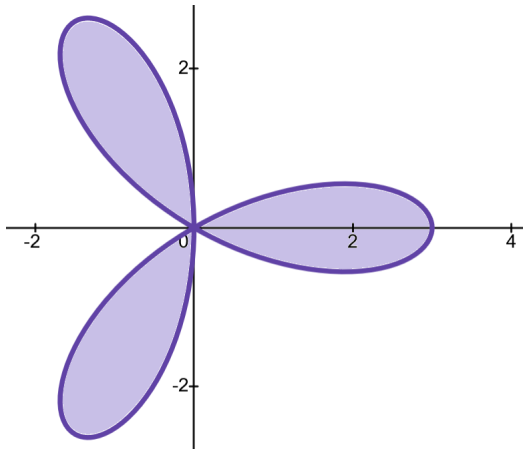


$$A = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (1 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta = \pi + 3\sqrt{3}$$

`https://www.desmos.com/calculator/dfazmeyhpj`

5.4.5.8. Calcular el área encerrada por la curva $r = 3\cos(3\theta)$.

Solución:

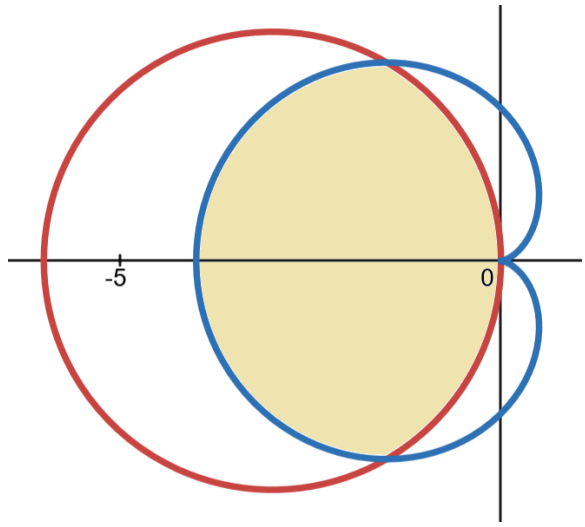


$$A = 27\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(3\theta)d\theta = \frac{9\pi}{4}$$

https://www.desmos.com/calculator/emsggjub0e

5.4.5.9. Calcular el área encerrada por las curvas $r = -6\cos(\theta)$ y $r = 2 - 2\cos(\theta)$.

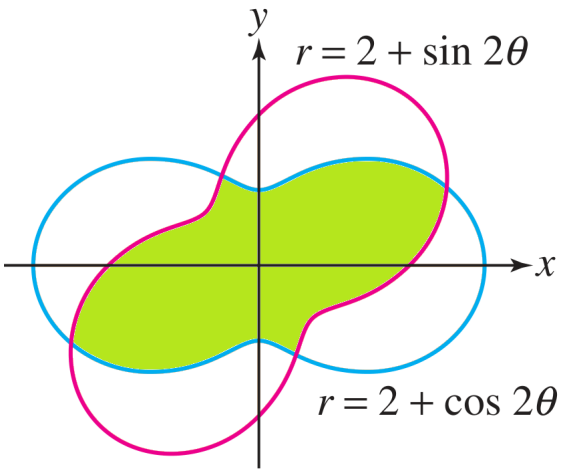
Solución:



$$A = 36\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos^2(\theta)d\theta + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (2 - 2\cos(\theta))^2\, d\theta = 5\pi$$

https://www.desmos.com/calculator/bs8mpnezjh

5.4.5.10. Calcular el área achurada en la figura



considerando la simetría de ella.

Solución: $A = 2\displaystyle\int_{\pi/8}^{5\pi/8} (2 + \cos(2\theta))^2 = \frac{9\pi}{2} - 4\sqrt{2}$

Fuente: J. Rogawski, C. Adams *Calculus: Early transcendentals*. Third Edition, Macmillan, 2015.