Recopilación de ejercicios resueltos para Cálculo en una variable (527119)

© Prof. E. Gavilán G.
egavilan@udec.cl

Concepción, 15 de abril de 2024

Índice

1. Límite y continuidad

1. Determinar, si es posible, el valor de los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1}$

   Solución:

   a) Como $\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$, se tiene que

   $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1.$$

   b) Al considerar la sustitución $y^{12}=1+x$, se tiene

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1} &= \lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}\\ &= \lim_{y\to 1}\frac{(y+1)(y^2+1)}{y^2+y+1}\\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

2. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x+5}{2x+7}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^6+x^3}-\sqrt{x^6-x^2}\right)$

Solución:

a) Al considerar la sustitución $y^6 = 1+x$, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} &= \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

b) Como $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x+5}{2x+7} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3+\dfrac{5}{x}}{2+\dfrac{7}{x}} = \dfrac{3}{2}$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+8x}-x\right) &= \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+8x}-x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+8x}+x}{\sqrt{x^2+8x}+x} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{8}{\sqrt{1+\dfrac{8}{x^2}}+1} \\
&= 4,
\end{aligned}$$

se tiene, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x+5}{2x+7}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right) = \dfrac{3}{2}\cdot 4 = 6.$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^6+x^3}-\sqrt{x^6-x^2}\right) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^6+x^3-(x^6-x^2)}{\sqrt{x^6+x^3}+\sqrt{x^6-x^2}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{1+1/x^2}{\sqrt{1+1/x^3}+\sqrt{1-1/x^4}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3. Calcular $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + \cos(x)}{2x^3 + 5}$.

Solución: Cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Además, si $x > 0$, se tiene que

$$x^3 - 1 \leq x^3 + x\cos(x) \leq x^3 + 1 \quad \text{y} \quad 2x^3 + 5 > 0;$$

por lo tanto,

$$\frac{x^3 - 1}{2x^3 + 5} \leq \frac{x^3 + \cos(x)}{2x^3 + 5} \leq \frac{x^3 + 1}{2x^3 + 5}$$

y como $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 1}{2x^3 + 5} = \dfrac{1}{2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 1}{2x^3 + 5}$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x\cos(x)}{2x^3 + 5} = \frac{1}{2}.$$

4. Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\sin(6x)} & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{3}<x<0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin(3x)} & \text{si} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

a) ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

b) Analizar la continuidad de f en todo su dominio.

Solución:

a) Para $x<0$, $f(x)=\dfrac{x}{\sin(6x)}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{6x}{\sin(6x)}$, luego $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{t}{\sin t}=\dfrac{1}{6}$.

Para $x>0$, al multiplicar $f(x)$, por $\dfrac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}$, se tiene que

$$f(x)=\frac{x}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)\sin(3x)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)\sin(3x)},$$

luego, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)\sin(3x)}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\sin u}{u}=\dfrac{1}{6}$.

De lo anterior, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{6}$

b) Para $-\dfrac{\pi}{3}<x_0<0$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x}{\sin(6x)}=\dfrac{x_0}{\sin(6x_0)}=f(x_0)$, por lo que f es continua en $\left]-\dfrac{\pi}{3},0\right[$.

De manera análoga, para $0<x_0<\dfrac{\pi}{3}$, se tiene que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, por lo que f es continua en $\left]0,\dfrac{\pi}{3}\right[$.

Por otra parte, como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{6}\neq 1=f(0)$, se tiene que f no es continua en el origen. En resumen f es continua en todo su dominio excepto en el origen.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k - 7x}{\sqrt{x^2+3}} & , \quad x < 1 \\ x^3 - 5x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

donde k es una constante real.

a) Determinar el valor de k para el cual f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Encontrar una asíntota horizontal del gráfico de f.

Solución:

a) La función f es continua tanto para $x > 1$ como para $x < 1$, pues en ambos casos corresponde a una combinación (suma, resta, producto o cuociente con denominador no nulo) de funciones continuas.

Para que f sea continua en 1, debe tenerse

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = -3.$$

Se calculan los correspondientes límites laterales

- $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{k - 7x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{k-7}{2}.$
- $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 - 5x + 1) = -3.$

Entonces, dado que

$$\frac{k-7}{2} = -3 \Leftrightarrow k = 1,$$

se concluye que f es continua en $\mathbb{R}$ si y solo si $k = 1$.

b) Se observa que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{k - 7x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(\dfrac{k}{x} - 7\right)}{|x|\sqrt{1 + \dfrac{3}{x^2}}} = 7.$$

Por lo tanto, la recta de ecuación $y = 7$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

6. Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 6}{x - 1}$. Hallar todas las asíntotas para el gráfico de f.

Solución: Dado que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(el valor este límite es eventualmente la pendiente m de *la* asíntota oblicua) y que

$$\lim_{x\to+\infty} \{f(x) - 1 \cdot x\} = \lim_{x\to+\infty} \{f(x) - x\} = -9,$$

(el valor de este segundo límite corresponde al coeficiente de posición n de la asíntota oblicua) se tiene que la recta de ecuación $y = x - 9$ es asíntota oblicua (por la derecha).

De manera completamente análoga, si se considera ahora x tendiendo a $-\infty$, dado que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ y que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \{f(x) - x\} = -9$, se tiene que la misma recta es también asíntota oblicua (por la izquierda).

Por otra parte, como $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, se tiene la recta de ecuación $x = 1$ es asíntota vertical para el gráfico de f (el hecho que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, también es suficiente por sí solo, para afirmar que $x = 1$ es asíntota vertical).

Por otra parte, como el gráfico de f tiene una asíntota oblicua derecha y *una* (en realidad se trata de la misma recta) asíntota oblicua izquierda; entonces, él no tiene ninguna asíntota horizontal.

El gráfico de f y sus dos asíntotas pueden observarse en

`https://www.desmos.com/calculator/naq6wndx3f`.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{13-7x}{\sqrt{x^2+3}} & , \quad x < 1 \\ x^3 - 5x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Analizar la continuidad de f en $x_0 = -5$ y en $x_0 = 1$.

b) Encontrar la asíntota horizontal del gráfico de f.

c) Indicar justificadamente, si f es una función acotada superiormente.

Solución:

a) La función f es continua en $x_0 = -5$, pues

$$\lim_{x \to -5} f(x) = \lim_{x \to -5} \frac{13-7x}{\sqrt{x^2+3}} = -\frac{22}{\sqrt{28}} = f(-5).$$

Por otra parte, como

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{13-7x}{\sqrt{x^2+3}} = 3 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 - 5x + 1) = -3,$$

se tiene que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe y por lo tanto, f no es continua en $x_0 = 1$.

b) Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{13-7x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(\dfrac{13}{x} - 7\right)}{|x|\sqrt{1 + \dfrac{3}{x^2}}} = 7,$$

la recta de ecuación $y = 7$ es la asíntota horizontal del gráfico de f.

c) Dado que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^3\left(1 - \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}\right)\right] = +\infty$, se tiene que f no es acotada superiormente.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}}{x-3} & , \quad x \neq 3 \\ 1 & , \quad x = 3 \end{cases}$$

a) ¿Qué significa que f sea continua en x_0?

b) Evaluar $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

c) Determinar si f es continua en $x_0 = 3$.

Solución:

a) Significa que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Como para $x \neq 3$, se tiene que

$$\frac{1 - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}}{x-3} \cdot \frac{1 + \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}}{1 + \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}} = \frac{\dfrac{x+1}{x+1} - \dfrac{4}{x+1}}{(x-3)\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}\right)} = \frac{\dfrac{x-3}{x+1}}{(x-3)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}} + 1\right)},$$

entonces $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x+1)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}} + 1\right)} = \dfrac{1}{8}$.

c) No, ya que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{1}{8}$ y $f(3) = 1$.

2. La Derivada

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2 + 5 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$. Analizar la existencia de la derivada de f en todo $\mathbb{R}$.

   Solución: Para $x < 2$, se tiene que $f'(x) = 4$; para $x > 2$, se tiene que $f'(x) = 2x$.

   Como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 7$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 9$, se tiene que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe, luego f no es continua en $x_0 = 2$ y por lo tanto, ella no es derivable en dicho punto.

   De lo anterior, f es derivable en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x_0 = 2$.

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+x^2+x+1 & , \quad x\neq 0\\ \quad 1 & , \quad x=0\end{cases}$$

a) Calcular $f'(x)$, en cada punto donde exista.

b) Calcular $f''(x)$ para $x\neq 0$.

Solución:

a) Para $x\neq 0$, de las reglas de derivación, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot -\frac{1}{x^2}+2x+1\\ &= 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2x+1. \end{aligned}$$

Para $x=0$, por definición

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x+1\right)\\ &= 1, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho que

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

pues, si $x\neq 0$, entonces es válida la desigualdad $\left|x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\leq x^2$.

b) Para $x\neq 0$, de las reglas de derivación y de la parte anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)-x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}+2\\ &= 6x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-4\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2 \end{aligned}$$

3. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ c + \sqrt{x-1} & , \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Determinar los valores de a, b y c de modo que f sea derivable en $]0,5[$ y $f(0) = f(5)$.

Solución:

De la condición $f(0) = f(5)$, se obtiene que $c = -2$.

Por otro lado, dado que f debe ser continua en $]0,5[$ y lo es en $]0,2[$ y en $]2,5[$, basta analizar la continuidad para f en $x_0 = 2$. Para que f sea continua en $x_0 = 2$, debe tenerse que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ y por lo tanto

$$4a + 2b = -1 \tag{1}$$

De manera similar a lo anterior, dado que f debe ser derivable en $]0,5[$ y lo es en $]0,2[$ y en $]2,5[$, basta analizar la derivabilidad de f en $x_0 = 2$.

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{a(x^2 - 4) + b(x - 2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} a(x+2) + b = 4a + b$ y

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \dfrac{1}{2}$, entonces $f'(2)$ existe si y sólo si

$$4a + b = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2), se obtiene que $a = \dfrac{1}{2}$ y $b = -\dfrac{3}{2}$.

Así, f es derivable en $]0,5[$ y $f(0) = f(5)$ si

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad c = -2.$$

4. Sea $f(x) = \sin^5\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)$. Calcular $f'(x)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 5\sin^4\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\\
&= 5\sin^4\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\left(\frac{3x^2(4x^6+1)-(x^3-1)24x^5}{(4x^6+1)^2}\right)\\
&= -\frac{15x^2(4x^6-8x^2-1)}{(4x^6+1)^2}\sin^4\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cos\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)
\end{aligned}
$$

5. Utilizar las reglas de derivación para calcular $f'(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x) = x^5 \cos(2x^3)$

   b) $f(x) = \sin\left(\ln\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)\right)$

   c) $f(x) = e^{\tan\left(x^3+2x\right)}$

   Solución:

   a) $f'(x) = 5x^4 \cos(2x^3) + x^5 \cdot - \sin(2x^3) \cdot 6x^2$

   $$f'(x) = 5x^4 \cos(2x^3) - 6x^7 \sin(2x^3)$$

   b) $f'(x) = \cos\left(\ln\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)\right) \cdot \dfrac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} \cdot (4x^3 + 4x)$

   $$f'(x) = \frac{4x^3 + 4x}{x^4 + 2x^2 + 1} \cos\left(\ln\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)\right)$$

   c) $f'(x) = e^{\tan\left(x^3+2x\right)} \cdot \sec^2\left(x^3 + 2x\right) \cdot (3x^2 + 2)$

   $$f'(x) = (3x^2 + 2)\, e^{\tan\left(x^3+2x\right)} \sec^2\left(x^3 + 2x\right)$$

6. Utilizar las reglas de derivación para, en cada caso, calcular $f'(x)$:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + x}{x^6 + 1}}$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4 + 1}{x^6 + x^2 + 1}\right)$

c) $f(x) = \tan^3\left(5x^3 + 2x\right)$

Solución:

a) Como $f(x) = \left(\dfrac{x^3 + x}{x^6 + 1}\right)^{1/3}$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3 + x}{x^6 + 1}\right)^{-2/3} \cdot \frac{(3x^2 + 1)(x^6 + 1) - (x^3 + x) \cdot 6x^5}{(x^6 + 1)^2}$$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x^4 + 1}{x^6 + x^2 + 1}} \cdot \dfrac{4x^3 \cdot (x^6 + x^2 + 1) - (x^4 + 1)(6x^5 + 2x)}{(x^6 + x^2 + 1)^2}$

c) $f'(x) = 3\tan^2\left(5x^3 + 2x\right)\sec^2\left(5x^3 + 2x\right) \cdot (15x^2 + 2)$

7. Sea $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$. Calcular $f'(x)$ y luegodeterminar las ecuaciones de la rectas tangente y normal al gráfico de f en el punto $(1, 1)$.

Solución: Al reescribir $f(x) = (2x^2 - 3x + 2)^{1/3}$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x^2 - 3x + 2\right)^{-2/3}(4x - 3) = \frac{4x - 3}{3\left(2x^2 - 3x + 2\right)^{2/3}},$$

de donde, la pendiente de la recta tangente pedida es $f'(1) = \dfrac{1}{3}$ y por lo tanto, la ecuación de dicha recta es

$$y - 1 = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow x - 3y + 2 = 0.$$

Por otra parte, la ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) \Leftrightarrow 3x + y - 4 = 0.$$

`https://www.desmos.com/calculator/ogpgsxuxki`

8. Mostrar que $y = f(x) = e^{2x} - x$ satisface la ecuación

$$y' - 2y = 2x - 1.$$

Solución:

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 2e^{2x} - 1 - 2\left(e^{2x} - x\right) \\ &= 2e^{2x} - 1 - 2e^{2x} + 2x \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

9. Mostrar que $y = 9\sin(x) - \dfrac{1}{3}\cos(x) + 5$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y - 5 = 0.$$

Solución: Dado que

$$\frac{dy}{dx} = 9\cos(x) + \frac{1}{3}\sin(x)$$

y que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -9\sin(x) + \frac{1}{3}\cos(x) = 5 - y$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + y - 5 &= (5 - y) + y - 5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

10. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si:

a) $y = Arcsec(x)$

b) $x^3 + y^3 - 1 = 8xy$

c) $y - \cos(x + y) = 0$

Solución:

a) Si $y = Arcsec(x)$, entonces $\sec(y) = x$. Luego, derivando implícitamente respecto a x en ambos lados tenemos que

$$\sec(y)\tan(y)\frac{dy}{dx} = 1.$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec(y)\tan(y)}$$

Como $\sec(y) = x$, haciendo uso de la identidad $\tan^2(y) + 1 = \sec^2(y)$, se tiene que $\tan(y) = \sqrt{\sec^2(y) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$. De este modo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

b) Si $x^3 + y^3 - 1 = 8xy$, entonces derivando implícitamente la ecuación respecto a x se tiene que

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 8y + 8x\frac{dy}{dx}$$

Luego,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$$

c) Si $y - \cos(x + y) = 0$, derivando implícitamente con respecto a x

$$\frac{dy}{dx} + \sin(x + y)\Big(1 + \frac{dy}{dx}\Big) = 0$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$$

11. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación

$$(x^2+y^2)^2 = 4x^2y+9$$

en el punto $(2,1)$.

Solución: Derivando implícitamente la ecuación, suponiendo $y = y(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} 2(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right) &= 8xy+4x^2\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{4x(x^2+y^2)-8xy}{4x^2-4y(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

por lo que la pendiente de la recta tangente pedida es $m = \dfrac{dy}{dx}(2,1) = -6$ y su ecuación es

$$y-1 = -6(x+2) \Leftrightarrow y = -6x+13.$$

`https://www.desmos.com/calculator/vlpcpddtbl`

12. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva C de ecuación

$$x^3 + y^3 = 6xy,$$

en el punto $(3, 3)$.

Solución: Al suponer $y = y(x)$ y derivar implícitamente la ecuación de C, se tiene

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6y + 6x \frac{dy}{dx},$$

de donde se obtiene que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$.

De lo anterior, la pendiente de la recta tangente C en el punto $(3, 3)$ es

$$m = \frac{dy}{dx}(3, 3) = -1$$

y por lo tanto ecuación de la recta es $y - 3 = -(x - 3) \Leftrightarrow x + y = 6$.

`https://www.desmos.com/calculator/hx6qgnta8o`

13. Dada la curva C en $\mathbb{R}^2$, determinada por la ecuación

$$x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - x - y = 0,$$

encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a C en los puntos donde la curva intersecta al eje y.

Solución: Para encontrar los puntos en que C intersecta al eje y, se reemplaza $x = 0$ en la ecuación de la curva, obteniendo la ecuación

$$\frac{1}{4}y^2 - y = 0,$$

la cual se satisface para $y = 0$ e $y = 4$. Entonces los puntos de intersección buscados son $(0, 0)$ y $(0, 4)$.

Por otro lado, al derivar implícitamente la ecuación de la curva, se obtiene

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y\frac{dy}{dx} - 1 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

es decir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x - y}{x + \frac{1}{2}y - 1}.$$

Por lo tanto:

- En $(x, y) = (0, 0)$, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = -1$, la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -x$ y
- en $(x, y) = (0, 4)$, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = -3$, la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -3x + 4$.

`https://www.desmos.com/calculator/oiebgynj5n`

14. Dada la curva C en $\mathbb{R}^2$, determinada por la ecuación

$$y^2e^x - x - y = 2,$$

encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a C en los puntos donde la curva intersecta al eje y.

Solución: Al reemplazar $x = 0$ en la ecuación de C se obtienen los valores $y = -1$ e $y = 2$, por lo tanto, la curva intersecta al eje y en los puntos $P_1 = (0, -1)$ y $P_2 = (0, 2)$.

Por otro lado, al derivar implícitamente la ecuación de la curva, se obtiene

$$2y\frac{dy}{dx}e^x + y^2e^x - 1 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2e^x}{2ye^x - 1}.$$

De lo anterior,

- En $P_1 = (0, -1)$, se tiene que $\dfrac{dy}{dx} = 0$ y la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -1$.

- En $P_2 = (0, 2)$, se tiene que $\dfrac{dy}{dx} = -1$ y la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -x + 2$.

`https://www.desmos.com/calculator/zk2qj69inp`

15. Sea C la curva de ecuación

$$x^3y + xy^3 = 32,$$

mostrar que las rectas tangentes a C en $(-2,-2)$ y en $(2,2)$ no se intersectan.

Solución: Al suponer $y = y(x)$ y derivar implícitamente la ecuación de C, se tiene

$$3x^2y + x^3\frac{dy}{dx} + y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde se obtiene que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}$.

Si L_1 es la recta tangente a C en el punto $(-2,-2)$, entonces ella tiene pendiente

$$m_1 = \frac{dy}{dx}(-2,-2) = -\frac{-24-8}{-8-24} = -1$$

y su ecuación es $x + y = -4$.

Si L_2 es la recta tangente a C en el punto $(2,2)$, entonces ella tiene pendiente

$$m_2 = \frac{dy}{dx}(2,2) = -\frac{24+8}{8+24} = -1.$$

y su ecuación es $x + y = 4$.

De las dos ecuaciones, se obtiene que $-4 = 4$ y como esto es absurdo, las dos rectas no se intersectan.

`https://www.desmos.com/calculator/t9cztxjzhs`

16. Las variables x, y y z son funciones derivables en la variable t y tales que para todo t, se tiene que

$$x^3 - 2xy + y^2 + 2xz - 2xz^2 + 3 = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 4.$$

Hallar los dos valores para $\dfrac{dz}{dt}$ cuando $x = 1$ e $y = 2$.

Solución: De la relación entre x, y y z se tiene que

$$x^3 - 2x(y - z + z^2) + y^2 + 3 = 0,$$

y si $x = 1$ e $y = 2$ se obtiene $z^2 - z - 2 = 0$, es decir, $z = -1$ y $z = 2$.

Por otra parte, de la relación de antes, al derivar implícitamente con respecto a t

$$3x^2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dx}{dt}\left(y - z + z^2\right) - 2x\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + 2z\frac{dz}{dt}\right) + 2y\frac{dy}{dt} = 0.$$

De la última igualdad, como $\dfrac{dx}{dt} = 3$ y $\dfrac{dy}{dt} = 4$, al considerar $x = 1$, $y = 2$ y $z = -1$ se tiene que $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{7}{6}$ y al considerar $x = 1$, $y = 2$ y $z = 2$ se tiene que $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{7}{6}$. De lo anterior, se ha llegado entonces a que $\dfrac{dz}{dt} = \pm\dfrac{7}{6}$.

3. Aplicaciones de la Derivada

3.1. Variaciones relacionadas

1. Se deja caer una piedra en agua tranquila, lo cual genera ondas circulares concéntricas como las de la figura

y el radio exterior aumenta a una razón de 1 pie/s. En el instante en que dicho radio es de 4 pies, ¿con qué tasa cambia el área acotada por la circunferencia correspondiente?

Solución: Sean $r(t)$ y $A(t)$ el radio y el área de la primera onda, respectivamente, en el tiempo $t \geq 0$ (en segundos). Como $A(t) = \pi r^2(t)$, al derivar con respecto a t, se tiene que,

$$A'(t) = 2\pi r(t) r'(t)$$

y si t_0 es el instante en el cual $r(t_0) = 4$, de la igualdad anterior al considerar $t = t_0$; dado que $r'(t) = 1$ (lo cual implica que en particular $r'(t_0) = 1$), se obtiene que

$$A'(t_0) = 8\pi$$

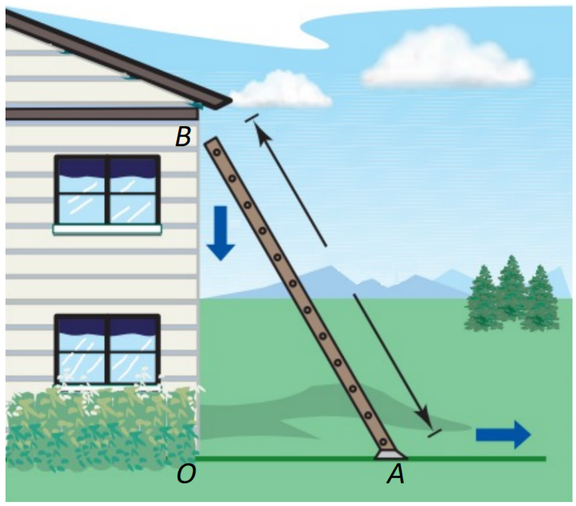
y por lo tanto, en el instante t_0, el área indicada aumenta a razón de 8π pies^2/s.

2. Una escalera de 5 metros de longitud se desliza por una pared. Cuando el extremo inferior está a 4 metros de la pared, el otro extremo baja por la pared a razón de 2 metros por segundo. En ese instante:

   a) ¿Con qué rapidez se desplaza el extremo inferior a lo largo del suelo?

   b) ¿Con qué rapidez varía el área encerrada por la pared, el suelo y la escalera?

Solución:



Sean $x(t)$ e $y(t)$ las distancias desde O hasta A y desde O hasta B, respectivamente.

a) Por Teorema de Pitágoras se tiene que $x^2(t) + y^2(t) = 25$.

Sea t_0 el instante en el cual $x(t_0) = 4$; se tiene, $y(t_0) = 3$.

Al derivar implícitamente se tiene que $x'(t) = -\dfrac{y(t)}{x(t)} \cdot y'(t)$ y evaluando en t_0 se obtiene

$$x'(t_0) = -\frac{y(t_0)}{x(t_0)} \cdot y'(t_0) = -\frac{3}{4} \cdot -2 = \frac{3}{2} \text{ metros por segundo.}$$

b) El área está dada por $A(t) = \dfrac{1}{2}x(t) \cdot y(t)$, luego

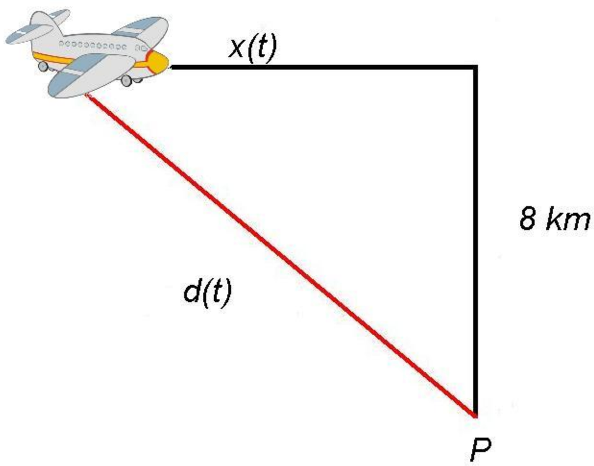
$$A'(t) = \frac{1}{2}\left(x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t)\right),$$

por lo tanto

$$A'(t_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} \cdot 3 + 4 \cdot -2\right) = -\frac{7}{4} \text{ metros cuadrados por segundo.}$$

3. Un avión se desplaza en un vuelo horizontal a 8 kilómetros de altura. La ruta de vuelo pasa por un punto P situado en tierra. Si la distancia entre el avión y el punto P disminuye a razón de 4 kilómetros por minuto; determinar la velocidad del avión en el instante en que dicha distancia es de 10 kilómetros.

Solución:



Sean $x(t)$ y $d(t)$ las distancias, en kilómetros, indicadas en la figura. Por Teorema de Pitágoras, se tiene

$$x^2(t) + 64 = d^2(t).$$

Sea t_0 el instante en el cual $d(t_0) = 10$, dado que $x(t_0) = 6$, al derivar implícitamente se tiene que

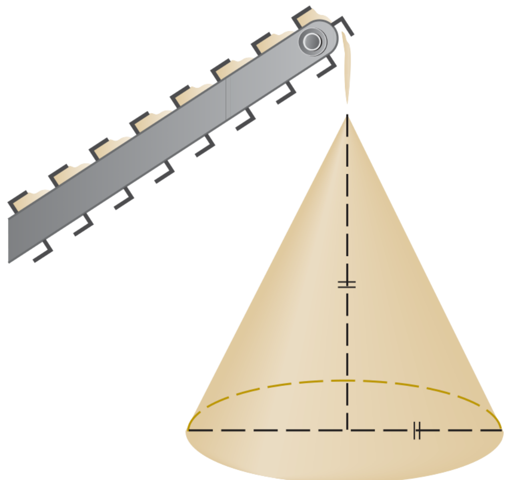
$$x'(t) = \frac{d(t)}{x(t)} \cdot d'(t)$$

y evaluando en t_0 se obtiene

$$x'(t_0) = \frac{d(t_0)}{x(t_0)} \cdot d'(t_0) = \frac{10}{6} \cdot -4 = -\frac{20}{3} \text{ kilómetros por minuto.}$$

De lo anterior, la velocidad del avión es de $\dfrac{20}{3}$ kilómetros por minuto.

4. Desde un conducto cae arena a razón de 3 metros cúbicos por minuto y va formando un montículo cónico.



Si el diámetro en la base fuese siempre igual al triple de la altura. ¿A qué velocidad cambiaría en el instante en que ella alcance 4 metros?

Solución: Sean $d(t)$, $h(t)$ y $V(t)$ el diámetro, la altura y el volumen del cono, respectivamente, en el tiempo $t \geq 0$ (en minutos). Como $d(t) = 3h(t)$, se tiene

$$V(t) = \frac{3\pi}{4} h^3(t).$$

Al derivar con respecto a t a ambos lados de la ecuación anterior,

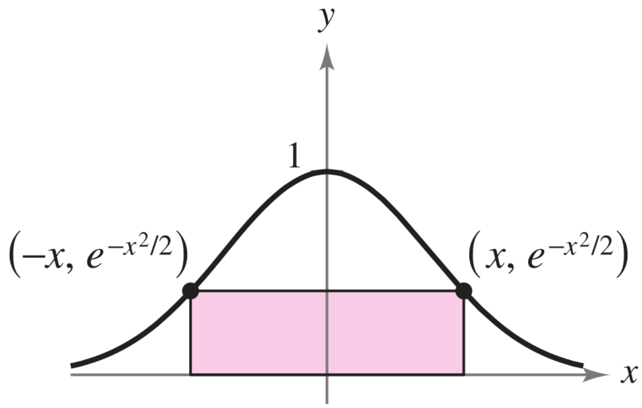
$$V'(t) = \frac{9\pi}{4} h^2(t) h'(t).$$

Si t_0 es el instante en el cual $h(t_0) = 4$, como $V'(t_0) = 3$, de la igualdad anterior al considerar $t = t_0$ se obtiene que

$$h'(t_0) = \frac{1}{12\pi}$$

y por lo tanto, la altura aumenta a razón de $1/12\pi$ metros por minuto cuando ella mide 4 metros.

5. Considerar el rectángulo de la figura



a) Expresar el área del rectángulo en función de x.

b) Calcular la razón de cambio del área cuando $x = 2$, si $\dfrac{dx}{dt} = 4$ cm/min.

Solución:

a) $A = 2xe^{-x^2/2}$

b) Como

$$\frac{dA}{dt} = 2\,\frac{dx}{dt}e^{-x^2/2} + 2xe^{-x^2/2} \cdot -x\frac{dx}{dt} = 2\frac{dx}{dt}e^{-x^2/2}\left(1 - x^2\right),$$

si t_0 es el instante tal que $x(t_0) = 2$, entonces

$$A'(t_0) = 2 \cdot 4e^{-2} \cdot -3 = -24e^{-2} \approx -3.25 \text{ cm}^2/\text{min}.$$

6. Las longitudes x, y (en la base) y z (altura) de una caja rectangular sin tapa varían en el tiempo y en un cierto instante t_0 dichas aristas miden 2, 3 y 5, respectivamente. Si $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 2$ y $\dfrac{dz}{dt} = -3$, en dicho instante:

   a) Calcular la razón de cambio de la superficie total S de la caja.

   b) Determinar si la longitud L de la diagonal de la base crece o decrece.

Solución:

a) Como $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{dx}{dt}\,y + x\,\frac{dy}{dt} + 2\left(\frac{dx}{dt}\,z + x\,\frac{dz}{dt}\right) + 2\left(\frac{dy}{dt}\,z + y\,\frac{dz}{dt}\right)\\ &= (y+2z)\frac{dx}{dt} + (x+2z)\frac{dy}{dt} + 2(x+y)\frac{dz}{dt},\end{aligned}$$

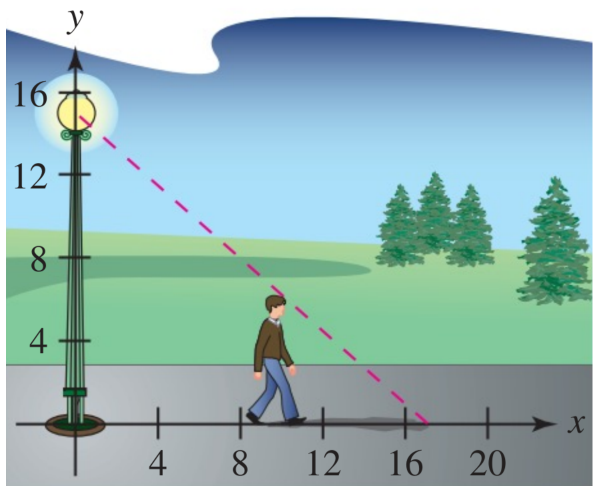
de donde se obtiene que $S'(t_0) = 20$.

b) Como $L(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}\right),\end{aligned}$$

de donde $L'(t_0) = \dfrac{10}{\sqrt{13}}$ y por lo tanto la longitud de la diagonal crece pues $L'(t_0) > 0$.

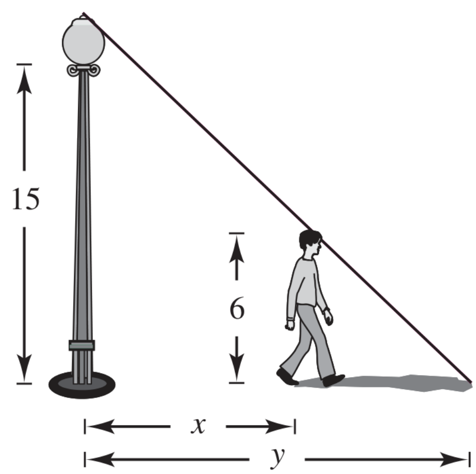
7. Una persona de 6 pies de estatura se aleja a una razón de 5 pies/s de un poste cuya luz está a 15 pies de altura. En el instante en que la persona está a 10 pies de la base del poste:



a) ¿A qué razón se mueve la punta de su sombra?

b) ¿A qué razón está cambiando la longitud de su sombra?

Solución: De la figura



por triángulo semejantes, se tiene que si x es la distancia de la base del poste a la persona e y es la distancia desde la misma base hasta la punta de la sombra, entonces

$$\frac{15}{6} = \frac{y}{y-x} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x$$

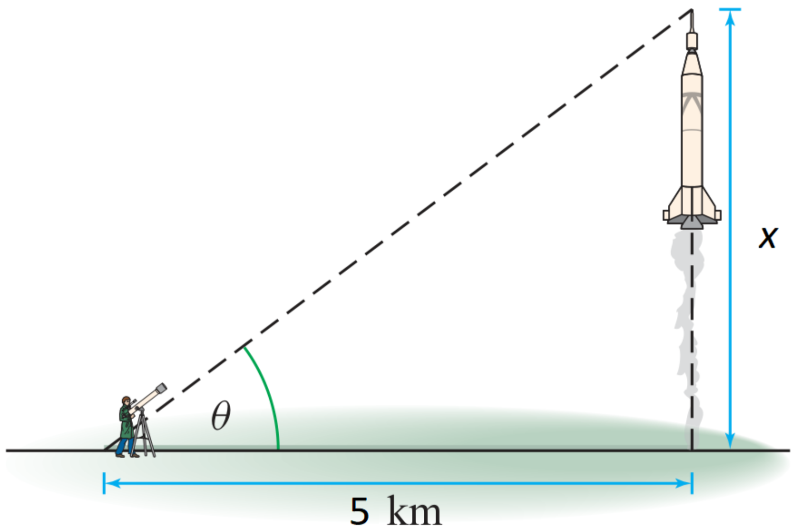
y por lo tanto, si t_0 es el instante tal que $x(t_0) = 10$, se tiene que:

a) $y'(t_0) = \frac{5}{3}x'(t_0) = \frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{25}{3}$ pies/s

b) $(y-x)'(t_0) = y'(t_0) - x'(t_0) = \frac{25}{3} - 5 = \frac{10}{3}$ pies/s

8. Un cohete que se mueve verticalmente a una velocidad de 300 kilómetros por hora es visto por un observador sobre la tierra a 5 kilómetros de la plataforma de lanzamiento. ¿Con qué rapidez aumenta el ángulo de elevación del cohete en el instante en que este se encuentra a 2 kilómetros de altura?

Solución: Sea $x(t)$ la altura en kilómetros a la que se encuentra el cohete en un determinado instante t, y sea t_0 tal que $x(t_0) = 2$.



Se sabe que

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = 300\,\text{km/h y}$$

si θ es el ángulo de elevación del observador, se tiene la relación

$$\tan(\theta) = \frac{x}{5}$$

derivando respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \sec^2(\theta)\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{5}\cos^2(\theta)\frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

En el instante t_0, se tiene que $\cos^2(\theta) = \dfrac{25}{29}$.

Luego

$$\theta'(t_0) = \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{29} \cdot 300 = \frac{1500}{29}\,\text{rad/h}$$

por lo tanto, el ángulo, en el instante t_0 aumenta a esta tasa.

9. Cuando un cierto gas poliatómico sufre una expansión adiabática, su presión p y volumen V satisfacen la ecuación

$$pV^{1.3} = k$$

donde k es una constante. Determinar la relación entre las razones de cambio $\dfrac{dp}{dt}$ y $\dfrac{dV}{dt}$.

Solución: Al derivar implícitamente en la ecuación indicada con respecto al tiempo, se tiene que

$$\begin{aligned} 1.3pV^{0.3}\frac{dV}{dt} + V^{1.3}\frac{dp}{dt} &= 0 \\ V^{0.3}\left(1.3p\frac{dV}{dt} + V\frac{dp}{dt}\right) &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\quad 1.3p\dfrac{dV}{dt} = -V\dfrac{dp}{dt}$.

10. Cuando cae una *gota esférica* de lluvia, alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a una velocidad proporcional a su superficie. Verificar que el radio de la gota de lluvia disminuye a un ritmo constante.

    Solución: Como la tasa de evaporación es proporcional a la superficie, se tiene que

$$\frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2} = k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dV}{dt} = 4k\pi r^2.$$

    Ahora, por derivación implícita, dado que

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt},$$

    se obtiene que $\dfrac{dr}{dt} = k$.

3.2. Gráficos

1. Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^3 + 3x - 2$.

   a) Evaluar, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$. Además, sabiendo que G_f intersecta al eje x exactamente en dos puntos, determinar dichos puntos.

   b) Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad.

   Solución:

   a) La valores son $f(-2) = 0$, $f(-1) = -4$, $f(0) = -2$, $f(1) = 0$ y $f(2) = -4$.

   Como G_f intersecta al eje x exactamente en dos puntos, de los valores anteriores, se tiene que dichos puntos son $(-2, 0)$ y $(1, 0)$.

   b) Como $f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1)$, los puntos críticos de f son $x = -1$ y $x = 1$.

   Dado que el signo de la derivada depende del producto $-(x+1)(x-1)$, entonces si $x \in \,]-\infty, -1[$ o si $x \in \,]1, +\infty[$ se tiene que f' es negativa y si $x \in \,]-1, 1[$ se tiene que f' es positiva; por lo tanto, f es decreciente en el conjunto $]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$ y es creciente en $]-1, 1[$, en $x = -1$ hay un mínimo relativo y en $x = 1$ hay un máximo relativo para f.

   Por otra parte, como $f''(x) = -6x$, se tiene f'' es positiva cuando $x < 0$ y f'' es negativa cuando $x > 0$, se tiene entonces que G_f es cóncavo hacia arriba en el intervalo $]-\infty, 0[$ y cóncavo hacia abajo en el intervalo $]0, +\infty[$; por lo tanto, $x = 0$ es un punto de inflexión para G_f.

   `https://www.desmos.com/calculator/7hkqndh8ym`

2. Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, puntos de inflexión e intervalos de concavidad para luego esbozar el gráfico de f.

Solución: Como $f'(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2(x+1)(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2)$, se tiene que los puntos críticos de f son $x_0 = -1$, $x_0 = 1$ y $x_0 = 2$.

Dado que el signo de la derivada depende del producto $(x+1)(x-1)(x-2)$, entonces si $x \in \left]-\infty, -1\right[$ o si $x \in \left]1, 2\right[$ se tiene que f' es negativa y si $x \in \left]-1, 1\right[$ o si $x \in \left]2, +\infty\right[$ se tiene que f' es positiva; por lo tanto, f es decreciente en el conjunto $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, 2\right[$ y es creciente en $\left]-1, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

Además, de lo anterior y del criterio de la primera derivada, se tiene que en $x_0 = -1$ hay un mínimo relativo, en $x_0 = 1$ hay un máximo relativo y en $x_0 = 2$ hay un mínimo relativo para f.

Por otra parte, como

$$f''(x) = 6x^2 - 8x - 2 = 6\left(x - \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right),$$

se tiene f'' es positiva si $x \in \left]-\infty, \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right[$ y f'' es negativa si $x \in \left]\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$, se tiene entonces que G_f es cóncavo hacia en el conjunto $\left]-\infty, \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right[$ y cóncavo hacia abajo en el intervalo $\left]\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$; por lo tanto, $x_0 = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$ son puntos de inflexión.

`https://www.desmos.com/calculator/hltf205qk6`

3. Sea $f(x) = x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 1$. Determinar:

   a) Puntos críticos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de máximo y de mínimo relativos; intervalos de concavidad de G_f y puntos de inflexión.

   b) Si f posee extremos absolutos.

Solución:

a) f es derivable en todo $\mathbb{R}$, luego sus puntos críticos son (solamente) las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$; como $f'(x) = 5x^4 - 5x^2 = 5x^2(x+1)(x-1)$, se tiene que los puntos críticos de f son -1, 0 y 1.

La tabla de signos asociada a f' está dada por

x		-1		0		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

por lo que f es creciente en los intervalos $]-\infty,-1[$ y $]1,+\infty[$, es decreciente en $]-1,1[$; tiene un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 1.

Por otra parte como $f''(x) = 20x^3 - 10x = 10\left(\sqrt{2}x+1\right)x\left(\sqrt{2}x-1\right)$, se tiene que la tabla asociada a f'' es

x		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

por lo que G_f es cóncavo hacia arriba en los intervalos $\left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right[$ y $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}},\infty\right[$, es cóncavo hacia abajo en los intervalos $\left]-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ y $\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Además, de lo anterior; hay tres puntos de inflexión (en donde cambia la concavidad), $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 0 y $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^5\left(1 - \frac{5}{3x^2} - \frac{1}{x^5}\right) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

f no posee extremos absolutos.

Observación: Otra justificación para asegurar la no existencia de extremos absolutos, se debe al hecho que f es creciente en los intervalos $]-\infty,-1[$ y $]1,+\infty[$.

https://www.desmos.com/calculator/ahdbaebli1

4. Sea $f(x) = e^x(x-4)$, definida para $x \in [-2, \infty[$, determinar:

   a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

   b) Extremos relativos, si existen, indicando la naturaleza de cada uno de ellos.

   c) Si f posee máximo absoluto.

   d) Intervalos de concavidad del gráfico de f.

Solución:

a) Como $f'(x) = e^x(x-3)$ y $e^x > 0$; se tiene que $f'(x) < 0$ para $x \in]-2, 3[$y $f'(x) > 0$ para $x \in]3, \infty[$, por lo que f es decreciente en $]-2, 3[$ y es creciente en $]3, \infty[$.

b) El único punto crítico para f es $x_0 = 3$ y por el criterio de la primera derivada (f' pasa de negativa a postiva), dicho punto corresponde a un mínimo estricto local.

c) f no posee máximo absoluto pues $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) Como $f''(x) = e^x(x-2)$ se tiene que $f''(x) < 0$ para $x \in]-2, 2[$ y $f''(x) > 0$ para $x \in]2, \infty[$, por lo que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $]-2, 2[$ y cóncavo hacia arriba en $]2, \infty[$.

`https://www.desmos.com/calculator/aoz4apba4y`

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{x^2+1} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$. Determinar:

   a) Puntos críticos.

   b) Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

   c) Si f alcanza máximo y/o mínimo absoluto.

Solución:

a) Para $x < 0$: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, y luego no hay puntos críticos negativos.

Para $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y luego el único punto crítico positivo es $x = 1$.

De lo anterior, el único punto crítico de f es $x_0 = 1$.

Observación: También se considera correcto afirmar que $x_0 = 0$ es un punto crítico para f debido a la discontinuidad de f en dicho punto.

b) De la parte anterior, se tiene que f es decreciente en el intervalo $]-\infty, 0[$.

Para $x > 0$, se tiene $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ y $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Luego, f es creciente en $]0, 1[$ y es decreciente en $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$.

c) Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, f no alcanza mínimo absoluto.

Por otra parte, dado que $f(x) < 0 \ \forall x < 0$, de lo obtenido en *b*) y del hecho que $f(1) = \dfrac{1}{2} > 0$, es claro que f alcanza su máximo absoluto en $x_0 = 1$.

`https://www.desmos.com/calculator/i0s6ayzsmd`

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y luego esbozar el gráfico de f.

Solución: Como $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, se tiene que los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 3$, además como f' es positiva en $]-\infty, 1[\, \cup\,]3, +\infty[$ y es negativa en $]1, 3[$, se tiene que f es creciente en $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ y es decreciente en $]1, 3[$; además por el criterio de la primera derivada, $x = 1$ es un punto de máximo relativo y $x = 3$ es un punto de mínimo relativo.

Por otra parte, como $f''(x) = 6x - 12$, se tiene que f'' es negativa en $]-\infty, 2[$ y es positiva en $]2, +\infty[$ y por lo tanto, el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $]-\infty, 2[$ y cóncavo hacia arriba en $]2, +\infty[$ y entonces $(2, f(2)) = (2, 2)$ es el único punto de inflexión.

`https://www.desmos.com/calculator/fmtgs0j9oj`

7. Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2)^3$, determinar:

   a) intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

   b) la naturaleza de cada uno de los puntos críticos.

   c) un esbozo del gráfico de f.

   d) si f posee máximo absoluto.

   Solución:

   a) Dado que $f'(x) = \dfrac{(x+2)^2}{4}(5x+1)(x-1)$, de la tabla

x		$-1/5$		1	
$5x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

   se observa que f es creciente en el conjunto $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ y que f es decreciente en el intervalo $\left]-\frac{1}{5}, 1\right[$.

   b) Los puntos críticos son $x_0 = -2$, $x_0 = -1/5$ y $x_0 = 1$, de la parte anterior, se tiene que $x_0 = 2$ no es ni máximo relativo ni mínimo relativo (pues en este punto f' no cambia de signo), $x_0 = -1/5$ es punto de máximo relativo y $x_0 = 1$ es punto de mínimo relativo.

   c) De la primera parte se tiene que un esbozo del gráfico de f es

   `https://www.desmos.com/calculator/akl5zkmgru`

   d) Como para todo $x > 1$, f es siempre creciente, entonces se tiene f no posee máximo absoluto.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y luego esbozar el gráfico de f.

Solución: Como $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6\,(x-1)\,(x-2)$, se tiene que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 2)\,.$$

Los puntos críticos de f son $x = 1$ y $x = 2$. Dado que el signo de la derivada depende del producto $(x-1)\,(x-2)$, entonces si $x \in \left]-\infty, 1\right[$ o si $x \in \left]2, +\infty\right[$ se tiene que f' es positiva y si $x \in \left]1, 2\right[$ se tiene que f' es negativa. Por lo tanto f es creciente en el conjunto $\left]-\infty, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[$ y es decreciente en $\left]1, 2\right[$, en $x = 1$ hay un máximo relativo y en $x = 2$ hay un mínimo relativo para f.

Por otra parte, $f''(x) = 12x - 18 = 12\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

Como f'' es positiva cuando $x > \dfrac{3}{2}$ y f'' es negativa cuando $x < \dfrac{3}{2}$, se tiene que G_f es cóncavo hacia abajo en el intervalo $\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$ y cóncavo hacia arriba en el intervalo $\left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$; por lo tanto, $x = \dfrac{3}{2}$ es un punto de inflexión para G_f.

De lo anterior, un esbozo del gráfico es

`https://www.desmos.com/calculator/k1qqls0xpk`

9. La **derivada** de una función f está dada por:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 12}{(x-4)^2}$$

Determinar:

a) extremos relativos de f, si existen.

b) intervalos de concavidad del gráfico de f.

c) puntos de inflexión del gráfico de f.

Solución:

a) Dado que $x^2 - 6x + 12 = x^2 - 6x + 9 + 3 = (x-3)^2 + 3 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que f no posee puntos críticos y por lo tanto no tiene extremos relativos.

b) Como $f''(x) = -\dfrac{2x(x-4)}{(x-4)^4} = -\dfrac{2x}{(x-4)^3}$, de la tabla

x		0		4	
$x-4$	$-$	0	$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$

se tiene que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ y hacia arriba en $]0, 4[$.

c) El punto $(0, f(0))$ es de inflexión para el gráfico de f y en el caso en que f esté definida en $x = 4$ (y sea continua en dicho punto), entonces $(4, f(4))$ también es punto de inflexión.

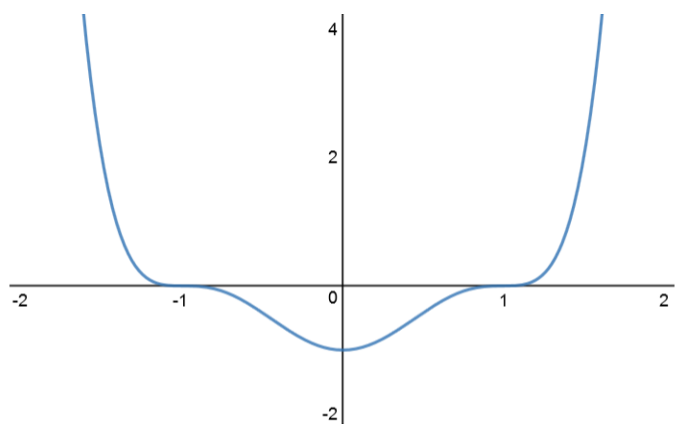
10. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y luego esbozar el gráfico de f para $f(x) = (x^2 - 1)^3$.

Solución: Como $f'(x) = 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1)$, estos últimos son los puntos críticos. Por otra parte, si $x \in \mathbb{R}^-$ entonces $f' \leq 0$ y si $x \in \mathbb{R}^+$ entonces $f' \geq 0$ y por lo tanto f es decreciente en $]-\infty, 0[$ y creciente en $]0, +\infty[$; además por el criterio de la primera derivada, $x = 0$ es un punto en donde se alcanza un mínimo relativo.

Dado que $f''(x) = 6(x^2-1)^2 + 6x(x^2-1)4x = 6(x+1)(\sqrt{5}x+1)(\sqrt{5}x-1)(x-1)$, la tabla de signos asociada a f'' está dada por

x		-1		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$		1	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

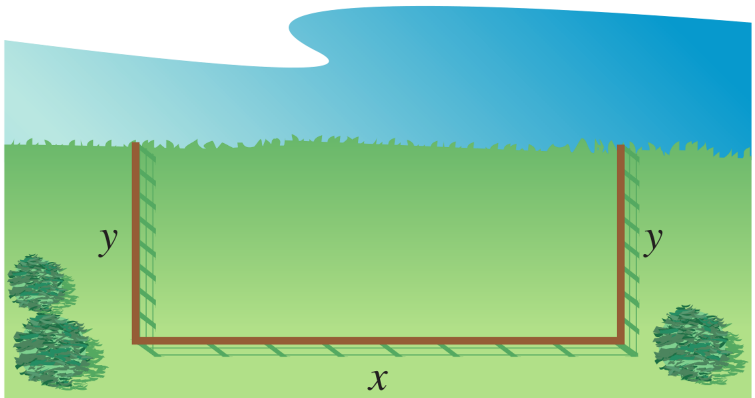
G_f es cóncavo hacia arriba en $]-\infty, -1[$, en $\left]-1/\sqrt{5}, 1\sqrt{5}\right[$y en $]1, +\infty[$; G_f es cóncavo hacia abajo en $\left]-1, -1/\sqrt{5}\right[$ y en $\left]1, 1\sqrt{5}\right[$. Los puntos de inflexión son $(-1, 0)$, $\left(-1/\sqrt{5}, -64/125\right)$, $\left(1/\sqrt{5}, 64/125\right)$ y $(1, 0)$. Un esbozo de G_f es



3.3. Optimización (Problemas de máximos y mínimos)

1. Una persona tiene 1200 metros de malla para cercar un terreno rectangular bordeando un río *recto*, de manera que no requiere malla en la orilla. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo para encerrar la mayor área posible?

   Solución: Al considerar x e y las dimensiones en metros del rectángulo como en la figura

   se tiene que la longitud de la malla es $2x+y=1200$ y que la función que determina el área $A=xy$, puede definirse como sigue:

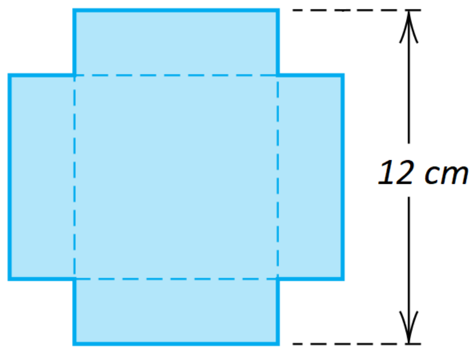
$$\begin{aligned} A : [0,600] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto A(x) = x(1200-2x) = 1200x - x^2. \end{aligned}$$

   Por el Teorema de los Valores Extremos, como A es continua y $[0,600]$ es un intervalo cerrado y acotado, está asegurada la existencia de máximo y mínimo absolutos.

   Para $x \in]0,600[$, $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 300$.

   Como $A(0)=0$, $A(300)=180000$ y $A(600)=0$, se tiene que el máximo absoluto se alcanza cuando $x=300$ y por lo tanto, las dimensiones buscadas son: ancho $y=600$ y largo $x=300$.

2. Se desea fabricar una caja sin tapa a partir de una hoja cuadrada de 12 centímetros de lado, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas como en la figura .



y luego doblando los lados hacia arriba. Encontrar la longitud del cuadrado que se debe cortar para obtener una caja cuyo volumen sea máximo.

Solución: Sea x la longitud en centímetros de los cuadrados a cortar en cada una de las cuatro esquinas. La base cuadrada de la caja tiene longitud $12 - 2x$. La función que define el volumen de la caja está dada por

$$\begin{aligned} V : [0,6] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto V(x) = x(12-2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x. \end{aligned}$$

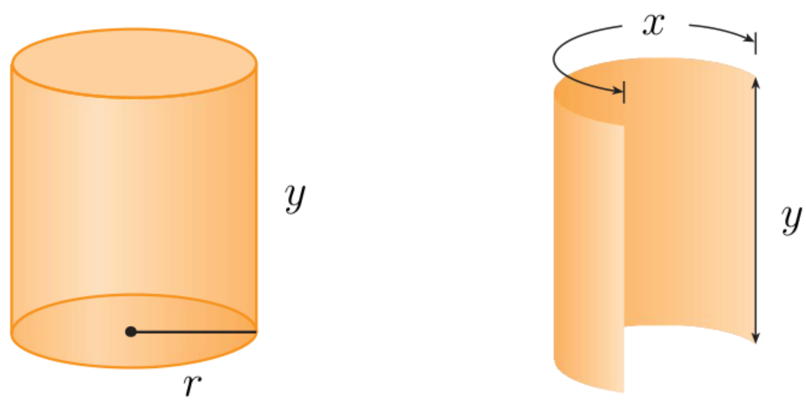
Por el Teorema de los Valores Extremos, como V es continua y $[0,6]$ es un intervalo cerrado y acotado, está asegurada la existencia de máximo y mínimo absolutos.

Para $x \in]0,6[$, $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Como $V(0) = 0$, $V(2) = 128$, $V(6) = 0$; se tiene que la longitud que maximiza el volumen de la caja es $x = 2$.

3. Un cilindro se construye pegando dos lados de un rectángulo cuyo perímetro es igual 36 centímetros. Determinar las dimensiones de los lados del rectángulo de modo que el volumen del cilindro sea máximo. Calcular dicho valor y justificar por qué él corresponde efectivamente a un máximo absoluto.

Solución: Sean x e y los lados del rectángulo, al pegar los lados de longitud y se obtiene un cilindro de altura y y con perímetro en la base igual a x.



Como el radio del cilindro es $r = x/2\pi$, entonces el volumen está dado por

$$V = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 y.$$

Por otra parte, como $2x + 2y = 36$, se tiene que $y = 18 - x$ y por lo tanto, el problema es hallar es máximo absoluto para

$$V(x) = \frac{18x^2 - x^3}{4\pi}, \text{donde } 0 \leq x \leq 18.$$

Como para $x \in \,]0, 18[$ se tiene que $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 36x - 3x^2 = 0$, entonces el único punto crítico para V en $]0, 18[$ es $x = 12$ y por lo tanto, aplicando el Teorema de los Valores Extremos, para obtener el máximo absoluto, basta comparar los valores de V en 0, 12 y 18.

Dado que $V(0) = V(18) = 0$ y $V(12) = \dfrac{216}{\pi}$, el valor máximo para el volumen es $\dfrac{216}{\pi}$ y él se alcanza cuando los lados del rectángulo son $x = 12$ e $y = 6$.

Observaciones: Por tratarse de un problema de máximos y mínimos absolutos:

- Una alternativa es haber considerado $V(x) = (18x^2 - x^3)/4\pi$, con $0 < x < 18$ y mostrar que $V'(x) > 0 \; \forall x \in \,]0, 12[$ y $V'(x) < 0 \; \forall x \in \,]12, 18[$.
- **No** es válido aquí, *aplicar* algún criterio para **extremos relativos**.

4. ¿Puede diseñarse un cilindro de volumen igual a $900\,cm^3$, con la mayor área posible?

Solución: No, pues un cilindro con el volumen indicado y de radio $r > 0$ en cms. tiene área

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1800}{r}$$

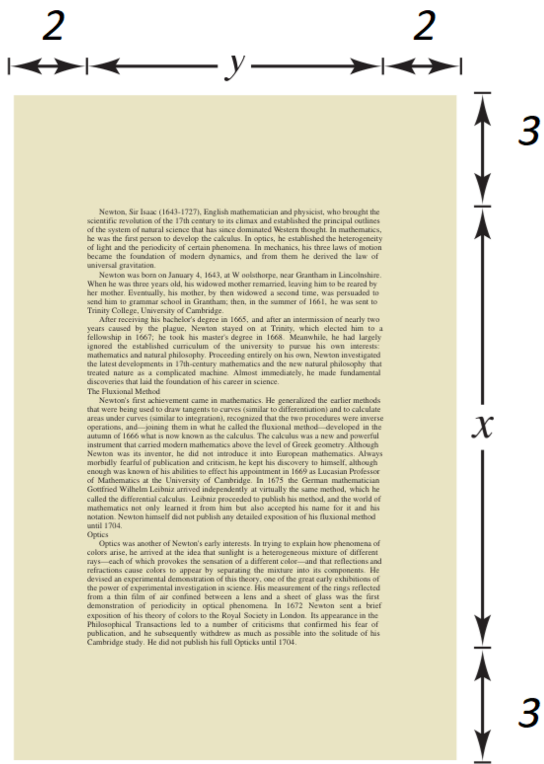
y por lo tanto, como

$$\lim_{r\to 0^+} A(r) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{r\to +\infty} A(r) = +\infty,$$

el cilindro podría ser muy ancho y bajo, o muy delgago y alto, en ambos casos con área *muy* grande.

5. Una página rectangular ha de contener 96 centímetros cuadrados de texto. Los márgenes superior e inferior tienen 3 centímetros de ancho y los laterales 2 centímetros. ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel requerido?

Solución: Sean x e y el ancho y la altura del área del texto, de la condición indicada se tiene que $xy = 96$ y por tanto el área total de la página,



dada por $(x+4)(y+6)$, puede definirse como

$$A(x) = (x+4)\left(\frac{96}{x} + 6\right) = 6x + 384x^{-1} + 120,\ x > 0.$$

Como $A'(x) = 6 - 384x^{-2} = 0 \Leftrightarrow x = 8$, A tiene como único punto crítico a $x = 8$.

Por otra parte, como $A''(x) > 0$, $\forall x > 0$, se tiene que $x = 8$ es un punto de mínimo absoluto y por lo tanto las dimensiones pedidas son: ancho 12 centímetros y largo 18 centímetros.

Observación: Dado que

$$A'(x) = 6 - \frac{384}{x^2} = \frac{6x^2 - 384}{x^2} = \frac{6}{x^2}\left(x^2 - 64\right) = \frac{6(x+8)}{x^2}(x-8),$$

el signo de A' depende solamente de $x - 8$. Como A' es siempre negativa (A es decreciente) a la izquierda de $x = 8$ y es siempre positiva (A es creciente) a la derecha de $x = 8$, entonces este hecho también permite concluir que en $x = 8$ se alcanza el mínimo absoluto.

6. Considerar los puntos $P(3,4)$ y $Q(x_0,0)$ con $x_0>3$. Encontrar:

   a) La ecuación de la recta L que pasa por P y Q y el área del triángulo R limitado por la recta la L y los ejes coordenados.

   b) El valor de x_0 tal que el área de R sea mínima.

   c) La ecuación de la recta que pasa por P y acota, con los semiejes positivos, al triángulo contenido en el primer cuadrante de menor área posible.

Solución:

a) La ecuación de la recta L que pasa por $(3,4)$ y $(x_0,0)$ está dada por

$$y=\frac{4}{3-x_0}\left(x-x_0\right),$$

y su intersección con el eje y está en el punto $\left(0,\dfrac{4x_0}{x_0-3}\right)$.

El área del triángulo acotado por L y los semiejes positivos, en función de x_0, es

$$A\left(x_0\right)=\frac{1}{2}x_0\frac{4x_0}{x_0-3}=\frac{2x_0^2}{x_0-3},\ x_0>3.$$

b) $A'\left(x_0\right)=\dfrac{4x_0\left(x_0-3\right)-2x_0^2}{\left(x_0-3\right)^2}=\dfrac{2x_0\left(x_0-6\right)}{\left(x_0-3\right)^2},\ x_0>3.$

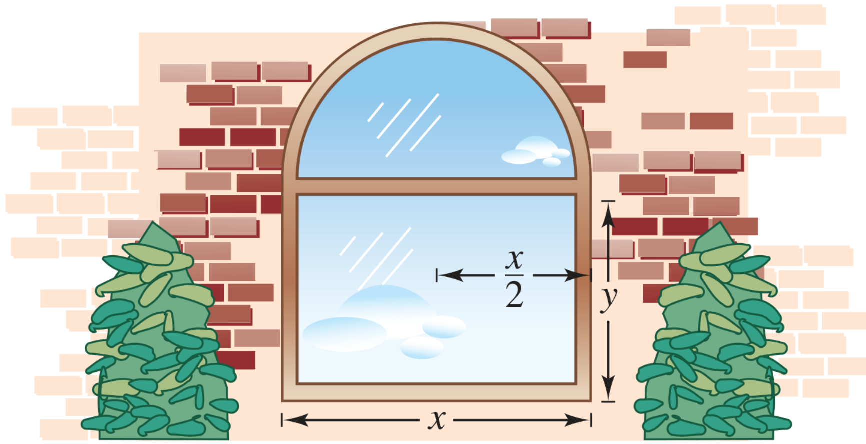
De lo anterior, el único punto crítico para A es $x_0=6$.

Además, como $A'\left(x_0\right)<0,\ \forall x_0<6$ y $A'\left(x_0\right)>0,\ \forall x_0>6$, se tiene que $x_0^*=6$ es el punto en donde se alcanza el mínimo absoluto para el área.

c) De lo anterior, considerando la recta de la parte *a*) y que $x_0=6$, la ecuación de la recta buscada es

$$4x+3y=24.$$

7. Una ventana normanda se compone de un semicírculo cuyo diámetro calza con la parte superior de un rectángulo, como en la figura:



Si una ventana normanda ha de tener perímetro igual a 16 pies, hallar los valores para x e y que determinan el área máxima.

Solución: Los valores de x e y, dado el perímetro indicado, deben ser tales que

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 16,$$

de donde, $y = \dfrac{32 - 2x - \pi x}{4}$ y por lo tanto, el área de la ventana en función de x, puede expresarse de la manera siguiente

$$A(x) = 8x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{8}x^2, \; \forall x > 0.$$

Como $A''(x) < 0$, $\forall x > 0$ y el único punto crítico de A es

$$x = \frac{32}{\pi + 4},$$

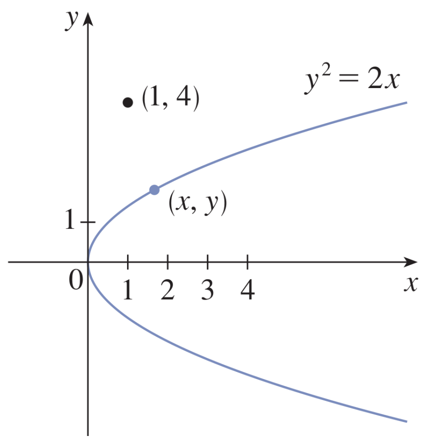
esto implica que $y = \dfrac{16}{\pi + 4}$ y estos son los valores que maximizan el área.

8. Hallar el punto sobre la parábola de ecuación $y^2 = 2x$ más cercano a $(1, 4)$.

Solución: La distancia desde un punto (x, y) cualquiera del plano al punto $(1, 4)$ está determinada por

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

y si en particular, dicho punto está sobre la parábola de la figura,



entonces la distancia está dada por

$$d(y) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2},\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

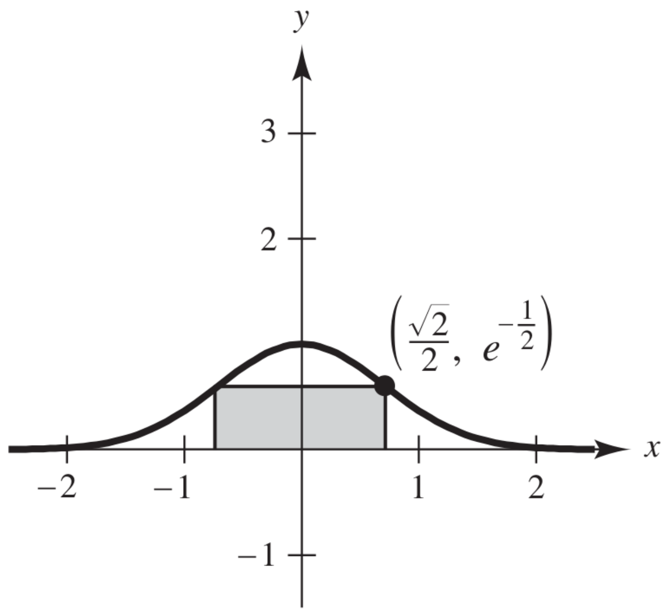
Al considerar como función objetivo la cantidad subradical,

$$f(y) = \frac{y^4}{4} - 8y + 17,\ \forall y \in \mathbb{R}$$

dado que $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ y que $f''(y) = 3y^2 \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que f alcanza su mínimo absoluto cuando $y = 2$ y por lo tanto, el punto buscado es $(2, 2)$.

9. Encontrar el área del rectángulo más grande que se puede inscribir bajo la curva de ecuación $y = e^{-x^2}$ en el primer y segundo cuadrantes.

Solución: De la figura



se observa que el área, en función de x, está dada por

$$A(x) = 2xe^{-x^2}, \forall x > 0.$$

Ahora, al calcular la derivada de A se obtiene que

$$A'(x) = -\frac{4}{e^{x^2}}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

y por lo tanto, como

- $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ es el único punto crítico para A,
- A es creciente en $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ y
- decreciente en $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$,

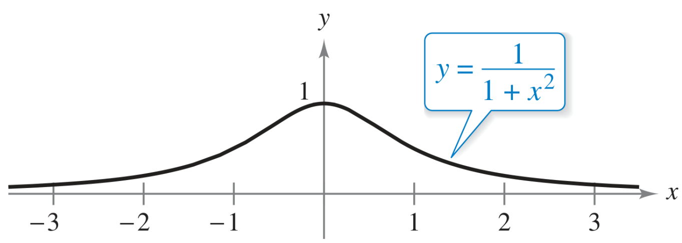
entonces el área máxima es $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-1/2}$.

10. Sea C el arco la curva

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

que está en el primer cuadrante. Al rotar el rectángulo que tiene como vértices opuestos al origen y al punto $P = (x, y) \in C$ en torno al eje x, se obtiene un cilindro. Determinar el punto sobre C que genera el cilindro de mayor volumen.

Solución: Da la figura



se observa que el volumen del cilindro, cuyo eje central es parte del eje x, está dado por

$$V(x) = \pi \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 x, \ \forall x > 0.$$

Dado que,

$$\begin{aligned} V'(x) &= -\pi \frac{3x^2-1}{(x2+1)^3} \\ &= -\pi \frac{\left(\sqrt{3}x-1\right)\left(\sqrt{3}x+1\right)}{(x2+1)^3} \end{aligned}$$

de la tabla de signos

x	0		$1/\sqrt{3}$	
$\sqrt{3}x-1$		$-$	0	$+$
$V'(x)$		$+$	0	$-$

se observa que $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ es el único punto crítico y en él, como V está definida en $]0, +\infty[$, alcanza el máximo absoluto.

De lo anterior, el punto $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$ es el que genera el cilindro de mayor volumen.

3.4. Regla de L'Hôpital

1. Utilizar la Regla de L'Hôpital para determinar el valor de los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(4x)}{x}$

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x}$

   c) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x^2}$

   d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln(x)}{x^3 - 3x + 2}$

   e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

   f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln(x)}$

   g) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x)$

   h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(e^x + 2)}{x}$

   i) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2 \sec(x)} \right)$

   j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(4x)}{1}=4\lim_{x\to 0}\cos(4x)=4\cdot 1=4$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1}=\frac{0}{1}=0$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+e^{-x}}{2x}=-\infty$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln(x)}{x^3-3x+2}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1/x-1}{3x^2-3}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{3x(x+1)}=-\frac{1}{6}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\ln(x)}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1/x}=\lim_{x\to +\infty}x=+\infty$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0^+}x=0$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(e^x+2\right)}{x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{e^x+2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\overset{\text{(L'H)}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\frac{1}{2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=1\cdot 1=1$

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin(x)}$

Solución: Dado que $x^{\sin(x)} = e^{\ln(x^{\sin(x)})} = e^{\sin(x)\ln(x)}$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\csc(x)} \\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc(x)\cot(x)} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x))}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= (-1)\cdot 1 \cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

se tiene que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = e^0 = 1$.

3. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x}$

Solución: Sea $y=\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x}$, como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\ln(y) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)}{x}\\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}\\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{x\cos(x)+\sin(x)}\\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)+\sin(x)}{x\sin(x)-2\cos(x)}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

se tiene que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x}=1.$

4. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{x}$

Solución: El límite es de la forma indeterminada $0/0$, aplicando la Regla de L'Hôpital, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(3^x - 1\right)}{1}.$$

Para calcular la derivada de $y = 3^x$, se puede aplicar logaritmo y luego derivación implícita,

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left(3^x\right) \\
\ln y &= x\ln(3) \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \ln(3) \\
\frac{dy}{dx} &= y\ln(3) \\
\frac{dy}{dx} &= \ln(3)\, 3^x,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \ln(3) \lim_{x\to 0} 3^x = \ln(3).$$

5. Hallar los valores de a y b de modo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{a-\cos(bx)}{x^2} = 2.$$

Solución: Si $x \to 0$, $\cos(bx) \to 1$ y $x^2 \to 0$, por lo tanto; para que el límite exista (como el denominador tiende a cero, el numerador debe también tender a cero), necesariamente a debe ser 1.

Ahora, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{a-\cos(bx)}{x^2} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{b\sin(bx)}{2x} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{b^2\cos(bx)}{2}$$

se tiene que el límite es 2, si y sólo si, $b^2 = 4$.

De lo anterior, $a = 1$ y $b = \pm 2$.

6. Decidir, si

$$f(x) = \begin{cases} \left(x + e^{x/2}\right)^{2/x} & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x_0 = 0$.

Solución: Como $\lim\limits_{x \to 0} \left(x + e^{x/2}\right)^{2/x}$ es de la forma indeterminada $1^{+\infty}$, al considerar $y = f(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} (\ln(y)) &= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(x + e^{x/2}\right)}{x} \\ &= 2 \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}e^{x/2}}{x + e^{x/2}}, \text{ se ha aplicado L'Hôpital} \\ &= 3 \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e^3$.

De lo anterior, como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$, f no es continua en $x_0 = 0$.

7. Sea f una función de clase C^2 en $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$. Verificar que la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ f'(0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es de clase C^1 en $\mathbb{R}$.

Solución: Para $x \neq 0$, $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

Por otra parte, como

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2},$$

(se utilizó dos veces la regla de L'Hôpital) se tiene que $g'(0) = \dfrac{f''(0)}{2}$.

Para $x_0 \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} g'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = g'(x_0)$$

por lo que g' es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y en el origen, se tiene

$$\lim_{x \to 0} g'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = g'(0),$$

(en el cálculo del límite anterior se utilizó la regla de L'Hôpital); luego, como g' también es continua en el origen, entonces ella es continua en todo $\mathbb{R}$, es decir, g es de clase C^1 en dicho conjunto. ■

Última actualización: **2 de mayo de 2024**
Ⓒ **Prof. Elvis Gavilán**
egavilan@udec.cl