Universidad de Concepción

Recopilación de ejercicios resueltos para Cálculo Diferencial e Integral (527104)

🄯 **Prof. E. Gavilán G.**
http://www.udec.cl/~egavilan

Concepción, 6 de enero de 2025

Índice

1. Límite y continuidad

1.1. Determinar, si es posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1}$

Solución:

a) Como $\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$, se tiene que

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1.$$

b) Al considerar la sustitución $y^6=1+x$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} &= \lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}\\ &= \lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

c) De $y^{12}=1+x$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1} &= \lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}\\ &= \lim_{y\to 1}\frac{(y+1)(y^2+1)}{y^2+y+1}\\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

1.2. Determinar el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+36}-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3}}{x^2+x-2}$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

b) Para $x \neq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+36}-6} &= \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+36}-6}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\cdot\frac{\sqrt{x+36}+6}{\sqrt{x+36}+6}\\
&= \frac{\sqrt{x+36}+6}{\sqrt{x+1}+1}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+36}-6} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+36}+6}{\sqrt{x+1}+1} = 6.$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3}}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3}}{x^2+x-2}\cdot\frac{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{3}}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x+2)\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

1.3. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+8x}-x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^6+x^3}-\sqrt{x^6-x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+5}{2x+7}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+8x}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x}{\sqrt{x^2+8x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{\sqrt{1+\dfrac{8}{x}}+1} = 4$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^6+x^3}-\sqrt{x^6-x^2}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6+x^3-(x^6-x^2)}{\sqrt{x^6+x^3}+\sqrt{x^6-x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+1/x^2}{\sqrt{1+1/x^3}+\sqrt{1-1/x^4}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

c) Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+5}{2x+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\dfrac{5}{x}}{2+\dfrac{7}{x}} = \dfrac{3}{2}$, se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{2x+7}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right) = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6.$$

1.4. Calcular $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + x\cos(x)}{2x^3+5}$.

Solución: Cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Además, si $x > 0$, se tiene que

$$x^3 - x \leq x^3 + x\cos(x) \leq x^3 + x \quad \text{y} \quad 2x^3 + 5 > 0;$$

por lo tanto,

$$\frac{x^3-1}{2x^3+5} \leq \frac{x^3 + x\cos(x)}{2x^3+5} \leq \frac{x^3+1}{2x^3+5}$$

y como $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-x}{2x^3+5} = \dfrac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x}{2x^3+5}$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x\cos(x)}{2x^3+5} = \frac{1}{2}.$$

1.5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la función definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{x}+2 & ,x<-1\\ 2 & ,x=-1\\ x^3-1 & ,x>-1\end{cases}$

a) Analizar la existencia de los límites $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) Decidir justificadamente si f es continua en $x_0=-1$.

c) Evaluar $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}-1}$.

Solución:

a) Para el primer límite, como

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left\{x^2-\frac{1}{x}+2\right\}=4$$

y

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left\{x^3-1\right\}=-2,$$

se tiene que los límites laterales no coinciden y por tanto, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ no existe.

Por otra parte, para el segundo límite, se tiene que

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left\{x^3-1\right\}=0.$$

b) De la parte anterior, como $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ no existe, f no es continua en $x_0=-1$.

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\,(x^2+x+1)}{\sqrt{x}-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)\,(x^2+x+1)}{\sqrt{x}-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\left\{(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)\right\}\\
&= 6
\end{aligned}$$

1.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}}{x-3} & , \quad x \neq 3 \\ 1 & , \quad x = 3 \end{cases}$$

a) ¿Qué significa que f sea continua en x_0?

b) Evaluar $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

c) Determinar si f es continua en $x_0 = 3$.

Solución:

a) Significa que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Como para $x \neq 3$, se tiene que

$$\frac{1 - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}}{x-3} \cdot \frac{1 + \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}}{1 + \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}} = \frac{\dfrac{x+1}{x+1} - \dfrac{4}{x+1}}{(x-3)\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}\right)} = \frac{\dfrac{x-3}{x+1}}{(x-3)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}} + 1\right)},$$

entonces $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x+1)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}} + 1\right)} = \dfrac{1}{8}$.

c) No, ya que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{1}{8}$ y $f(3) = 1$.

1.7. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-4x+3}} & , \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} - 6 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Definir, si es posible, $f(1)$ de modo que f resulte continua en $x_0 = 1$.

Solución: Como

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-4x+3}} = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x+1}{x-3}\sqrt{x^2-4x+3} \right) = 0$$

y

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} - 6 = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} - 6 = 0$$

se tiene entonces que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

y por lo tanto para que f sea continua en $x_0 = 1$ debe tenerse que $f(1) = 0$.

1.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x < 0 \\ bx & \text{si} \quad 0 \le x < b \\ -bx^2 + 4x - 2 & \text{si} \quad b \le x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

¿Es posible hallar valores para a y b de tal manera que f sea continua?

Solución: En este caso, por definición f es continua si ella es continua en todo $\mathbb{R}$.

Como $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} bx = b^2$ y $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^+} \left\{-bx^2 + 4x - 2\right\} = -b^3+4b-4$, se tiene que $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe si y sólo si $b^3 + b^2 - 4b + 4 = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \left\{-bx^2 + 4x - 2\right\} = -9b + 10$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 4 = 4$ se tiene que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe si y sólo si $b = \dfrac{2}{3}$.

Como $b = \dfrac{2}{3}$ no es solución de $b^3 + b^2 - 4b + 4 = 0$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no pueden existir simultáneamente y por lo tanto, no existen a y b tales que f sea continua.

1.9. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin(6x)} & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{3} < x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}{\sin(3x)} & \text{si} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

a) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

b) Analizar la continuidad de f en todo su dominio.

Solución:

a) Para $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x}{\sin(6x)} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{6x}{\sin(6x)}$, luego $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{6} \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{t}{\sin t} = \dfrac{1}{6}$.

Para $x > 0$, al multiplicar $f(x)$, por $\dfrac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}}$, se tiene que

$$f(x) = \frac{x}{\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}\right) \sin(3x)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}\right) \sin(3x)},$$

luego, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x}{\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}\right) \sin(3x)} = \dfrac{1}{6} \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{\sin u}{u} = \dfrac{1}{6}$.

De lo anterior, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{6}$

b) Para $-\dfrac{\pi}{3} < x_0 < 0$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x}{\sin(6x)} = \dfrac{x_0}{\sin(6x_0)} = f(x_0)$, por lo que f es continua en $\left]-\dfrac{\pi}{3}, 0\right[$.

De manera análoga, para $0 < x_0 < \dfrac{\pi}{3}$, se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, por lo que f es continua en $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

Por otra parte, como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{6} \neq 1 = f(0)$, se tiene que f no es continua en el origen. En resumen f es continua en todo su dominio excepto en el origen.

1.10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k - 7x}{\sqrt{x^2+3}} & , \quad x < 1 \\ x^3 - 5x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

donde k es una constante real.

a) Determinar el valor de k para el cual f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Encontrar una asíntota horizontal del gráfico de f.

c) Demostrar que existe $x_0 \in [2, 3]$, tal que $f(x_0) = 10$.

d) Indicar justificadamente, si f es una función acotada superiormente.

Solución:

a) La función f es continua tanto para $x > 1$ como para $x < 1$, pues en ambos casos corresponde a una combinación (suma, resta, producto o cuociente con denominador no nulo) de funciones continuas.

Para que f sea continua en 1, debe tenerse

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = -3.$$

Se calculan los correspondientes límites laterales

- $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{k - 7x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{k-7}{2}$.
- $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 - 5x + 1) = -3$.

Entonces, dado que

$$\frac{k-7}{2} = -3 \Leftrightarrow k = 1,$$

se concluye que f es continua en $\mathbb{R}$ si y solo si $k = 1$.

b) Se observa que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{k - 7x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(\dfrac{k}{x} - 7\right)}{|x|\sqrt{1 + \dfrac{3}{x^2}}} = 7.$$

Por lo tanto, la recta de ecuación $y = 7$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

c) Para todo $x \in [2, 3]$ se tiene $f(x) = x^3 - 5x + 1$, la cual es una función continua. Dado que $f(2) = -1 < 10$ y $f(3) = 13 > 10$, el Teorema del valor intermedio garantiza que existe $x_0 \in [2, 3]$ tal que $f(x_0) = 10$.

d) Dado que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^3\left(1 - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)\right] = +\infty$, se tiene que f no es acotada superiormente.

1.11. Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 6}{x - 1}$. Hallar todas las asíntotas para el gráfico de f.

Solución: Dado que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(el valor de este límite es eventualmente la pendiente m de *la* asíntota oblicua) y que

$$\lim_{x \to +\infty} \{f(x) - 1 \cdot x\} = \lim_{x \to +\infty} \{f(x) - x\} = -9,$$

(el valor de este segundo límite corresponde al coeficiente de posición n de dicha asíntota) se tiene que la recta de ecuación

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ &= x - 9 \end{aligned}$$

$y = x - 9$ es asíntota oblicua (por la derecha).

De manera completamente análoga, si se considera ahora x tendiendo a $-\infty$, dado que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ y que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \{f(x) - x\} = -9$, se tiene que la misma recta es también asíntota oblicua (por la izquierda).

Por otra parte, como $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, se tiene la recta de ecuación $x = 1$ es asíntota vertical para el gráfico de f (el hecho que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, también es suficiente por sí solo, para afirmar que $x = 1$ es asíntota vertical).

Por otra parte, como el gráfico de f tiene una asíntota oblicua derecha y *una* (en realidad se trata de la misma recta) asíntota oblicua izquierda; entonces, él no tiene ninguna asíntota horizontal.

El gráfico de f y sus dos asíntotas pueden observarse en

`https://www.desmos.com/calculator/naq6wndx3f`.

1.12. Sea $f : [1, 2] \to [-1, 4]$ una función continua tal que $f(1) = -1$ y $f(2) = 4$. Utilizar el teorema del valor intermedio para demostrar que f tiene un punto fijo.

Solución: Por definición, x_0 es un punto fijo de una función f, si $f(x_0) = x_0$.

Sea $g(x) := f(x) - x$.

Como g es continua, $g(1) = -2$ y $g(2) = 2$, por Teorema del valor intermedio, g se anula en algún punto $x_0 \in]1, 2[$ y por lo tanto, como

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0,$$

se tiene que f tiene un punto fijo.

1.13. El conjunto de todas las imágenes de un conjunto A por una función f se define como

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} .$$

¿Existirá f continua, tal que $f([0,1]) =]0,1]$?

Solución: No, porque según el Teorema de los valores extremos el conjunto $f([0,1])$ debería tener un mínimo (absoluto).

1.14. Sea f una función continua en todo $\mathbb{R}$ que toma sólo valores racionales (es decir, $Rec(f) \subseteq \mathbb{Q}$). Mostrar que f es función constante.

Solución: Si f no es constante, entonces existen x_1 y x_2 en $\mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2$ y

$$f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2).$$

De la continuidad de f en $[x_1, x_2]$ y del hecho que entre y_1 e y_2 siempre existirá un irracional y^*, por el Teorema del valor intermedio, existe $x^* \in \,]x_1, x_2[$ tal que

$$f(x^*) = y^*.$$

Como la igualdad anterior contradice la hipótesis, pues $Rec(f) \subseteq \mathbb{Q}$, entonces se tiene que f es constante.

2. La derivada

2.1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases} 4x-1 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ \\ x^2+5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$. Analizar la existencia de la derivada de f en todo $\mathbb{R}$.

Solución: Para $x<2$, se tiene que $f'(x)=4$; para $x>2$, se tiene que $f'(x)=2x$.

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=7$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=9$, se tiene que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe, luego f no es continua en $x_0=2$ y por lo tanto, ella no es derivable en dicho punto.

De lo anterior, f es derivable en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x_0=2$.

2.2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+x^2+x+1 & , \quad x\neq 0\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$$

a) Calcular $f'(x)$, en cada punto donde exista.

b) Calcular $f''(x)$ para $x\neq 0$.

Solución:

a) Para $x\neq 0$, de las reglas de derivación, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot -\frac{1}{x^2}+2x+1\\ &= 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2x+1.\end{aligned}$$

Para $x=0$, por definición

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x+1\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho que

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

pues, si $x\neq 0$, entonces es válida la desigualdad $\left|x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\leq x^2$.

b) Para $x\neq 0$, de las reglas de derivación y de la parte anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)-x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}+2\\ &= 6x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-4\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2\end{aligned}$$

2.3. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ c + \sqrt{x-1} & , \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Determinar los valores de a, b y c de modo que f sea derivable en $]0,5[$ y $f(0) = f(5)$.

Solución:

De la condición $f(0) = f(5)$, se obtiene que $c = -2$.

Por otro lado, dado que f debe ser continua en $]0,5[$ y lo es en $]0,2[$ y en $]2,5[$, basta analizar la continuidad para f en $x_0 = 2$. Para que f sea continua en $x_0 = 2$, debe tenerse que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ y por lo tanto

$$4a + 2b = -1 \tag{1}$$

De manera similar a lo anterior, dado que f debe ser derivable en $]0,5[$ y lo es en $]0,2[$ y en $]2,5[$, basta analizar la derivabilidad de f en $x_0 = 2$.

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{a(x^2-4) + b(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} a(x+2) + b = 4a + b$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \dfrac{1}{2}$, entonces $f'(2)$ existe si y sólo si

$$4a + b = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2), se obtiene que $a = \dfrac{1}{2}$ y $b = -\dfrac{3}{2}$.

Así, f es derivable en $]0,5[$ y $f(0) = f(5)$ si

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad c = -2.$$

2.4. Sea $f(x)=\sin^5\left(\dfrac{x^3-1}{4x^6+1}\right)$. Calcular $f'(x)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 5\sin^4\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\\
&= 5\sin^4\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cdot\left(\frac{3x^2(4x^6+1)-(x^3-1)24x^5}{(4x^6+1)^2}\right)\\
&= -\frac{15x^2(4x^6-8x^2-1)}{(4x^6+1)^2}\sin^4\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)\cos\left(\frac{x^3-1}{4x^6+1}\right)
\end{aligned}
$$

2.5. Utilizar las reglas de derivación para calcular $f'(x)$, si:

a) $f(x) = x^5 \cos(2x^3)$

b) $f(x) = \sin\left(\ln\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)\right)$

c) $f(x) = e^{\tan\left(x^3+2x\right)}$

Solución:

a) $f'(x) = 5x^4 \cos(2x^3) + x^5 \cdot - \sin(2x^3) \cdot 6x^2$

$$f'(x) = 5x^4 \cos(2x^3) - 6x^7 \sin(2x^3)$$

b) $f'(x) = \cos\left(\ln\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)\right) \cdot \dfrac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} \cdot \left(4x^3 + 4x\right)$

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 4x}{x^4 + 2x^2 + 1} \cos\left(\ln\left(x^4 + 2x^2 + 1\right)\right)$$

c) $f'(x) = e^{\tan\left(x^3+2x\right)} \cdot \sec^2\left(x^3 + 2x\right) \cdot \left(3x^2 + 2\right)$

$$f'(x) = \left(3x^2 + 2\right) e^{\tan\left(x^3+2x\right)} \sec^2\left(x^3 + 2x\right)$$

2.6. Calcular, en cada caso, $f'(x)$:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3+x}{x^6+1}}$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^6+x^2+1}\right)$

c) $f(x) = \tan^3(5x^3+2x)$

Solución:

a) Como $f(x) = \left(\dfrac{x^3+x}{x^6+1}\right)^{1/3}$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+x}{x^6+1}\right)^{-2/3} \cdot \frac{(3x^2+1)(x^6+1)-(x^3+x)\cdot 6x^5}{(x^6+1)^2}$$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x^4+1}{x^6+x^2+1}} \cdot \dfrac{4x^3\cdot(x^6+x^2+1)-(x^4+1)(6x^5+2x)}{(x^6+x^2+1)^2}$

c) $f'(x) = 3\tan^2(5x^3+2x)\sec^2(5x^3+2x)\cdot(15x^2+2)$

2.7. Sea f una función tal que $f(2) = -3$ y $f'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$.

Si $g(x) = x^2 f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$, calcular $g'(2)$.

Solución: Para $x \neq 1$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
g'(2) &= 2xf\left(\frac{x}{x-1}\right) + x^2 f'\left(\frac{x}{x-1}\right)\left[\frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right] \\
&= 2xf\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{x^2}{(x-1)^2} f'\left(\frac{x}{x-1}\right)
\end{aligned}
$$

y entonces

$$g'(2) = 4f(2) - 4f'(2) = -24$$

2.8. Sea $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$. Calcular $f'(x)$ y luegodeterminar las ecuaciones de la rectas tangente y normal al gráfico de f en el punto $(1, 1)$.

Solución: Al reescribir $f(x) = (2x^2 - 3x + 2)^{1/3}$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x^2 - 3x + 2\right)^{-2/3}(4x - 3) = \frac{4x - 3}{3\left(2x^2 - 3x + 2\right)^{2/3}},$$

de donde, la pendiente de la recta tangente pedida es $f'(1) = \dfrac{1}{3}$ y por lo tanto, la ecuación de dicha recta es

$$y - 1 = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow x - 3y + 2 = 0.$$

Por otra parte, la ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) \Leftrightarrow 3x + y - 4 = 0.$$

`https://www.desmos.com/calculator/ogpgsxuxki`

2.9. Mostrar que $y = f(x) = e^{2x} - x$ satisface la ecuación

$$y' - 2y = 2x - 1.$$

Solución:

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 2e^{2x} - 1 - 2\left(e^{2x} - x\right) \\ &= 2e^{2x} - 1 - 2e^{2x} + 2x \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

2.10. Mostrar que $y = 9\sin(x) - \frac{1}{3}\cos(x) + 5$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y - 5 = 0.$$

Solución: Dado que

$$\frac{dy}{dx} = 9\cos(x) + \frac{1}{3}\sin(x)$$

y que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -9\sin(x) + \frac{1}{3}\cos(x) = 5 - y$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + y - 5 &= (5 - y) + y - 5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.11. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si:

a) $y = Arcsec(x)$

b) $x^3 + y^3 - 1 = 8xy$

c) $y - \cos(x + y) = 0$

Solución:

a) Si $y = Arcsec(x)$, entonces $\sec(y) = x$. Luego, derivando implícitamente respecto a x en ambos lados tenemos que

$$\sec(y)\tan(y)\frac{dy}{dx} = 1.$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec(y)\tan(y)}$$

Como $\sec(y) = x$, haciendo uso de la identidad $\tan^2(y) + 1 = \sec^2(y)$, se tiene que $\tan(y) = \sqrt{\sec^2(y) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$. De este modo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

b) Si $x^3 + y^3 - 1 = 8xy$, entonces derivando implícitamente la ecuación respecto a x se tiene que

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 8y + 8x\frac{dy}{dx}$$

Luego,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$$

c) Si $y - \cos(x + y) = 0$, derivando implícitamente con respecto a x

$$\frac{dy}{dx} + \sin(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$$

2.12. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y + 9$$

en el punto $(2, 1)$.

Solución: Derivando implícitamente la ecuación, suponiendo $y = y(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) &= 8xy + 4x^2\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{4x(x^2 + y^2) - 8xy}{4x^2 - 4y(x^2 + y^2)}, \end{aligned}$$

por lo que la pendiente de la recta tangente pedida es $m = \dfrac{dy}{dx}(2, 1) = -6$ y su ecuación es

$$y - 1 = -6(x + 2) \Leftrightarrow y = -6x + 13.$$

`https://www.desmos.com/calculator/vlpcpddtbl`

2.13. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva C de ecuación

$$x^3 + y^3 = 6xy,$$

en el punto $(3, 3)$.

Solución: Al suponer $y = y(x)$ y derivar implícitamente la ecuación de C, se tiene

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6y + 6x \frac{dy}{dx},$$

de donde se obtiene que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$.

De lo anterior, la pendiente de la recta tangente C en el punto $(3, 3)$ es

$$m = \frac{dy}{dx}(3, 3) = -1$$

y por lo tanto ecuación de la recta es $y - 3 = -(x - 3) \Leftrightarrow x + y = 6$.

`https://www.desmos.com/calculator/hx6qgnta8o`

2.14. Dada la curva C en $\mathbb{R}^2$, determinada por la ecuación

$$x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - x - y = 0,$$

encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a C en los puntos donde la curva intersecta al eje y.

Solución: Para encontrar los puntos en que C intersecta al eje y, se reemplaza $x = 0$ en la ecuación de la curva, obteniendo la ecuación

$$\frac{1}{4}y^2 - y = 0,$$

la cual se satisface para $y = 0$ e $y = 4$. Entonces los puntos de intersección buscados son $(0, 0)$ y $(0, 4)$.

Por otro lado, al derivar implícitamente la ecuación de la curva, se obtiene

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y\frac{dy}{dx} - 1 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

es decir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x - y}{x + \frac{1}{2}y - 1}.$$

Por lo tanto:

- En $(x, y) = (0, 0)$, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = -1$, la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -x$ y
- en $(x, y) = (0, 4)$, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = -3$, la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -3x + 4$.

`https://www.desmos.com/calculator/oiebgynj5n`

2.15. Dada la curva C en $\mathbb{R}^2$, determinada por la ecuación

$$y^2e^x - x - y = 2,$$

encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a C en los puntos donde la curva intersecta al eje y.

Solución: Al reemplazar $x = 0$ en la ecuación de C se obtienen los valores $y = -1$ e $y = 2$, por lo tanto, la curva intersecta al eje y en los puntos $P_1 = (0, -1)$ y $P_2 = (0, 2)$.

Por otro lado, al derivar implícitamente la ecuación de la curva, se obtiene

$$2y\frac{dy}{dx}e^x + y^2e^x - 1 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2e^x}{2ye^x - 1}.$$

De lo anterior,

- En $P_1 = (0, -1)$, se tiene que $\dfrac{dy}{dx} = 0$ y la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -1$.

- En $P_2 = (0, 2)$, se tiene que $\dfrac{dy}{dx} = -1$ y la recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -x + 2$.

`https://www.desmos.com/calculator/zk2qj69inp`

2.16. Sea C la curva de ecuación

$$x^3y + xy^3 = 32,$$

mostrar que las rectas tangentes a C en $(-2,-2)$ y en $(2,2)$ no se intersectan.

Solución: Al suponer $y = y(x)$ y derivar implícitamente la ecuación de C, se tiene

$$3x^2y + x^3\frac{dy}{dx} + y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde se obtiene que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}$.

Si L_1 es la recta tangente a C en el punto $(-2,-2)$, entonces ella tiene pendiente

$$m_1 = \frac{dy}{dx}(-2,-2) = -\frac{-24-8}{-8-24} = -1$$

y su ecuación es $x + y = -4$.

Si L_2 es la recta tangente a C en el punto $(2,2)$, entonces ella tiene pendiente

$$m_2 = \frac{dy}{dx}(2,2) = -\frac{24+8}{8+24} = -1.$$

y su ecuación es $x + y = 4$.

De las dos ecuaciones, se obtiene que $-4 = 4$ y como esto es absurdo, las dos rectas no se intersectan.

`https://www.desmos.com/calculator/t9cztxjzhs`

2.17. Una circunferencia de radio 1 y centro en el eje y se inscribe en la parábola $y = 2x^2$. Determinar los puntos en donde ambas curvas se tocan.

Solución: De la ecuación de la parábola se tiene que $\dfrac{dy}{dx} = 4x$.

Si el centro de la circunferencia está en el punto $(0, k)$, con $k > 0$, entonces la ecuación de ella es

$$x^2 + (y-k)^2 = 1$$

y al derivar implícitamente con respecto a x se obtiene que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y-k}$.

De lo anterior, como las pendientes de las tangentes deben coincidir en el (los) punto(s) de intersección, debe tenerse que

$$-\frac{x}{y-k} = 4x,$$

de donde se obtiene que $y - k = -\dfrac{1}{4}$.

Ahora, como los puntos buscados deben satisfacer las ecuaciones de la circunferencia y de la parábola, al remplazar la última expresión en la primera se obtiene que

$$x^2 + \frac{1}{16} = 1,$$

por lo tanto $x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ y reemplazando en la segunda, se obtiene que $y = \dfrac{15}{8}$.

`https://www.desmos.com/calculator/h60ijqqcqu`

2.18. Las variables x, y y z son funciones derivables en la variable t y tales que para todo t, se tiene que

$$x^3 - 2xy + y^2 + 2xz - 2xz^2 + 3 = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 4.$$

Hallar los dos valores para $\dfrac{dz}{dt}$ cuando $x = 1$ e $y = 2$.

Solución: De la relación entre x, y y z se tiene que

$$x^3 - 2x(y - z + z^2) + y^2 + 3 = 0,$$

y si $x = 1$ e $y = 2$ se obtiene $z^2 - z - 2 = 0$, es decir, $z = -1$ y $z = 2$.

Por otra parte, de la relación de antes, al derivar implícitamente con respecto a t

$$3x^2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dx}{dt}\left(y - z + z^2\right) - 2x\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + 2z\frac{dz}{dt}\right) + 2y\frac{dy}{dt} = 0.$$

De la última igualdad, como $\dfrac{dx}{dt} = 3$ y $\dfrac{dy}{dt} = 4$, al considerar $x = 1$, $y = 2$ y $z = -1$ se tiene que $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{7}{6}$ y al considerar $x = 1$, $y = 2$ y $z = 2$ se tiene que $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{7}{6}$. De lo anterior, se ha llegado entonces a que $\dfrac{dz}{dt} = \pm\dfrac{7}{6}$.

2.19. Aplicar el Teorema del valor medio para justificar las siguientes afirmaciones:

a) Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ es tal que $\forall x \in]a,b[\,:\, f'(x) = 0$, entonces f es una función constante (sobre $]a,b[$).

b) Si g es una función derivable sobre el intervalo $[-2,3]$, tal que $g(-2) = 2$ y $g(3) = 17$, entonces el gráfico de g tiene un punto en el que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 3x$.

Solución:

a) Sean x_0 y x dos puntos cualesquiera en $]a,b[$ con $x_0 < x$. Como f es continua en $[x_0, x]$ y derivable en $]x_0, x[$, entonces por el teorema del valor medio, existe x_1 entre x_0 y x tal que

$$f'(x_1) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

de donde, como $f'(x_1) = 0$; se tiene que $f(x) = f(x_0)$, $\forall x \in]a,b[$.

b) Como g es continua en $[-2,3]$ y derivable en $]-2,3[$, entonces por el teorema del valor medio, existe c entre -2 y 3 tal que

$$g'(c) = \frac{g(3) - g(-2)}{3 - (-2)} = 3.$$

De lo anterior, el gráfico de g en el punto $(c, g(c))$ posee recta tangente con pendiente 3; dicha recta, es paralalela a la de ecuación $y = 3x$.

2.20. Demostrar que la ecuación

$$2x^3 + x^2 + 4x + \cos(x) - 2 = 0$$

tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

Solución: Al definir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 2x^3 + x^2 + 4x + \cos(x) - 2$, se tiene que ella es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Dado que $f(0) = -1$ y $f(1) = 5 + \cos(1) > 0$, por el Teorema del valor intermedio, la ecuación posee al menos una solución en $]0, 1[$. Además, como

$$f'(x) = 6x^2 + 2x + 4 - \sin(x) = 5x^2 + (x + 1)^2 + 3 - \sin(x) > 0,$$

se tiene que f es estrictamente creciente e inyectiva (a cada imagen le corresponde una única preimagen) y por lo tanto, la solución es única.

3. Aplicaciones de la derivada

3.1. Variaciones relacionadas

3.1.1. Se deja caer una piedra en agua tranquila, lo cual genera ondas circulares concéntricas como las de la figura

y el radio exterior aumenta a una razón de 1 pie/s. En el instante en que dicho radio es de 4 pies, ¿con qué tasa cambia el área acotada por la circunferencia correspondiente?

Solución: Sean $r(t)$ y $A(t)$ el radio y el área de la primera onda, respectivamente, en el tiempo $t \geq 0$ (en segundos). Como $A(t) = \pi r^2(t)$, al derivar con respecto a t, se tiene que,

$$A'(t) = 2\pi r(t) r'(t)$$

y si t_0 es el instante en el cual $r(t_0) = 4$, de la igualdad anterior al considerar $t = t_0$; dado que $r'(t) = 1$ (lo cual implica que en particular $r'(t_0) = 1$), se obtiene que

$$A'(t_0) = 8\pi$$

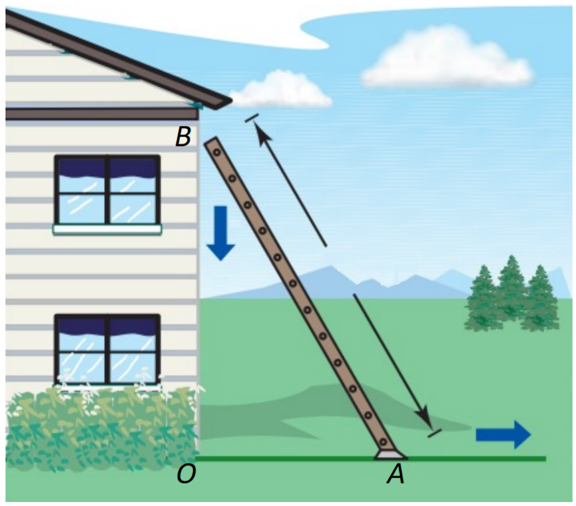
y por lo tanto, en el instante t_0, el área indicada aumenta a razón de 8π pies^2/s.

3.1.2. Una escalera de 5 metros de longitud se desliza por una pared. Cuando el extremo inferior está a 4 metros de la pared, el otro extremo baja por la pared a razón de 2 metros por segundo. En ese instante:

a) ¿Con qué rapidez se desplaza el extremo inferior a lo largo del suelo?

b) ¿Con qué rapidez varía el área encerrada por la pared, el suelo y la escalera?

Solución:



Sean $x(t)$ e $y(t)$ las distancias desde O hasta A y desde O hasta B, respectivamente.

a) Por Teorema de Pitágoras se tiene que $x^2(t) + y^2(t) = 25$.

Sea t_0 el instante en el cual $x(t_0) = 4$; se tiene, $y(t_0) = 3$.

Al derivar implícitamente se tiene que $x'(t) = -\dfrac{y(t)}{x(t)} \cdot y'(t)$ y evaluando en t_0 se obtiene

$$x'(t_0) = -\frac{y(t_0)}{x(t_0)} \cdot y'(t_0) = -\frac{3}{4} \cdot -2 = \frac{3}{2} \text{ metros por segundo.}$$

b) El área está dada por $A(t) = \dfrac{1}{2} x(t) \cdot y(t)$, luego

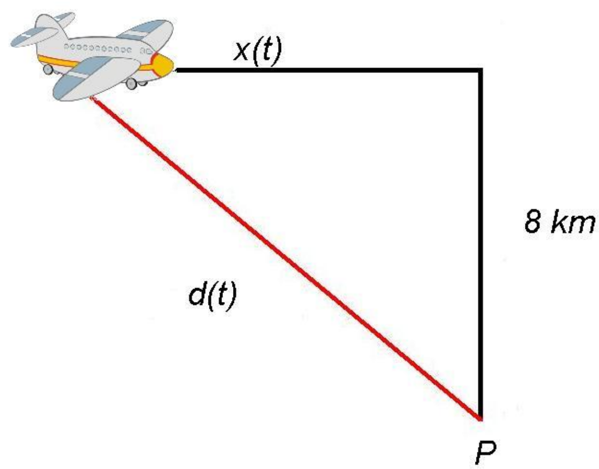
$$A'(t) = \frac{1}{2} \left(x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t) \right),$$

por lo tanto

$$A'(t_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot 3 + 4 \cdot -2 \right) = -\frac{7}{4} \text{ metros cuadrados por segundo.}$$

3.1.3. Un avión se desplaza en un vuelo horizontal a 8 kilómetros de altura. La ruta de vuelo pasa por un punto P situado en tierra. Si la distancia entre el avión y el punto P disminuye a razón de 4 kilómetros por minuto; determinar la velocidad del avión en el instante en que dicha distancia es de 10 kilómetros.

Solución:



Sean $x(t)$ y $d(t)$ las distancias, en kilómetros, indicadas en la figura. Por Teorema de Pitágoras, se tiene

$$x^2(t) + 64 = d^2(t).$$

Sea t_0 el instante en el cual $d(t_0) = 10$, dado que $x(t_0) = 6$, al derivar implícitamente se tiene que

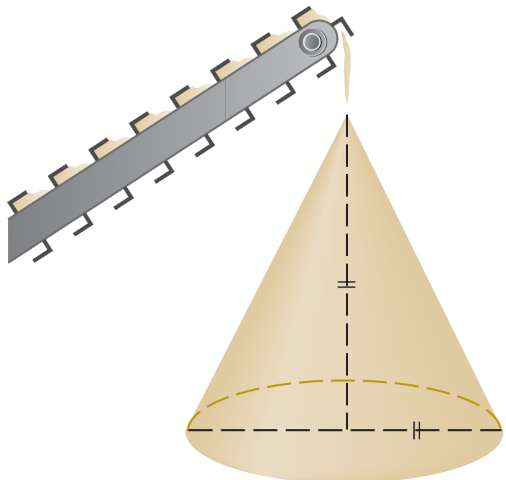
$$x'(t) = \frac{d(t)}{x(t)} \cdot d'(t)$$

y evaluando en t_0 se obtiene

$$x'(t_0) = \frac{d(t_0)}{x(t_0)} \cdot d'(t_0) = \frac{10}{6} \cdot -4 = -\frac{20}{3} \text{ kilómetros por minuto.}$$

De lo anterior, la velocidad del avión es de $\dfrac{20}{3}$ kilómetros por minuto.

3.1.4. Desde un conducto cae arena a razón de 3 metros cúbicos por minuto y va formando un montículo cónico.



Si el diámetro en la base fuese siempre igual al triple de la altura. ¿A qué velocidad cambiaría en el instante en que ella alcance 4 metros?

Solución: Sean $d(t)$, $h(t)$ y $V(t)$ el diámetro, la altura y el volumen del cono, respectivamente, en el tiempo $t \geq 0$ (en minutos). Como $d(t) = 3h(t)$, se tiene

$$V(t) = \frac{3\pi}{4} h^3(t).$$

Al derivar con respecto a t a ambos lados de la ecuación anterior,

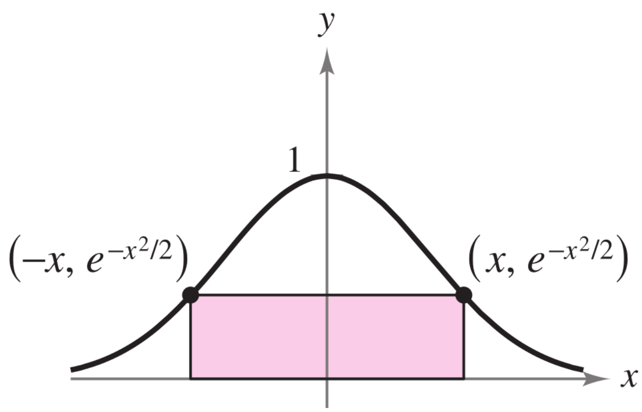
$$V'(t) = \frac{9\pi}{4} h^2(t) h'(t).$$

Si t_0 es el instante en el cual $h(t_0) = 4$, como $V'(t_0) = 3$, de la igualdad anterior al considerar $t = t_0$ se obtiene que

$$h'(t_0) = \frac{1}{12\pi}$$

y por lo tanto, la altura aumenta a razón de $1/12\pi$ metros por minuto cuando ella mide 4 metros.

3.1.5. Considerar el rectángulo de la figura



a) Expresar el área del rectángulo en función de x.

b) Calcular la razón de cambio del área cuando $x = 2$, si $\dfrac{dx}{dt} = 4$ cm/min.

Solución:

a) $A = 2xe^{-x^2/2}$

b) Como

$$\frac{dA}{dt} = 2\,\frac{dx}{dt}e^{-x^2/2} + 2xe^{-x^2/2} \cdot -x\frac{dx}{dt} = 2\frac{dx}{dt}e^{-x^2/2}\left(1 - x^2\right),$$

si t_0 es el instante tal que $x(t_0) = 2$, entonces

$$A'(t_0) = 2 \cdot 4e^{-2} \cdot -3 = -24e^{-2} \approx -3.25 \text{ cm}^2/\text{min}.$$

3.1.6. Las longitudes x, y (en la base) y z (altura) de una caja rectangular sin tapa varían en el tiempo y en un cierto instante t_0 dichas aristas miden 2, 3 y 5, respectivamente. Si $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 2$ y $\dfrac{dz}{dt} = -3$, en dicho instante:

a) Calcular la razón de cambio de la superficie total S de la caja.

b) Determinar si la longitud L de la diagonal de la base crece o decrece.

Solución:

a) Como $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{dx}{dt}\,y + x\,\frac{dy}{dt} + 2\left(\frac{dx}{dt}\,z + x\,\frac{dz}{dt}\right) + 2\left(\frac{dy}{dt}\,z + y\,\frac{dz}{dt}\right) \\ &= (y + 2z)\frac{dx}{dt} + (x + 2z)\frac{dy}{dt} + 2(x + y)\frac{dz}{dt}, \end{aligned}$$

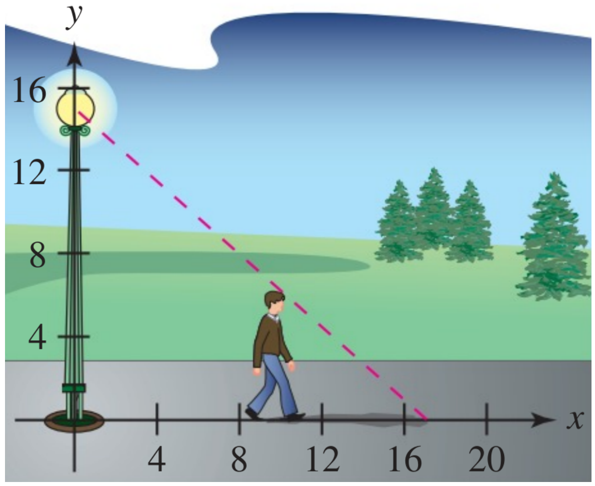
de donde se obtiene que $S'(t_0) = 20$.

b) Como $L(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\left(2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}\right), \end{aligned}$$

de donde $L'(t_0) = \dfrac{10}{\sqrt{13}}$ y por lo tanto la longitud de la diagonal crece pues $L'(t_0) > 0$.

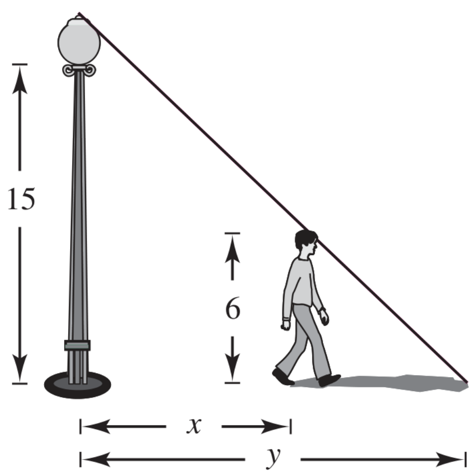
3.1.7. Una persona de 6 pies de estatura se aleja a una razón de 5 pies/s de un poste cuya luz está a 15 pies de altura. En el instante en que la persona está a 10 pies de la base del poste:



a) ¿A qué razón se mueve la punta de su sombra?

b) ¿A qué razón está cambiando la longitud de su sombra?

Solución: De la figura



por triángulo semejantes, se tiene que si x es la distancia de la base del poste a la persona e y es la distancia desde la misma base hasta la punta de la sombra, entonces

$$\frac{15}{6} = \frac{y}{y-x} \Rightarrow y = \frac{5}{3}x$$

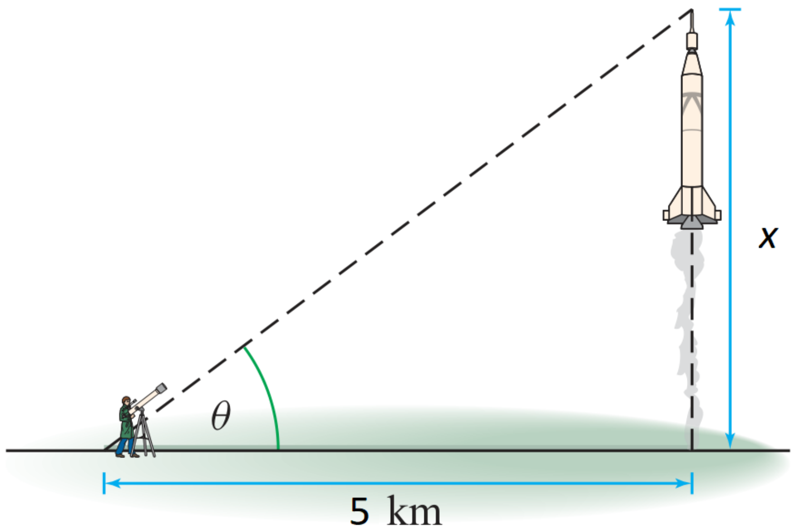
y por lo tanto, si t_0 es el instante tal que $x(t_0) = 10$, se tiene que:

a) $y'(t_0) = \dfrac{5}{3}x'(t_0) = \dfrac{5}{3} \cdot 5 = \dfrac{25}{3}$ pies/s

b) $(y-x)'(t_0) = y'(t_0) - x'(t_0) = \dfrac{25}{3} - 5 = \dfrac{10}{3}$ pies/s

3.1.8. Un cohete que se mueve verticalmente a una velocidad de 300 kilómetros por hora es visto por un observador sobre la tierra a 5 kilómetros de la plataforma de lanzamiento. ¿Con qué rapidez aumenta el ángulo de elevación del cohete en el instante en que este se encuentra a 2 kilómetros de altura?

Solución: Sea $x(t)$ la altura en kilómetros a la que se encuentra el cohete en un determinado instante t, y sea t_0 tal que $x(t_0) = 2$.



Se sabe que

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = 300\,\text{km/h y}$$

si θ es el ángulo de elevación del observador, se tiene la relación

$$\tan(\theta) = \frac{x}{5}$$

derivando respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \sec^2(\theta)\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{5}\cos^2(\theta)\frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

En el instante t_0, se tiene que $\cos^2(\theta) = \dfrac{25}{29}$.

Luego

$$\theta'(t_0) = \frac{1}{5}\cdot\frac{25}{29}\cdot 300 = \frac{1500}{29}\,\text{rad/h}$$

por lo tanto, el ángulo, en el instante t_0 aumenta a esta tasa.

3.1.9. Cuando un cierto gas poliatómico sufre una expansión adiabática, su presión p y volumen V satisfacen la ecuación

$$pV^{1.3} = k$$

donde k es una constante. Determinar la relación entre las razones de cambio $\dfrac{dp}{dt}$ y $\dfrac{dV}{dt}$.

Solución: Al derivar implícitamente en la ecuación indicada con respecto al tiempo, se tiene que

$$\begin{aligned} 1.3pV^{0.3}\frac{dV}{dt} + V^{1.3}\frac{dp}{dt} &= 0 \\ V^{0.3}\left(1.3p\frac{dV}{dt} + V\frac{dp}{dt}\right) &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\quad 1.3p\dfrac{dV}{dt} = -V\dfrac{dp}{dt}.$

3.1.10. Cuando cae una *gota esférica* de lluvia, alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a una velocidad proporcional a su superficie. Verificar que el radio de la gota de lluvia disminuye a un ritmo constante.

Solución: Como la tasa de evaporación es proporcional a la superficie, se tiene que

$$\frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2} = k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dV}{dt} = 4k\pi r^2.$$

Ahora, por derivación implícita, dado que

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt},$$

se obtiene que $\dfrac{dr}{dt} = k$.

3.2. Gráficos

3.2.1. Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^3 + 3x - 2$.

a) Evaluar, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$. Además, sabiendo que G_f intersecta al eje x exactamente en dos puntos, determinar dichos puntos.

b) Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad.

Solución:

a) La valores son $f(-2) = 0$, $f(-1) = -4$, $f(0) = -2$, $f(1) = 0$ y $f(2) = -4$.

Como G_f intersecta al eje x exactamente en dos puntos, de los valores anteriores, se tiene que dichos puntos son $(-2, 0)$ y $(1, 0)$.

b) Como $f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1)$, los puntos críticos de f son $x = -1$ y $x = 1$.

Dado que el signo de la derivada depende del producto $-(x+1)(x-1)$, entonces si $x \in \left]-\infty, -1\right[$ o si $x \in \left]1, +\infty\right[$ se tiene que f' es negativa y si $x \in \left]-1, 1\right[$ se tiene que f' es positiva; por lo tanto, f es decreciente en el conjunto $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ y es creciente en $\left]-1, 1\right[$, en $x = -1$ hay un mínimo relativo y en $x = 1$ hay un máximo relativo para f.

Por otra parte, como $f''(x) = -6x$, se tiene f'' es positiva cuando $x < 0$ y f'' es negativa cuando $x > 0$, se tiene entonces que G_f es cóncavo hacia arriba en el intervalo $\left]-\infty, 0\right[$ y cóncavo hacia abajo en el intervalo $\left]0, +\infty\right[$; por lo tanto, $x = 0$ es un punto de inflexión para G_f.

`https://www.desmos.com/calculator/7hkqndh8ym`

3.2.2. Para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{4}{3}x^3-x^2+4x+1$. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, puntos de inflexión e intervalos de concavidad para luego esbozar el gráfico de f.

Solución: Como $f'(x)=2x^3-4x^2-2x+4=2(x+1)(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow (x=-1 \vee x=1 \vee x=2)$, se tiene que los puntos críticos de f son $x_0=-1$, $x_0=1$ y $x_0=2$.

Dado que el signo de la derivada depende del producto $(x+1)(x-1)(x-2)$, entonces si $x\in\,]-\infty,-1[$ o si $x\in\,]1,2[$ se tiene que f' es negativa y si $x\in\,]-1,1[$ o si $x\in\,]2,+\infty[$ se tiene que f' es positiva; por lo tanto, f es decreciente en el conjunto $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,2[$ y es creciente en $]-1,1[\,\cup\,]2,+\infty[$.

Además, de lo anterior y del criterio de la primera derivada, se tiene que en $x_0=-1$ hay un mínimo relativo, en $x_0=1$ hay un máximo relativo y en $x_0=2$ hay un mínimo relativo para f.

Por otra parte, como

$$f''(x)=6x^2-8x-2=6\left(x-\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right),$$

se tiene f'' es positiva si $x\in\left]-\infty,\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right[\cup\left]\dfrac{2+\sqrt{7}}{3},+\infty\right[$ y f'' es negativa si $x\in\left]\dfrac{2-\sqrt{7}}{3},\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$, se tiene entonces que G_f es cóncavo hacia en el conjunto $\left]-\infty,\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right[\cup\left]\dfrac{2+\sqrt{7}}{3},+\infty\right[$ y cóncavo hacia abajo en el intervalo $\left]\dfrac{2-\sqrt{7}}{3},\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$; por lo tanto, $x_0=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ son puntos de inflexión.

https://www.desmos.com/calculator/hltf205qk6

3.2.3. Sea $f(x) = x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 1$. Determinar:

a) Puntos críticos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de máximo y de mínimo relativos; intervalos de concavidad de G_f y puntos de inflexión.

b) Si f posee extremos absolutos.

Solución:

a) f es derivable en todo $\mathbb{R}$, luego sus puntos críticos son (solamente) las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$; como $f'(x) = 5x^4 - 5x^2 = 5x^2(x+1)(x-1)$, se tiene que los puntos críticos de f son -1, 0 y 1.

La tabla de signos asociada a f' está dada por

x		-1		0		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

por lo que f es creciente en los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]1, +\infty[$, es decreciente en $]-1, 1[$; tiene un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 1.

Por otra parte como $f''(x) = 20x^3 - 10x = 10\left(\sqrt{2}x + 1\right)x\left(\sqrt{2}x - 1\right)$, se tiene que la tabla asociada a f'' es

x		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

por lo que G_f es cóncavo hacia arriba en los intervalos $\left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right[$ y $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right[$, es cóncavo hacia abajo en los intervalos $\left]-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ y $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Además, de lo anterior; hay tres puntos de inflexión (en donde cambia la concavidad), $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 0 y $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^5\left(1 - \frac{5}{3x^2} - \frac{1}{x^5}\right) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

f no posee extremos absolutos.

Observación: Otra justificación para asegurar la no existencia de extremos absolutos, se debe al hecho que f es creciente en los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]1, +\infty[$.

https://www.desmos.com/calculator/ahdbaebli1

3.2.4. Sea $f(x) = e^x(x-4)$, definida para $x \in [-2, \infty[$, determinar:

a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Extremos relativos, si existen, indicando la naturaleza de cada uno de ellos.

c) Si f posee máximo absoluto.

d) Intervalos de concavidad del gráfico de f.

Solución:

a) Como $f'(x) = e^x(x-3)$ y $e^x > 0$; se tiene que $f'(x) < 0$ para $x \in]-2, 3[$y $f'(x) > 0$ para $x \in]3, \infty[$, por lo que f es decreciente en $]-2, 3[$ y es creciente en $]3, \infty[$.

b) El único punto crítico para f es $x_0 = 3$ y por el criterio de la primera derivada (f' pasa de negativa a postiva), dicho punto corresponde a un mínimo estricto local.

c) f no posee máximo absoluto pues $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) Como $f''(x) = e^x(x-2)$ se tiene que $f''(x) < 0$ para $x \in]-2, 2[$ y $f''(x) > 0$ para $x \in]2, \infty[$, por lo que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $]-2, 2[$ y cóncavo hacia arriba en $]2, \infty[$.

`https://www.desmos.com/calculator/aoz4apba4y`

3.2.5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{x^2+1} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$. Determinar:

a) Puntos críticos.

b) Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

c) Si f alcanza máximo y/o mínimo absoluto.

Solución:

a) Para $x < 0$: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, y luego no hay puntos críticos negativos.

Para $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y luego el único punto crítico positivo es $x = 1$.

De lo anterior, el único punto crítico de f es $x_0 = 1$.

Observación: También se considera correcto afirmar que $x_0 = 0$ es un punto crítico para f debido a la discontinuidad de f en dicho punto.

b) De la parte anterior, se tiene que f es decreciente en el intervalo $]-\infty, 0[$.

Para $x > 0$, se tiene $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ y $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Luego, f es creciente en $]0, 1[$ y es decreciente en $]-\infty, 0[\, \cup \,]1, \infty[$.

c) Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, f no alcanza mínimo absoluto.

Por otra parte, dado que $f(x) < 0 \; \forall x < 0$, de lo obtenido en *b*) y del hecho que $f(1) = \dfrac{1}{2} > 0$, es claro que f alcanza su máximo absoluto en $x_0 = 1$.

`https://www.desmos.com/calculator/i0s6ayzsmd`

3.2.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y luego esbozar el gráfico de f.

Solución: Como $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, se tiene que los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 3$, además como f' es positiva en $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ y es negativa en $]1, 3[$, se tiene que f es creciente en $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ y es decreciente en $]1, 3[$; además por el criterio de la primera derivada, $x = 1$ es un punto de máximo relativo y $x = 3$ es un punto de mínimo relativo.

Por otra parte, como $f''(x) = 6x - 12$, se tiene que f'' es negativa en $]-\infty, 2[$ y es positiva en $]2, +\infty[$ y por lo tanto, el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $]-\infty, 2[$ y cóncavo hacia arriba en $]2, +\infty[$ y entonces $(2, f(2)) = (2, 2)$ es el único punto de inflexión.

`https://www.desmos.com/calculator/fmtgs0j9oj`

3.2.7. Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{4}(x-1)^2(x+2)^3$, determinar:

a) intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) la naturaleza de cada uno de los puntos críticos.

c) un esbozo del gráfico de f.

d) si f posee máximo absoluto.

Solución:

a) Dado que $f'(x) = \dfrac{(x+2)^2}{4}(5x+1)(x-1)$, de la tabla

x		$-1/5$		1	
$5x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

se observa que f es creciente en el conjunto $\left]-\infty, -\dfrac{1}{5}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ y que f es decreciente en el intervalo $\left]-\dfrac{1}{5}, 1\right[$.

b) Los puntos críticos son $x_0 = -2$, $x_0 = -1/5$ y $x_0 = 1$, de la parte anterior, se tiene que $x_0 = 2$ no es ni máximo relativo ni mínimo relativo (pues en este punto f' no cambia de signo), $x_0 = -1/5$ es punto de máximo relativo y $x_0 = 1$ es punto de mínimo relativo.

c) De la primera parte se tiene que un esbozo del gráfico de f es

`https://www.desmos.com/calculator/akl5zkmgru`

d) Como para todo $x > 1$, f es siempre creciente, entonces se tiene f no posee máximo absoluto.

3.2.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y luego esbozar el gráfico de f.

Solución: Como $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6\,(x-1)\,(x-2)$, se tiene que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 2)\,.$$

Los puntos críticos de f son $x = 1$ y $x = 2$. Dado que el signo de la derivada depende del producto $(x-1)\,(x-2)$, entonces si $x \in \left]-\infty, 1\right[$ o si $x \in \left]2, +\infty\right[$ se tiene que f' es positiva y si $x \in \left]1, 2\right[$ se tiene que f' es negativa. Por lo tanto f es creciente en el conjunto $\left]-\infty, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[$ y es decreciente en $\left]1, 2\right[$, en $x = 1$ hay un máximo relativo y en $x = 2$ hay un mínimo relativo para f.

Por otra parte, $f''(x) = 12x - 18 = 12\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

Como f'' es positiva cuando $x > \dfrac{3}{2}$ y f'' es negativa cuando $x < \dfrac{3}{2}$, se tiene que G_f es cóncavo hacia abajo en el intervalo $\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$ y cóncavo hacia arriba en el intervalo $\left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$; por lo tanto, $x = \dfrac{3}{2}$ es un punto de inflexión para G_f.

De lo anterior, un esbozo del gráfico es

`https://www.desmos.com/calculator/k1qqls0xpk`

3.2.9. La **derivada** de una función f está dada por:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 12}{(x-4)^2}$$

Determinar:

a) extremos relativos de f, si existen.

b) intervalos de concavidad del gráfico de f.

c) puntos de inflexión del gráfico de f.

Solución:

a) Dado que $x^2 - 6x + 12 = x^2 - 6x + 9 + 3 = (x-3)^2 + 3 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que f no posee puntos críticos y por lo tanto no tiene extremos relativos.

b) Como $f''(x) = -\dfrac{2x(x-4)}{(x-4)^4} = -\dfrac{2x}{(x-4)^3}$, de la tabla

x		0		4	
$x-4$	$-$	0	$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$

se tiene que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ y hacia arriba en $]0, 4[$.

c) El punto $(0, f(0))$ es de inflexión para el gráfico de f y en el caso en que f esté definida en $x = 4$ (y sea continua en dicho punto), entonces $(4, f(4))$ también es punto de inflexión.

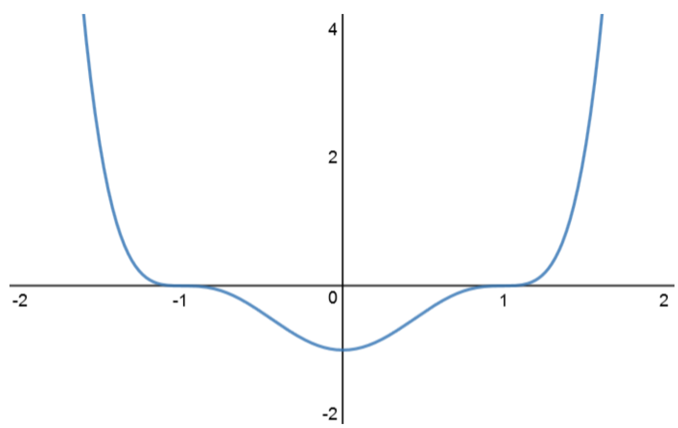
3.2.10. Determinar, si existen, puntos críticos, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y luego esbozar el gráfico de f para $f(x) = (x^2 - 1)^3$.

Solución: Como $f'(x) = 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1)$, estos últimos son los puntos críticos. Por otra parte, si $x \in \mathbb{R}^-$ entonces $f' \leq 0$ y si $x \in \mathbb{R}^+$ entonces $f' \geq 0$ y por lo tanto f es decreciente en $]-\infty, 0[$ y creciente en $]0, +\infty[$; además por el criterio de la primera derivada, $x = 0$ es un punto en donde se alcanza un mínimo relativo.

Dado que $f''(x) = 6(x^2-1)^2 + 6x(x^2-1)4x = 6(x+1)(\sqrt{5}x+1)(\sqrt{5}x-1)(x-1)$, la tabla de signos asociada a f'' está dada por

x		-1		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$		1	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

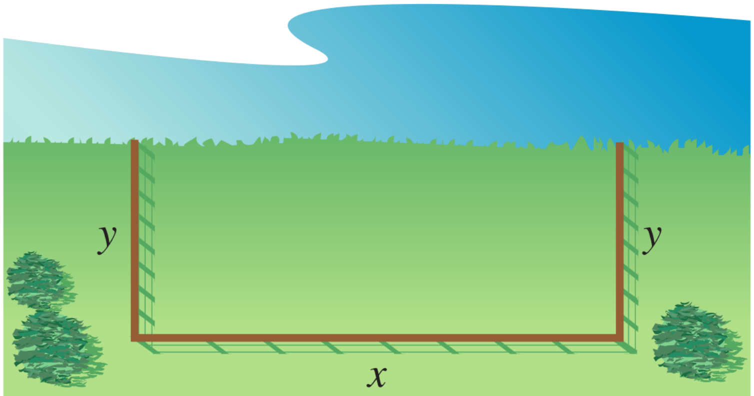
G_f es cóncavo hacia arriba en $]-\infty, -1[$, en $\left]-1/\sqrt{5}, 1\sqrt{5}\right[$y en $]1, +\infty[$; G_f es cóncavo hacia abajo en $\left]-1, -1/\sqrt{5}\right[$ y en $\left]1, 1\sqrt{5}\right[$. Los puntos de inflexión son $(-1, 0)$, $\left(-1/\sqrt{5}, -64/125\right)$, $\left(1/\sqrt{5}, 64/125\right)$ y $(1, 0)$. Un esbozo de G_f es



3.3. Optimización (Problemas de máximos y mínimos)

3.3.1. Una persona tiene 1200 metros de malla para cercar un terreno rectangular bordeando un río *recto*, de manera que no requiere malla en la orilla. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo para encerrar la mayor área posible?

Solución: Al considerar x e y las dimensiones en metros del rectángulo como en la figura



se tiene que la longitud de la malla es $2x+y=1200$ y que la función que determina el área $A=xy$, puede definirse como sigue:

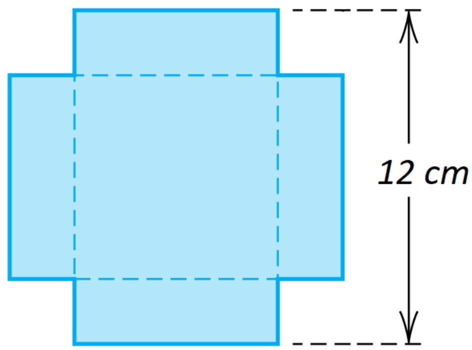
$$\begin{array}{rcl} A:[0,600] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A(x)=x(1200-2x)=1200x-2x^2. \end{array}$$

Por el Teorema de los Valores Extremos, como A es continua y $[0,600]$ es un intervalo cerrado y acotado, está asegurada la existencia de máximo y mínimo absolutos.

Para $x\in\,]0,600[$, $A'(x)=0 \Leftrightarrow x=300$.

Como $A(0)=0$, $A(300)=180000$ y $A(600)=0$, se tiene que el máximo absoluto se alcanza cuando $x=300$ y por lo tanto, las dimensiones buscadas son: ancho $y=600$ y largo $x=300$.

3.3.2. Se desea fabricar una caja sin tapa a partir de una hoja cuadrada de 12 centímetros de lado, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas como en la figura .



y luego doblando los lados hacia arriba. Encontrar la longitud del cuadrado que se debe cortar para obtener una caja cuyo volumen sea máximo.

Solución: Sea x la longitud en centímetros de los cuadrados a cortar en cada una de las cuatro esquinas. La base cuadrada de la caja tiene longitud $12 - 2x$. La función que define el volumen de la caja está dada por

$$\begin{array}{rcl} V : [0,6] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & V(x) = x(12-2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x. \end{array}$$

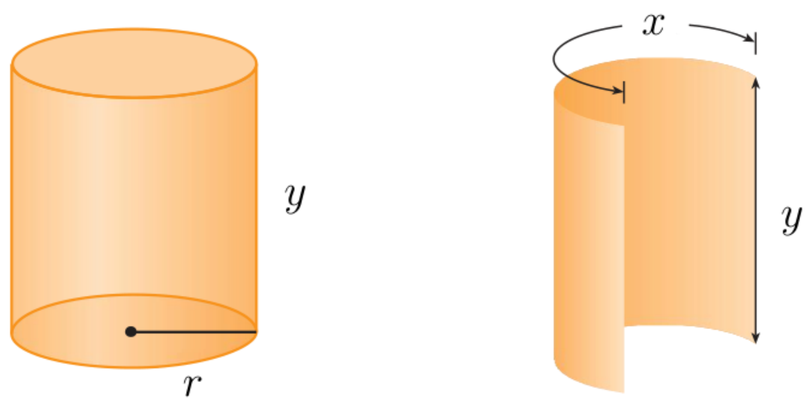
Por el Teorema de los Valores Extremos, como V es continua y $[0,6]$ es un intervalo cerrado y acotado, está asegurada la existencia de máximo y mínimo absolutos.

Para $x \in]0,6[$, $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Como $V(0) = 0$, $V(2) = 128$, $V(6) = 0$; se tiene que la longitud que maximiza el volumen de la caja es $x = 2$.

3.3.3. Un cilindro se construye pegando dos lados de un rectángulo cuyo perímetro es igual 36 centímetros. Determinar las dimensiones de los lados del rectángulo de modo que el volumen del cilindro sea máximo. Calcular dicho valor y justificar por qué él corresponde efectivamente a un máximo absoluto.

Solución: Sean x e y los lados del rectángulo, al pegar los lados de longitud y se obtiene un cilindro de altura y y con perímetro en la base igual a x.



Como el radio del cilindro es $r = x/2\pi$, entonces el volumen está dado por

$$V = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 y.$$

Por otra parte, como $2x + 2y = 36$, se tiene que $y = 18 - x$ y por lo tanto, el problema es hallar es máximo absoluto para

$$V(x) = \frac{18x^2 - x^3}{4\pi}, \text{donde } 0 \leq x \leq 18.$$

Como para $x \in]0, 18[$ se tiene que $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 36x - 3x^2 = 0$, entonces el único punto crítico para V en $]0, 18[$ es $x = 12$ y por lo tanto, aplicando el Teorema de los Valores Extremos, para obtener el máximo absoluto, basta comparar los valores de V en 0, 12 y 18.

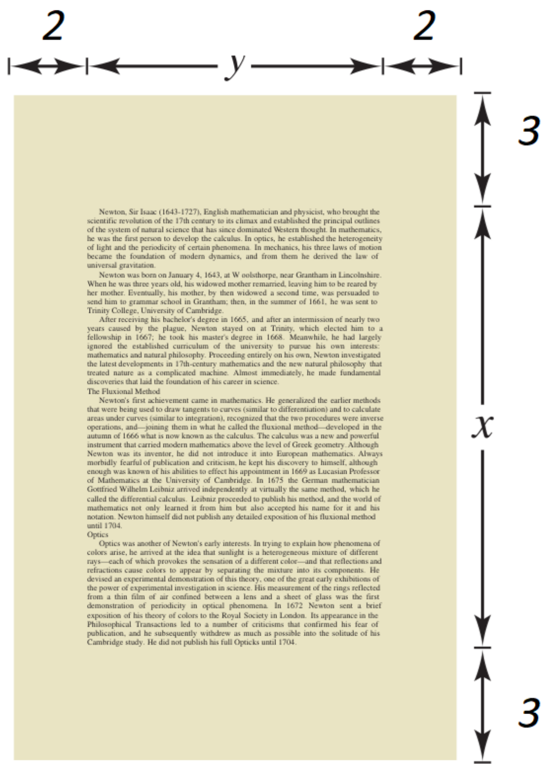
Dado que $V(0) = V(18) = 0$ y $V(12) = \dfrac{216}{\pi}$, el valor máximo para el volumen es $\dfrac{216}{\pi}$ y él se alcanza cuando los lados del rectángulo son $x = 12$ e $y = 6$.

Observaciones: Por tratarse de un problema de máximos y mínimos absolutos:

- Una alternativa es haber considerado $V(x) = (18x^2 - x^3)/4\pi$, con $0 < x < 18$ y mostrar que $V'(x) > 0 \ \forall x \in]0, 12[$ y $V'(x) < 0 \ \forall x \in]12, 18[$.
- **No** es válido aquí, *aplicar* algún criterio para **extremos relativos**.

3.3.4. Una página rectangular ha de contener 96 centímetros cuadrados de texto. Los márgenes superior e inferior tienen 3 centímetros de ancho y los laterales 2 centímetros. ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel requerido?

Solución: Sean x e y el ancho y la altura del área del texto, de la condición indicada se tiene que $xy = 96$ y por tanto el área total de la página,



dada por $(x+4)(y+6)$, puede definirse como

$$A(x) = (x+4)\left(\frac{96}{x} + 6\right) = 6x + 384x^{-1} + 120,\ x > 0.$$

Como $A'(x) = 6 - 384x^{-2} = 0 \Leftrightarrow x = 8$, A tiene como único punto crítico a $x = 8$.

Por otra parte, como $A''(x) > 0$, $\forall x > 0$, se tiene que $x = 8$ es un punto de mínimo absoluto y por lo tanto las dimensiones pedidas son: ancho 12 centímetros y largo 18 centímetros.

Observación: Dado que

$$A'(x) = 6 - \frac{384}{x^2} = \frac{6x^2 - 384}{x^2} = \frac{6}{x^2}\left(x^2 - 64\right) = \frac{6(x+8)}{x^2}(x-8),$$

el signo de A' depende solamente de $x - 8$. Como A' es siempre negativa (A es decreciente) a la izquierda de $x = 8$ y es siempre positiva (A es creciente) a la derecha de $x = 8$, entonces este hecho también permite concluir que en $x = 8$ se alcanza el mínimo absoluto.

3.3.5. Considerar los puntos $P(3,4)$ y $Q(x_0,0)$ con $x_0>3$. Encontrar:

a) La ecuación de la recta L que pasa por P y Q y el área del triángulo R limitado por la recta la L y los ejes coordenados.

b) El valor de x_0 tal que el área de R sea mínima.

c) La ecuación de la recta que pasa por P y acota, con los semiejes positivos, al triángulo contenido en el primer cuadrante de menor área posible.

Solución:

a) La ecuación de la recta L que pasa por $(3,4)$ y $(x_0,0)$ está dada por

$$y=\frac{4}{3-x_0}\left(x-x_0\right),$$

y su intersección con el eje y está en el punto $\left(0,\dfrac{4x_0}{x_0-3}\right)$.

El área del triángulo acotado por L y los semiejes positivos, en función de x_0, es

$$A\left(x_0\right)=\frac{1}{2}x_0\frac{4x_0}{x_0-3}=\frac{2x_0^2}{x_0-3},\, x_0>3.$$

b) $$A'\left(x_0\right)=\frac{4x_0\left(x_0-3\right)-2x_0^2}{\left(x_0-3\right)^2}=\frac{2x_0\left(x_0-6\right)}{\left(x_0-3\right)^2},\, x_0>3.$$

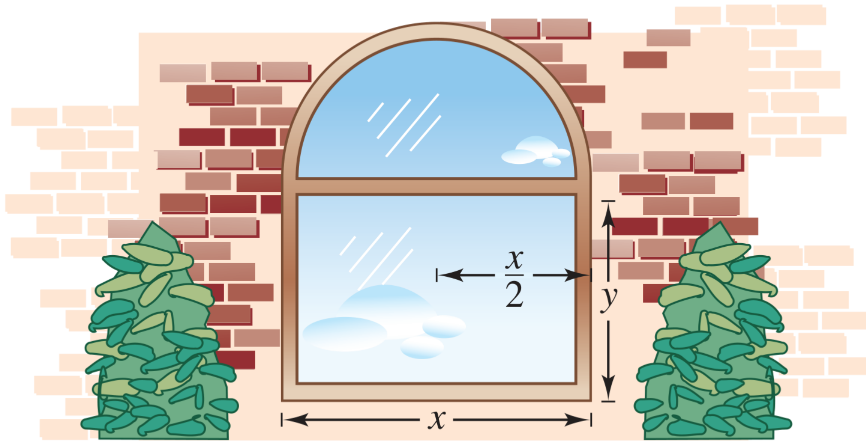
De lo anterior, el único punto crítico para A es $x_0=6$.

Además, como $A'\left(x_0\right)<0,\ \forall x_0<6$ y $A'\left(x_0\right)>0,\ \forall x_0>6$, se tiene que $x_0^*=6$ es el punto en donde se alcanza el mínimo absoluto para el área.

c) De lo anterior, considerando la recta de la parte *a*) y que $x_0=6$, la ecuación de la recta buscada es

$$4x+3y=24.$$

3.3.6. Una ventana normanda se compone de un semicírculo cuyo diámetro calza con la parte superior de un rectángulo, como en la figura:



Si una ventana normanda ha de tener perímetro igual a 16 pies, hallar los valores para x e y que determinan el área máxima.

Solución: Los valores de x e y, dado el perímetro indicado, deben ser tales que

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 16,$$

de donde, $y = \dfrac{32 - 2x - \pi x}{4}$ y por lo tanto, el área de la ventana en función de x, puede expresarse de la manera siguiente

$$A(x) = 8x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{8}x^2, \, \forall x > 0.$$

Como $A''(x) < 0$, $\forall x > 0$ y el único punto crítico de A es

$$x = \frac{32}{\pi + 4},$$

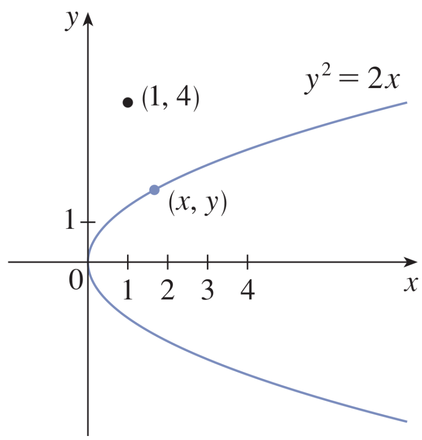
esto implica que $y = \dfrac{16}{\pi + 4}$ y estos son los valores que maximizan el área.

3.3.7. Hallar el punto sobre la parábola de ecuación $y^2 = 2x$ más cercano a $(1, 4)$.

Solución: La distancia desde un punto (x, y) cualquiera del plano al punto $(1, 4)$ está determinada por

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

y si en particular, dicho punto está sobre la parábola de la figura,



entonces la distancia está dada por

$$d(y) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}, \; \forall y \in \mathbb{R}.$$

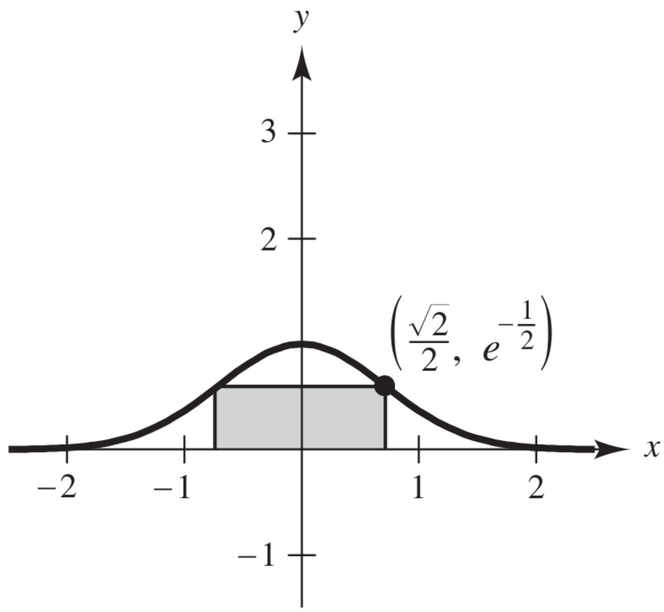
Al considerar como función objetivo la cantidad subradical,

$$f(y) = \frac{y^4}{4} - 8y + 17, \; \forall y \in \mathbb{R}$$

dado que $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ y que $f''(y) = 3y^2 \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que f alcanza su mínimo absoluto cuando $y = 2$ y por lo tanto, el punto buscado es $(2, 2)$.

3.3.8. Encontrar el área del rectángulo más grande que se puede inscribir bajo la curva de ecuación $y = e^{-x^2}$ en el primer y segundo cuadrantes.

Solución: De la figura



se observa que el área, en función de x, está dada por

$$A(x) = 2xe^{-x^2}, \forall x > 0.$$

Ahora, al calcular la derivada de A se obtiene que

$$A'(x) = -\frac{4}{e^{x^2}}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

y por lo tanto, como

- $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ es el único punto crítico para A,
- A es creciente en $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ y
- decreciente en $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$,

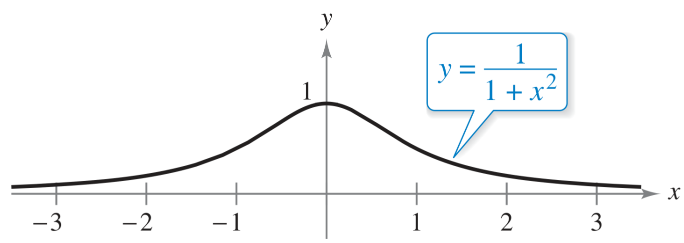
entonces el área máxima es $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-1/2}$.

3.3.9. Sea C el arco la curva

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

que está en el primer cuadrante. Al rotar el rectángulo que tiene como vértices opuestos al origen y al punto $P = (x, y) \in C$ en torno al eje x, se obtiene un cilindro. Determinar el punto sobre C que genera el cilindro de mayor volumen.

Solución: Da la figura



se observa que el volumen del cilindro, cuyo eje central es parte del eje x, está dado por

$$V(x) = \pi \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 x, \; \forall x > 0.$$

Dado que,

$$\begin{aligned} V'(x) &= -\pi \frac{3x^2-1}{(x2+1)^3} \\ &= -\pi \frac{\left(\sqrt{3}x-1\right)\left(\sqrt{3}x+1\right)}{(x2+1)^3} \end{aligned}$$

de la tabla de signos

x	0		$1/\sqrt{3}$	
$\sqrt{3}x-1$		$-$	0	$+$
$V'(x)$		$+$	0	$-$

se observa que $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ es el único punto crítico y en él, como V está definida en $]0, +\infty[$, alcanza el máximo absoluto.

De lo anterior, el punto $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$ es el que genera el cilindro de mayor volumen.

3.3.10. ¿Puede diseñarse un cilindro de volumen igual a $900\,cm^3$, con la mayor área posible?

Solución: No, pues un cilindro con el volumen indicado y de radio $r > 0$ en cms. tiene área

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1800}{r}$$

y por lo tanto, como

$$\lim_{r\to 0^+} A(r) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{r\to +\infty} A(r) = +\infty,$$

el cilindro podría ser muy ancho y bajo, o muy delgado y alto, en ambos casos con área *muy* grande.

3.4. Regla de L'Hôpital

3.4.1. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

a) Sin utilizar L'Hôpital.

b) Utilizando L'Hôpital.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\right)\\
&= 1^2\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2}$

3.4.2. Utilizar la Regla de L'Hôpital para determinar el valor de los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{x}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$

d) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{x^3 - 3x + 2}$

e) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

f) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)}$

g) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x \ln(x)$

h) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^x + 2\right)}{x}$

i) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec(x)} \right)$

j) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(4x)}{1}=4\lim_{x\to 0}\cos(4x)=4\cdot 1=4$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1}=\frac{0}{1}=0$$

$$c)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+e^{-x}}{2x}=-\infty$$

$$d)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln(x)}{x^3-3x+2}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1/x-1}{3x^2-3}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{3x(x+1)}=-\frac{1}{6}$$

$$e)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

$$f)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\ln(x)}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1/x}=\lim_{x\to +\infty}x=+\infty$$

$$g)\ \lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0^+}x=0$$

$$h)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(e^x+2\right)}{x}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{e^x+2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1$$

$$i)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\overset{\text{(L'H)}}{=}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

$$j)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)}\overset{\text{(L'H)}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=1\cdot 1=1$$

3.4.3. Sea f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + x & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$, calcular $f'(0)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin(x)}{x} + x - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + x^2 - x}{x^2} \\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) + 2x - 1}{2x} \\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - \sin(x)}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3.4.4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin(x)}$

Solución: Dado que $x^{\sin(x)} = e^{\ln(x^{\sin(x)})} = e^{\sin(x)\ln(x)}$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\csc(x)} \\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc(x)\cot(x)} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x))}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= (-1)\cdot 1 \cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

se tiene que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = e^0 = 1$.

3.4.5. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x}$

Solución: Sea $y=\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x}$, como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\ln(y) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)}{x}\\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}\\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{x\cos(x)+\sin(x)}\\
&\overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)+\sin(x)}{x\sin(x)-2\cos(x)}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

se tiene que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x}=1.$

3.4.6. Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{x}$

Solución: El límite es de la forma indeterminada $0/0$, aplicando la Regla de L'Hôpital, se tiene que

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(3^x - 1\right)}{1}.$$

Para calcular la derivada de $y = 3^x$, se puede aplicar logaritmo y luego derivación implícita,

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln\left(3^x\right) \\ \ln y &= x \ln(3) \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \ln(3) \\ \frac{dy}{dx} &= y \ln(3) \\ \frac{dy}{dx} &= \ln(3)\, 3^x, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \ln(3) \lim_{x \to 0} 3^x = \ln(3).$$

3.4.7. Hallar los valores de a y b de modo que

$$\lim_{x \to 0} \frac{a - \cos(bx)}{x^2} = 2.$$

Solución: Si $x \to 0$, $\cos(bx) \to 1$ y $x^2 \to 0$, por lo tanto; para que el límite exista (como el denominador tiende a cero, el numerador debe también tender a cero), necesariamente a debe ser 1.

Ahora, como

$$\lim_{x \to 0} \frac{a - \cos(bx)}{x^2} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{b \sin(bx)}{2x} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{b^2 \cos(bx)}{2}$$

se tiene que el límite es 2, si y sólo si, $b^2 = 4$.

De lo anterior, $a = 1$ y $b = \pm 2$.

3.4.8. Decidir, si

$$f(x) = \begin{cases} \left(x + e^{x/2}\right)^{2/x} & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x_0 = 0$.

Solución: Como $\lim\limits_{x \to 0} \left(x + e^{x/2}\right)^{2/x}$ es de la forma indeterminada $1^{+\infty}$, al considerar $y = f(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} (\ln(y)) &= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(x + e^{x/2}\right)}{x} \\ &= 2 \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{1}{2} e^{x/2}}{x + e^{x/2}}, \text{ se ha aplicado L'Hôpital} \\ &= 3 \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e^3$.

De lo anterior, como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$, f no es continua en $x_0 = 0$.

3.4.9. Sea f una función de clase C^2 en $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$. Verificar que la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ f'(0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es de clase C^1 en $\mathbb{R}$.

Solución: Para $x \neq 0$, $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

Por otra parte, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2},$$

(se utilizó dos veces la regla de L'Hôpital) se tiene que $g'(0) = \dfrac{f''(0)}{2}$.

Para $x_0 \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{x\to x_0} g'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = g'(x_0)$$

por lo que g' es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y en el origen, se tiene

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = g'(0),$$

(en el cálculo del límite anterior se utilizó la regla de L'Hôpital); luego, como g' también es continua en el origen, entonces ella es continua en todo $\mathbb{R}$, es decir, g es de clase C^1 en dicho conjunto.

4. La integral

4.1. Teorema Fundamental del Cálculo

4.1.1. Calcular $F'(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $F(x) = \displaystyle\int_2^x e^{t^3} dt$

b) $F(x) = \displaystyle\int_3^{x^3+x+1} \left(t^4 + 5t^2\right) dt$

c) $F(x) = \displaystyle\int_{3x^3}^{x^4} \sin(t^2)\, dt$

Solución:

a) $F'(x) = e^{x^3}$

b) $F'(x) = \left[(x^3 + x + 1)^4 + 5(x^3 + x + 1)^2\right](3x^2 + 1)$

c) $F'(x) = 4x^3 \sin(x^8) - 9x^2 \sin(9x^6)$

4.1.2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida por

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\ dt & , \quad x \neq 0 \\ f(0) & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Analizar la continuidad de F en $x_0 = 0$.

Solución: Al tomar límite a F cuando x se acerca a 0, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} F(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt}{2x} \\ &\overset{\text{(L'H y TFC)}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(-x) \cdot -1}{2} \\ &= f(0), \end{aligned}$$

de donde $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = F(0)$ y por lo tanto F es continua en $x_0 = 0$.

4.1.3. Sea $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt$, definida para $x > 0$. Calcular $f'(x)$ e indicar los intervalos de crecimiento para f.

Solución: Utilizando el Teorema fundamental del Cálculo para hallar la derivada de f, se tiene

$$f'(x) = \frac{\ln(x^2)}{x} \cdot 2x - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \ln(x)\left(4 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Los puntos críticos para f son $x = \dfrac{1}{16}$ y $x = 1$.

La tabla de signos asociada a f' está dada por

x		$1/16$		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
G_f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

por lo que f es creciente en los intervalos $\left]0, \dfrac{1}{16}\right[$ y $]1, +\infty[$.

4.1.4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\displaystyle\int_0^{\sin(x)} e^{-t^2}dt}{1-\cos(x)}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\displaystyle\int_0^{\sin(x)} e^{-t^2}dt}{1-\cos(x)} &\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\sin(x)} e^{-t^2}dt + xe^{-\sin^2(x)}\cos(x)}{\sin(x)} \\
&\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-\sin^2(x)}\cos(x) + x\dfrac{d}{dx}\left(e^{-\sin^2(x)}\cos(x)\right)}{\cos(x)} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

4.1.5. Decidir si $y = \int_0^x e^{x^2-t^2}dt$ es una solución de la ecuación diferencial

$$y' = 2xy + 1.$$

Solución: Considerando $y = f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$, se tiene que

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) \\ &= 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2-x^2} \\ &= 2x\int_0^x e^{x^2-t^2}dt + 1 \\ &= 2xy + 1, \end{aligned}$$

de donde es claro que y satisface la ecuación indicada.

4.1.6. Una curva continua de ecuación $y = f(x)$ pasa del origen al primer cuadrante. El área bajo la curva de $(0,0)$ a cada punto (x,y) y sobre el eje x, es un tercio del área del rectángulo que, con lados paralelos a los ejes, tiene esos puntos como vértices. ¿Cuál es la ecuación de la curva?

Solución: Como el área bajo la curva es $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ y el área del rectángulo es xy, se tiene

$$\frac{xy}{3} = \int_0^x f(t)dt.$$

De la continuidad de f y del Teorema Fundamental del Cálculo, al derivar en la igualdad anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) &= f(x) \\ x\frac{dy}{dx} &= 2y \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{2}{x} \\ \frac{d}{dx}(\ln(y)) &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

de donde, al integrar con respecto a x, se llega a $\ln(y) = \ln(x^2) + C$ y por lo tanto, la ecuación de la curva es $y = kx^2$, con k constante positiva.

4.2. Cálculo de integrales indefinidas

4.2.1. Evaluar la integral

$$\int \sin^3(x)\, dx.$$

Solución: Dado que la integral puede reescribirse como

$$\int \sin^3(x)\, dx = \int \big(1-\cos^2(x)\big)\sin(x)\, dx,$$

al utilizar el cambio de variable $z=\cos(x)$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \sin^3(x)\, dx &= \int \big(z^2-1\big)\, dz\\ &= \frac{z^3}{3} - z + C\\ &= \frac{\cos^3(x)}{3} - \cos(x) + C.\end{aligned}$$

4.2.2. Utilizar integración por sustitución para evaluar las siguiente integrales:

a) $\displaystyle\int 10x\sin(5x^2)\,dx$

b) $\displaystyle\int xe^{3x^2+7}dx$

c) $\displaystyle\int \sec(x)\,dx$

Solución:

a) De la sustitución $z = 5x^2$, como $\dfrac{dz}{dx} = 10x$, se tiene

$$\int 10x\sin(5x^2)\,dx = \int \sin(z)\,dz = -\cos(z) + C = -\cos(5x^2) + C.$$

b) Del cambio $z = 3x^2 + 7$, como $\dfrac{dz}{dx} = 6x$, entonces la integral es

$$\int xe^{3x^2+7}dx = \frac{1}{6}\int e^z dz = \frac{1}{6}e^z + C = \frac{1}{6}e^{3x^2+7} + C.$$

c) Como $\sec(x) = \sec(x)\cdot\dfrac{\sec(x)+\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)} = \dfrac{\sec(x)\tan(x)+\sec^2(x)}{\sec(x)+\tan(x)}$, la integral se escribe como

$$\int \sec(x)\,dx = \int \frac{\sec(x)\tan(x)+\sec^2(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,dx$$

y al considerar $z = \sec(x) + \tan(x)$, se obtiene que

$$\int \sec(x)\,dx = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z| + C = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C.$$

4.2.3. Utilizando en cada caso, una sustitución adecuada, calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int 2x(x^2+7)^5 dx$

b) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+7}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1} dx$

Solución:

a) Al considerar el cambio $z = x^2+7$, se tiene que

$$\int 2x(x^2+7)^5 dx = \int z^5 dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{(x^2+7)^6}{6} + C$$

b) De $z = x^2+7$ y considerando que $x^3 = x^2 \cdot x$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{x^2+7}\, dx &= \frac{1}{2}\int (z-7)z^{1/2} dz \\
&= \frac{1}{2}\int \left(z^{3/2} - 7z^{1/2}\right) dz \\
&= \frac{1}{5}z^{5/2} - \frac{7}{3}z^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{5}(x^2+7)^{5/2} - \frac{7}{3}(x^2+7)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

c) Como $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1+e^x-e^x}{e^x+1} = \dfrac{1+e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x+1} = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1}$, se tiene que

$$\int \frac{1}{e^x+1}\, dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = x - \int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx.$$

Para la integral $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$, del cambio $z = e^x+1$, se tiene que

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx = \int \frac{1}{z} dz = \ln|z| + C.$$

De lo anterior, $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1} dx = x - \ln(e^x+1) + C.$

4.2.4. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \sin^8(x)\cos^3(x)\,dx$

b) $\int \cos^4(x)\,dx$

Solución:

a) De la identidad fundamental se tiene que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, por lo que la integral queda

$$\int \sin^8(x)\cos^3(x)\,dx = \int \left(\sin^8(x) - \sin^{10}(x)\right)\cos(x)\,dx.$$

De lo anterior y del cambio de variable $u = \sin(x)$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \sin^8(x)\cos^3(x)\,dx &= \int \left(u^8 - u^{10}\right) du \\ &= \frac{u^9}{9} - \frac{u^{11}}{11} + C \\ &= \frac{\sin^9(x)}{9} - \frac{\sin^{11}(x)}{11} + C\end{aligned}$$

b) De la identidad $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, la integral puede escribirse como

$$\int \cos^4(x)\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos(2x))^2\,dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right)dx.$$

Nuevamente, al utilizar la misma identidad, se tiene que $\cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1+\cos(4x))$ y por lo tanto,

$$\int \cos^4(x)\,dx = \frac{1}{4}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos(4x))\;dx$$

de donde se obtiene que

$$\int \cos^4(x)\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + C.$$

4.2.5. Utilizando integración por partes, calcular la integral

$$\int t^2 e^t \, dt.$$

Solución: Al integrar por partes, considerando $u = t^2$ y $dv = e^t \, dt$, se tiene que

$$\int t^2 e^t \, dt = t^2 e^t - 2 \int t e^t \, dt.$$

En la igualdad anterior, al calcular la integral que aparece en el lado derecho, integrando nuevamente por partes con $u = t$ y $dv = e^t \, dt$ se tiene que

$$\int t e^t \, dt = t e^t - \int e^t \, dt = t e^t - e^t + C.$$

De lo anterior, se obtiene

$$\int t^2 e^t \, dt = e^t (t^2 - 2t + 2) + C.$$

4.2.6. Mediante integración por partes calcular:

a) $\int x \sin(x)\, dx$

b) $\int \ln(x)\, dx$

c) $\int e^x \sin(x)\, dx$

Solución:

a) Al considerar $u = x$ y $dv = \sin(x)\, dx$, se tiene que

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = -\cos(x)\,,$$

de donde

$$\begin{aligned} \int x \sin(x)\, dx &= -x\cos(x) + \int \cos(x)\, dx \\ &= -x\cos(x) + \sin(x) + C. \end{aligned}$$

b) Al considerar $u = \ln(x)$ y $dv = dx$, se tiene que

$$du = \frac{1}{x}\, dx \quad \text{y} \quad v = x\,,$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\, dx &= x\ln(x) - \int 1\, dx \\ &= x\ln(x) - x + C. \end{aligned}$$

c) Con $u = e^x$ y $dv = \sin(x)\, dx$, se tiene que $du = e^{2x} dx$ y $v = -\cos(x)$ y la integral queda

$$I := \int e^x \sin(x)\, dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\, dx.$$

Al integrar nuevamente por partes, con $u = e^x$ y $dv = \cos(x)\, dx$, se tiene que $du = e^x dx$ y $v = \sin(x)$ y la integral queda

$$I = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - I,$$

y por lo tanto,

$$\int e^x \sin(x)\, dx = \frac{e^x}{2}\,(\sin(x) - \cos(x)) + C.$$

4.2.7. Calcular la integral $\int e^{2x} \cos(7x)\, dx$.

Solución: Con $u = e^{2x}$ y $dv = \cos(7x)\, dx$, se tiene que $du = 2e^{2x}dx$ y $v = \dfrac{1}{7}\sin(7x)$ y la integral queda

$$\int e^{2x} \cos(7x)\, dx = \frac{1}{7}e^{2x}\sin(7x) - \frac{2}{7}\int e^{2x}\sin(7x)\, dx.$$

Al integrar nuevamente por partes, con $u = e^{2x}$ y $dv = \sin(7x)\, dx$, se tiene que $du = 2e^{2x}dx$ y $v = -\dfrac{1}{7}\cos(7x)$ y la integral queda

$$\int e^{2x} \cos(7x)\, dx = \frac{1}{7}e^{2x}\sin(7x) - \frac{2}{7}\left[-\frac{1}{7}e^{2x}\cos(7x) + \frac{2}{7}\int e^{2x}\cos(7x)\, dx\right],$$

de donde se obtiene

$$\int e^{2x} \cos(7x)\, dx = \frac{e^{2x}}{53}\left(2\cos(2x) + 7\sin(2x)\right) + C.$$

4.2.8. Utilizando el cambio $z = x^2$ y luego integración por partes, calcular la integral

$$\int x^5 \cos(x^2)\, dx.$$

Solución: Considerando que $x^5 = (x^2)^2 \cdot x$ y la sustitución indicada, se tiene que

$$\int x^5 \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int z^2 \cos(z)\, dz.$$

Al integrar por partes considerando $u = z^2$ y $dv = \cos(z)\, dz$, se tiene que $du = 2z\, dz$ y $v = \sin(z)$ y la integral queda

$$\frac{1}{2} \int z^2 \cos(z)\, dz = \frac{1}{2} z^2 \sin(z) - \int z \sin(z)\, dz.$$

En la igualdad anterior, al calcular la integral que aparece en el lado derecho, integrando nuevamente por partes con $u = z$ y $dv = \sin(z)\, dz$ se tiene que

$$\int z \sin(z)\, dz = -z \cos(z) + \int \cos(z)\, dz = -z \cos(z) + \sin(z) + C$$

y por lo tanto, $\displaystyle\int x^5 \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} x^4 \sin(x^2) + x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2) + C.$

4.2.9. Utilizar descomposición en suma de fracciones y calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{8x+4}{x^2+2x-3}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2-6x+3}{x^3-3x^2+x-3}\,dx$

Solución:

a) Al descomponer el integrando, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{8x+4}{x^2+2x-3} &= \frac{5x-5+3x+9}{(x+3)(x-1)} \\
&= \frac{5(x-1)}{(x+3)(x-1)} + \frac{3(x+3)}{(x+3)(x-1)} \\
&= \frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-1}
\end{aligned}$$

y $\displaystyle\int \frac{8x+4}{x^2+2x-3}\,dx = 5\ln|x+3| + 3\ln|x-1| + C$

b) De $\dfrac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{3}{x}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,dx &= \int \frac{2}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{3}{x}\,dx \\
&= 2\ln|x-1| - \ln|x+3| + 3\ln|x| + C \\
&= \ln\left|\frac{x^3(x-1)^2}{x+3}\right| + C
\end{aligned}$$

c) Como $\dfrac{5x^2-6x+3}{x^3-3x^2+x-3} = \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{3}{x-3}$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x^2-6x+3}{x^3-3x^2+x-3}\,dx &= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx \\
&= \ln\left(x^2+1\right) + 3\ln|x-3| + C \\
&= \ln\left|(x-3)^3(x^2+1)\right| + C
\end{aligned}$$

4.2.10. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \cos\left(\ln(x)\right)\, dx$

b) $\displaystyle\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x) + \tan(x)\right) dx$

Solución:

a) Con $t = \ln(x)$, se tiene que $dx = e^t\, dt$ e integrando por partes dos veces,

$$\begin{aligned}
\int \cos\left(\ln(x)\right)\, dx &= \int e^t \cos(t) \\
&= e^t \sin(t) - \int e^t \sin(t)\, dt \\
&= e^t \sin(t) + e^t \cos(t) - \int e^t \cos(t)\, dt
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int e^t \cos(t)\, dt = \frac{e^t}{2}\left(\sin(t) + \cos(t)\right) + C$

luego, $\displaystyle\int \cos(\ln(x)) dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))\right) + C.$

b) $\displaystyle\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x) + \tan(x)\right) dx = \int \left(\sec^4(x)\tan^2(x)\right) dx + \int \tan(x)\, dx$

Para la primera integral, como $\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1$, al considerar el cambio de variable $z = \tan(x)$, dado que $dz = \sec^2(x)\, dx$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x)\right) dx &= \int \left(\tan^4(x) + \tan^2(x)\right)\sec^2(x)\, dx \\
&= \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} + C \\
&= \frac{1}{5}\tan^5(x) + \frac{1}{3}\tan^3(x) + C
\end{aligned}$$

Para la segunda integral, haciendo una sustitución simple, se tiene

$$\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\tan(x)}{\sec(x)} \sec(x)\, dx = \ln|\sec(x)| + C$$

y entonces

$$\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x) + \tan(x)\right) dx = \frac{1}{5}\tan^5(x) + \frac{1}{3}\tan^3(x) + \ln|\sec(x)| + C.$$

4.2.11. Utilizar sustitución trigonométrica para calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+13}\,dx$

Solución:

a) Del cambio $t = x^3$, se tiene que $dt = 3x^2\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}dt = x^2\,dx$ y entonces

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{16-t^2}}\,dt.$$

Para la integral en términos de t se considerará la sustitución $t = 4\sin\theta$, de donde $dt = 4\cos\theta\,d\theta$ y $\sqrt{16-t^2} = 4\cos\theta$, luego

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{16-t^2}}\,dt = \frac{1}{3}\int 1\,d\theta = \frac{\theta}{3} + C = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{t}{4}\right) + C.$$

De lo anterior, $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x^3}{4}\right) + C$

b) Como $x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$, del cambio

$$x - 2 = 3\tan\theta$$

se tiene que $dx = 3\sec^2\theta$ y $x^2 - 4x + 13 = 9\sec^2\theta$, de donde

$$\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,dx = \frac{1}{3}\int 1\,d\theta = \frac{\theta}{3} + C = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$$

4.2.12. Calcular:

a) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx$

b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{2x+1}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^9+x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6-1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,dx$

Solución:

a) Como $\displaystyle\sqrt{\frac{x-1}{x^5}}=\sqrt{\frac{1}{x^4}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/2}$, al considerar el cambio de variable $y=1-\dfrac{1}{x}$, se tiene que $dy=\dfrac{1}{x^2}\,dx$ y

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx=\int y^{1/2}\,dy=\frac{2}{3}y^{3/2}+C=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3/2}+C$$

b) Al considerar la sustitución $z=\sqrt{2x+1}$, se tiene que

$$dz=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx \Leftrightarrow z\,dz=dx$$

y entonces

$$\int e^{\sqrt{2x+1}}\,dx=\int ze^z\,dz \overset{\text{(Int. por partes)}}{=} e^{\sqrt{2x+1}}\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+C$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^9+x}\,dx=\int \frac{x^8+1-x^8}{x\left(x^8+1\right)}\,dx=\int \frac{1}{x}\,dx-\int \frac{x^7}{x^8+1}\,dx$

Al considerar el cambio $t=x^8+1$, se tiene que $\dfrac{1}{8}\,dt=x^7\,dx$, luego

$$\int \frac{x^7}{x^8+1}\,dx=\frac{1}{8}\int \frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{8}\ln|x^8+1|+C$$

De lo anterior, $\displaystyle\int \frac{1}{x^9+x}\,dx=\ln|x|-\frac{1}{8}\ln\left(x^8+1\right)+C$

d) Al considerar el cambio $z = x^3$, se tiene que $\frac{1}{3} dz = x^2\, dx$ y

$$\int \frac{x^2}{x^6 - 1}\, dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{z^2 - 1}\, dz.$$

Por otra parte, como $\dfrac{1}{z^2 - 1} = \dfrac{1}{2\,(z-1)} - \dfrac{1}{2\,(z+1)}$, la integral queda

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^6 - 1}\, dx &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{1}{z-1}\, dz - \frac{1}{2} \int \frac{1}{z+1}\, dz \right\} \\
&= \frac{1}{6} \left\{ \ln|z-1| - \ln|z+1| \right\} + C \\
&= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right| + C.
\end{aligned}$$

e) Como $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$, al considerar el cambio $x - 1 = \sin t$, se tiene que

$$dx = \cos t\, dt,\ x^2 = (\sin t + 1)^2,\ \sqrt{2x - x^2} = \cos t \text{ y entonces}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}}\, dx &= \int \left(\sin^2 t + 2 \sin t + 1 \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int \left(1 - \cos(2t) \right) dt - 2\cos t + t + C \\
&= \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} - 2\cos t + t + C \\
&= \frac{3}{2} t - \frac{1}{2} \sin t \cos t - 2\cos t + C \\
&= \frac{3}{2} \arcsin(x-1) - \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{2x - x^2} - 2\sqrt{2x - x^2} + C
\end{aligned}$$

f) Al integrar por partes, eligiendo $u = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ y $dv = dx$, se tiene que

$$du = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx,\ \text{ y } v = x$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx &= x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx. \\
&= x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + C
\end{aligned}$$

4.3. Cálculo de integrales definidas

4.3.1. Calcular:

a) $\displaystyle\int_1^3 2x\,dx$

b) $\displaystyle\int_2^4 \left(6x^2+4x\right)dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 3x^2\left(x^3+1\right)^2 dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x^5}{(x^6+1)^4}\,dx$

f) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{-3}^4 |5x-2|\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int_1^3 2x\,dx = x^2\Big|_1^3 = 9-1=8$

b) $\displaystyle\int_2^4 \left(6x^2+4x\right)dx = \left(2x^3+2x^2\right)\Big|_2^4 = 160-24=136$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

d) $\displaystyle\int_1^2 3x^2\left(x^3+1\right)^2 dx = \frac{x^3+1}{3}\Big|_1^2 = \frac{721}{3}$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x^5}{(x^6+1)^4}\,dx = -\frac{1}{3(x^6+1)^3}\Big|_0^1 = \frac{7}{24}$

f) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,dx = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

g) $\displaystyle\int_{-3}^4 |5x-2|\,dx = \int_{-3}^{2/5}(2-5x)\,dx + \int_{2/5}^4 (5-2x)\,dx = \frac{613}{10}$

4.3.2. Determinar el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_1^2 3x^2\left(x^3+1\right)^2 dx$

b) $\displaystyle\int_1^e e^{e^x}e^x dx$

c) $\displaystyle\int_1^3 4x\sqrt{6-2x}\ dx$

d) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Solución:

a) Si $z=x^3+1$, como $\dfrac{dz}{dx}=3x^2$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_1^2 3x^2\left(x^3+1\right)^2 dx &= \int_2^9 z^2dz\\ &= \left.\frac{z^3}{3}\right|_2^9\\ &= \frac{1}{3}\left(9^3-2^3\right)\\ &= \frac{721}{3}\end{aligned}$$

b) Del cambio de variable $u=e^x$, la integral queda

$$\int_1^e e^{e^x}e^x dx=\int_e^{e^e} e^u du=\left.e^u\right|_e^{e^e}=e^{e^e}-e^e$$

c) De $y=6-2x$, se tiene

$$\int_1^3 4x\sqrt{6-2x}\ dx=\int_4^0 (y-6)\sqrt{y}\ dy=\frac{96}{5}$$

d) Al considerar la sustitución $x=2\sin(\theta)$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/2} 4\cos^2(\theta)d\theta\\ &= 2\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos(2\theta)\right)d\theta\\ &= \pi\end{aligned}$$

4.3.3. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_4^6 \frac{x-17}{x^2+x-12}\,dx.$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin^2(x)}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$

Solución:

a) Dado que $\dfrac{x-17}{x^2+x-12} = \dfrac{3}{x+4} - \dfrac{2}{x-3}$, se tiene

$$\int \frac{x-17}{x^2+x-12}\,dx = 3\ln|x+4| - 2\ln|x-3| + C$$

y por lo tanto, $\displaystyle\int_4^6 \frac{x-17}{x^2+x-12}\,dx = 3\ln(10) - 2\ln(3) - 9\ln(2).$

b) Al considerar $z = 1+3\sin^2(x)$, se tiene que $dz = 6\sin(x)\cos(x)\,dx$ y

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin^2(x)}}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^4 z^{-1/2}\,dz = \frac{1}{3}$$

c) Para $I := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$, del cambio $z = \dfrac{\pi}{2} - x$, dado que $dz = -dx$, $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$ y $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$, se tiene que

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\cos y}+\sqrt{\sin y}}\,dy,$$

de donde $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx.$

De lo anterior, $2I = I + I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

4.4. Integrales impropias

4.4.1. Determinar si las siguientes integrales convergen.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$

Solución:

a) Dado que

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\, dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{\ln(b)}{b} - \frac{1}{b} + 1 \right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

se tiene por definición que la integral converge a 1.

b) Dado que $\displaystyle\int_0^{b} \sin(x)\, dx = 1 - \cos(b)$ y que

$$\lim_{b\to+\infty} (1 - \cos(b))$$

no existe, entonces la integral diverge.

c) Com las integrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$ convergen cada una a $\dfrac{\pi}{4}$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

y la integral dada es convergente.

4.4.2. Determinar el valor de la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+1} - e^{-x} \right) dx$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+1} - e^{-x} \right) dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \left(\frac{1}{x^2+1} - e^{-x} \right) dx \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(\arctan(b) + e^{-b} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{e} \right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

4.4.3. Analizar la convergencia de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,dx$.

Solución: Como $\forall x \geq 1$ se tiene que $\ln(x) \leq x$, entonces

$$\frac{\ln(x)}{x^3} \leq \frac{1}{x^2},\ \forall x \geq 1.$$

Por otra parte, como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge a 1, entonces por criterio de comparación directa $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ también converge.

4.4.4. Verificar que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx$ diverge.

Solución: Al definir las funciones $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}$ y $g(x) := \dfrac{1}{x}$ en el intervalo $[1, +\infty[$, dado que ellas son continuas, no negativas y tales que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 > 0,$$

por criterio de comparación en el límite, como la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ también diverge.

4.4.5. Mostrar que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(2x^2-x)^5}\, dx$ es convergente.

Solución: Utilizando el criterio de comparación en el límite, con respecto a la integral convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^9}\, dx$, dado que

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x/(2x^2-x)^5}{1/x^9}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{10}}{(2x^2-x)^5}\right] = \frac{1}{32} > 0,$$

se tiene que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(2x^2-x)^5}\, dx$ es convergente.

4.4.6. Calcular la integral $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x\ln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$.

Solución: Dado que

$$\int \left(\frac{1}{x\ln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = -\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{x-1} + C,$$

de la definición, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\frac{1}{x\ln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx &= \lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \left(\frac{1}{x\ln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx \\
&= -\frac{1}{\ln(2)} + 1 - \lim_{a\to 1^+} \left(-\frac{1}{\ln(a)} + \frac{1}{a-1}\right) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

5. Aplicaciones de la integral

5.1. Cálculo de áreas planas

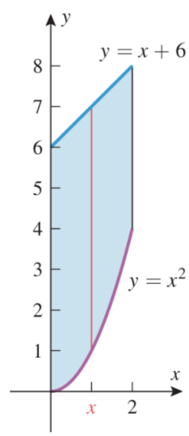
5.1.1. Dibujar cada una de las siguientes regiones y calcular su área.

a) La región acotada superiormente por la recta $y = x + 6$, inferiormente por la parábola $y = x^2$ y lateralmente por las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

b) La región acotada por la recta $y = x + 6$ y la parábola $y = x^2$.

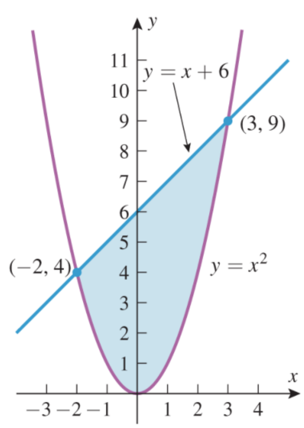
Solución:

a) La región es



y su área es $A_a = \displaystyle\int_0^2 \left(x + 6 - x^2\right) dx = \frac{34}{3}$.

b) La región es



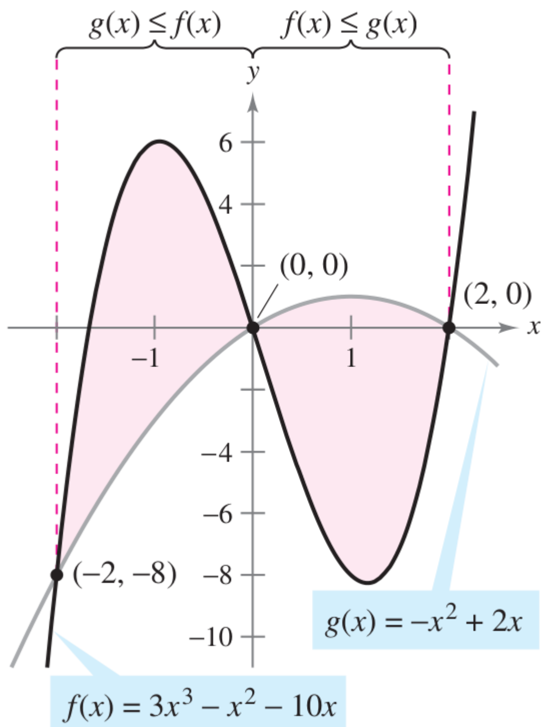
y su área es $A_b = \displaystyle\int_{-2}^3 \left(x + 6 - x^2\right) dx = \frac{125}{6}$.

5.1.2. Calcular el área de la región acotada por las curvas de ecuaciones $y = 3x^3 - x^2 - 10x$ e $y = -x^2 + 2x$.

Solución: Considerando $f(x) := 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) := -x^2 + 2x$, se tiene que los puntos de intersección entre las dos curvas están determinados por

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x \Leftrightarrow 3x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow (x+2)x(x-2) = 0$$

y por lo tanto dichos puntos son $(-2, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$.



Como $g(x) \le f(x)$ para $x \in [-2, 0]$ y $f(x) \le g(x)$ para $x \in [0, 2]$, el área de la región es

$$\int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\, dx = 24.$$

5.1.3. Calcular el área de la región encerrada por las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

Solución: Los puntos de intersección entre las curvas se obtiene a partir de la ecuación

$$6x - x^2 = x^2 - 2x,$$

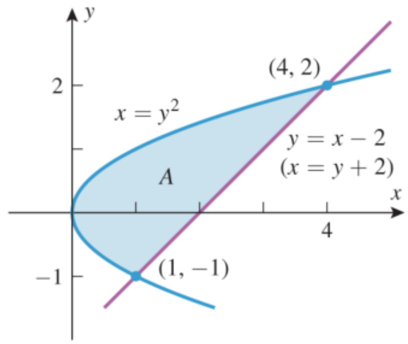
de donde $x = 0$ o $x = 4$ y por lo tanto, dichos puntos son $(0, 0)$ y $(4, 8)$. Dado que para $0 \leq x \leq 4$, se tiene que la parábola $y = 6x - x^2$ está por sobre la parábola $y = x^2 - 2x$, el área está dada por

$$A = \int_0^4 \left[6x - x^2 - \left(x^2 - 2x\right)\right] \, dx = \frac{64}{3}.$$

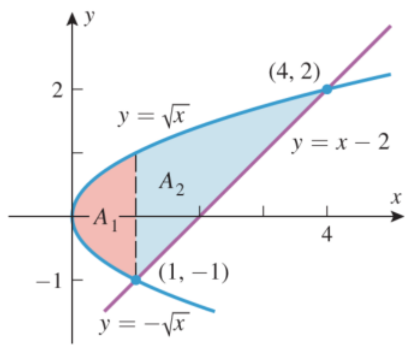
`https://www.desmos.com/calculator/r8vhduktih`

5.1.4. Determinar el valor del área de la región encerrada por la parábola $x = y^2$ y la recta $y = x - 2$ de las dos maneras siguientes:

a) Calculando una integral en la variable y.



b) Calculando la suma de dos integrales en la variable x.



Solución:

a) $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(y + 2 - y^2\right) dy = \frac{9}{2}$

b) $A_1 + A_2 = \displaystyle\int_{0}^{1} \left[\sqrt{x} - \left(-\sqrt{x}\right)\right] dx + \int_{1}^{4} \left[\sqrt{x} - (x-2)\right] dx = \frac{9}{2}$

5.1.5. Calcular el área de las siguientes regiones:

a) La región R_1 acotada por el eje y, la parábola $y = 2x - x^2$ y la recta $x + y = 2$.

b) La región R_2 encerrada por la parábola $y = 2x - x^2$ y la recta $x + y = 2$.

Solución:

a) $A(R_1) = \displaystyle\int_0^1 \left[2 - x - (2x - x^2)\right] dx = \frac{5}{6}$.

`https://www.desmos.com/calculator/zkz1uvbzv9`

b) $A(R_2) = \displaystyle\int_1^2 \left[2x - x^2 - (2 - x)\right] dx = \frac{1}{6}$.

`https://www.desmos.com/calculator/gazdmtf4us`

5.1.6. Calcular el área de la región R del plano que se encuentra sobre el eje x y bajo la curva $y = \dfrac{e^x}{e^{2x}+9}$, entre $x = 0$ y $x = \ln 3$.

Solución: El área de la región está dada por $A = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+9}\, dx$

Del cambio $u = e^x$, se obtiene que

$$A = \frac{1}{3}\left[\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right]\Big|_1^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

https://www.desmos.com/calculator/stdwvg5cfm

5.1.7. Calcular el área de la región R del plano acotada por $y = (x-1)^2$ e $y = 2 - 2x^2$.

Solución: $A(R) = \displaystyle\int_{-1/3}^{1} \left[2 - 2x^2 - (x-1)^2\right] dx = \frac{32}{27}$

`https://www.desmos.com/calculator/2xavtcbz8l`

5.1.8. Calcular el área de la región R acotada por el eje x y la curva $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ que se encuentra a la derecha de la recta $x = 3$.

Solución: $A(R) = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1}\, dx = \ln \sqrt{2}$

https://www.desmos.com/calculator/nnnytq6v1c

5.1.9. Calcular el área de la región R limitada por las curvas $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ en el intervalo $[1, +\infty[$.

Solución: Dado que para $x \geq 1$, se tiene que $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x(x^2+1)} > 0$ y por lo tanto la primera curva está siempre por sobre la segunda,

`https://www.desmos.com/calculator/zumlmssxa9`

luego el área está dada por

$$A(R) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \ln \sqrt{2}$$

5.1.10. Mediante integración y la sustitución $x = 2\sin\theta$ para calcular el área de la región del primer cuadrante acotada por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Solución: De $x^2 + y^2 = 4$ se tiene que $y = f(x) := \sqrt{4 - x^2}$ y el área está dada por

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\,d\theta = \pi$$

5.1.11. Usando integración, hallar el área acotada por la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución: De la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ al despejar y se obtiene que

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

de donde al considerar $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ con a y b positivos, se tiene que valor de la integral

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

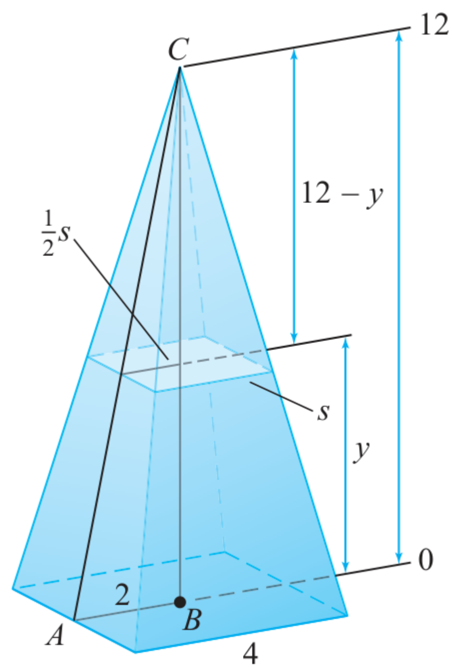
representa un cuarto del área A encerrada por la elipse y de la sustitución $x = a\sin\theta$, se tiene

$$A = \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta d\theta = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos(2\theta)\right] d\theta = ab\pi.$$

5.2. Cálculo de volúmenes por secciones transversales

5.2.1. Calcular el volumen de una pirámide con base cuadrada de lado 4 y de altura 12.

Solución: De la figura



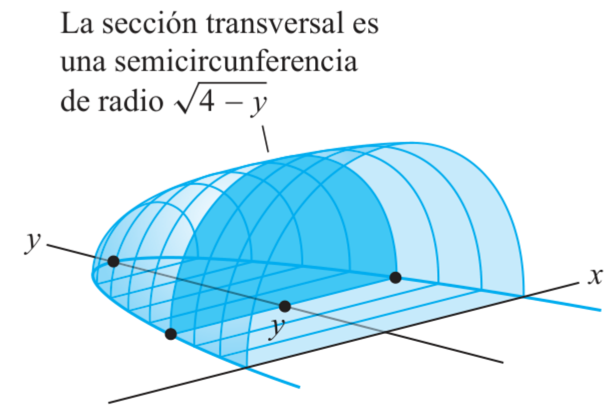
se observa, por triángulos semejantes, que la relación entre las longitudes de las bases y de las alturas de la pirámide y de las pirámides pequeñas está dada por

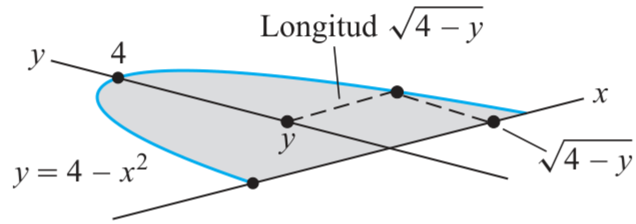
$$\frac{2}{12} = \frac{a/2}{12-y},$$

luego, como las áreas de las bases son $A = a^2 = \left[\frac{1}{3}(12-y)\right]^2 = \frac{1}{9}(12-y)^2$ el volumen es

$$V = \int_0^{12} A(y)\, dy = 64$$

5.2.2. Calcular el volumen del sólido en la figura,





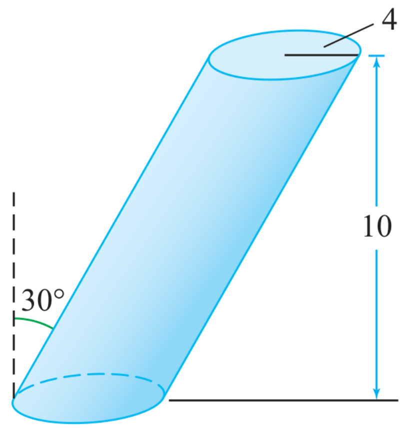
cuya base es la región limitada por la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y el eje x, y cuyas secciones verticales transversales perpendiculares al eje y son semicircunferencias.

Solución: En este caso, el área de las secciones transversales, está definida por

$$A(y) = \frac{1}{2}\pi\sqrt{4-y}$$

y entonces $V = \displaystyle\int_0^4 A(y)\,dy = 4\pi$

5.2.3. Calcular el volumen de un cilindro inclinado en un ángulo $\theta = 30°$ de altura 10 y radio en la base igual a 4.



Solución: En en este caso $A(z) = 16\pi$ y el volumen es

$$V = \int_0^{10} A(z)\, dz = 160\pi$$

5.2.4. Hallar el volumen del cuerpo sólido cuya base es la región determinada por

$$|x| + |y| \leq 1$$

y para el que las secciones transversales verticales, perpendiculares al eje y, son semicircunferencias (con diámetro a lo largo de la base).

Solución: La mitad de la base del volumen es la región

`https://www.desmos.com/calculator/ykudig7vio`

y como con esta consideración, se tiene que

$$A(y) = \frac{1}{2}\pi \left(1 - y\right)^2$$

entonces, por simetría, se obtiene que $V = 2\displaystyle\int_0^1 A(y)\, dy = \frac{\pi}{3}$.

5.3. Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

5.3.1. Sea R la región del plano acotada por las curvas $x+y=4$, $x=0$ e $y=\sqrt{2x}$.

a) Calcular el área de R.

b) Determinar el volumen del sólido generado al rotar R en torno al eje x.

c) Determinar el volumen del sólido generado al rotar R en torno a la recta de ecuación $x=-1$.

d) Escribir las integrales que permiten calcular el volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $y=5$ utilizando los dos métodos conocidos y luego, determinar dicho volumen.

Solución: `https://www.desmos.com/calculator/w8ljed7t96`

a) El área de la región R está dada por $A(R)=\displaystyle\int_0^2 \left\{4-x-\sqrt{2x}\right\} dx = \frac{10}{3}$

b) Discos: $V_{y=0}=\pi \displaystyle\int_0^2 \left[(4-x)^2-\left(\sqrt{2x}\right)^2\right] dx = \frac{44\pi}{3}$

c) Anillos: $V_{x=-1}=2\pi \displaystyle\int_0^2 (1+x)\left(4-x-\sqrt{2x}\right) dx = \frac{164\pi}{15}$

d) El volumen, utilizando anillos, está dado por

$$V_{y=5}=2\pi\int_0^2 (5-y)\,\frac{y^2}{2}\,dy+2\pi\int_2^4 (5-y)\,(4-y)\;dy$$

y utilizando discos, se tiene

$$V_{y=5}=\pi\int_0^2 \left\{\left(5-\sqrt{2x}\right)^2-(5-(4-x))^2\right\} dx.$$

Además, $V_{y=5}=\dfrac{56\pi}{3}$.

5.3.2. Utilizar integración para calcular el volumen de un cono de radio r y altura h.

Solución: Sea $y = f(x) := \frac{r}{h}x$ la ecuación de la recta que pasa por el origen y el punto (h, r). Al rotar en torno al eje x la región triangular de vértices $(0, 0)$, $(h, 0)$ y (h, r) se genera el volumen que se pide calcular.

Al usar el métodos de los discos, se tiene

$$V = \pi \int_0^h [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2} dx = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

5.3.3. Sean r y h dos constantes positivas.

a) Determinar la ecuación de la recta L que contiene a los puntos $(r, 0)$ y $(0, h)$.

b) Utilizando el método de anillos, calcular el volumen obtenido al rotar la región que se encuentra en el primer cuadrante acotada por la recta L y los ejes coordenados, en torno al eje y

Solución:

a) La ecuación de la recta es $y = -\dfrac{h}{r}x + h$.

b) $V = 2\pi \displaystyle\int_0^r x\left(-\frac{h}{r}x + h\right) dx = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

5.3.4. Para $r > 0$ fijo y h positivo y menor o igual que r también fijo, la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ con $r - h \leq x \leq r$, gira en torno al eje x para generar un casquete esférico de altura h.

a) Mostrar, utilizando el método de discos, que el volumen acotado por el casquete está dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$$

b) ¿Qué se observa al considerar $h = r$?

Solución:

a) $V = \pi \displaystyle\int_{r-h}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$

b) Si $h = r$, se obtiene el volumen de la mitad de una esfera.

5.3.5. La región del primer cuadrante que se encuentra acotada por las curvas $y = \sin(x^2)$, $y = \cos(x^2)$ y el eje y, rota en torno al eje y. Determinar el volumen del sólido resultante.

Solución: `https://www.desmos.com/calculator/hb691zepjk`

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}/2} x \left[\cos(x^2) - \sin(x^2)\right] = \pi(\sqrt{2} - 1)$$

5.3.6. Sea R la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$ ($m > 0$). Sabiendo que los volúmenes generados por la rotación de R en torno al eje x y en torno al eje y son iguales, calcular el área de R.

Solución: Como $mx = x^2 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = m)$, se tiene que la parábola y la recta se intersectan en el origen y en el punto (m, m^2).

El volumen obtenido al rotar R en torno a el eje x está dado por

$$V_x = \pi \int_0^m \left[(mx)^2 - \left(x^2\right)^2\right] dx.$$

El volumen obtenido al rotar R en torno a el eje y está dado por

$$V_y = 2\pi \int_0^m x\left(mx - x^2\right)\, dx.$$

De lo anterior, al igualar V_x y V_y, se obtiene que $m = \dfrac{5}{4}$ y el área de la región R está dada por

$$A(R) = \int_0^{5/4} \left[\frac{5}{4}x - x^2\right] dx = \frac{125}{384}.$$

5.3.7. Sea R la región acotada por las curvas $y = 2x^2$ y $2x - y + 4 = 0$. Esbozar la región R y luego, calcular:

a) El área de R.

b) El volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $x = 4$.

c) El volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $x = -1$.

d) El volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $y = 10$.

e) El volumen obtenido al rotar R en torno a la recta $y = -1$.

Solución: `https://www.desmos.com/calculator/gqoh87hbbt`

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(2x + 4 - 2x^2\right)\, dx = 9$

b) $\displaystyle 2\pi \int_{-1}^{2} (4 - x)\left(2x + 4 - 2x^2\right)\, dx = 63\pi$

c) $\displaystyle 2\pi \int_{-1}^{2} (x + 1)\left(2x + 4 - 2x^2\right)\, dx = 27\pi$

d) $\displaystyle \pi \int_{-1}^{2} \left(10 - (2x^2)\right)^2 - (10 - (2x + 4))^2\, dx = \frac{612\pi}{5}$

e) $\displaystyle \pi \int_{-1}^{2} (1 + 2x + 4)^2 - \left(1 + 2x^2\right)^2\, dx = \frac{378\pi}{5}$

5.4. Otras aplicaciones

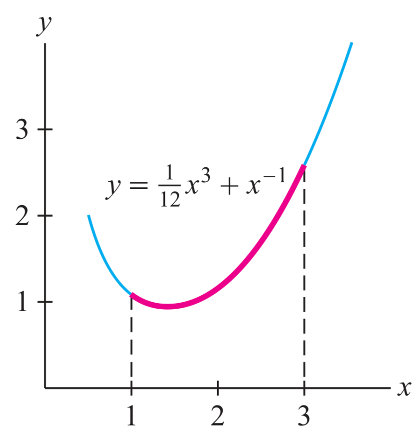
5.4.1. Longitud de arco

5.4.1.1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. La longitud del arco de $y = f(x)$ desde $(a, f(a))$ hasta $(b, f(b))$ está dada por

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Calcular la longitud de la curva de ecuación $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$ para $x \in [1, 3]$.

Solución: Para $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$



$$\mathcal{L} = \int_3^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_3^1 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{17}{6}.$$

5.4.1.2. La longitud del arco de una curva en el plano parametrizada por $c(t) = (x(t), y(t))$, donde x e y son funciones de clase C^1, para $a \leq t \leq b$ está dada por

$$\int_a^b \sqrt{(x'(x))^2 + (y'(x))^2}\, dt.$$

Un imán se ha pegado a la llanta de una rueda de radio a. En cada vuelta, mientras la rueda avanza, la trayectoria recorrida por el imán está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = a(t - \sin t) \quad \text{e} \quad y(t) = a(1 - \cos t),$$

donde $t \in [0, 2\pi]$. ¿Qué distancia recorre el imán cuando la rueda da una vuelta?

Indicación: Puede considerarse la identidad $\dfrac{1 - \cos x}{2} = \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Solución: La distancia recorrida por el imán cuando la rueda da una vuelta corresponde a la longitud de arco de la curva $C(t) = (x(t), y(t))$, donde $t \in [0, 2\pi]$, determinada por la integral

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos t)}\, dt \\
&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\, dt \\
&= 8a.
\end{aligned}$$

5.4.2. Área de superficie de revolución

5.4.2.1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y no negativa. Al rotar la curva $y = f(x)$ en torno al eje x se obtiene una superficie de revolución cuya área está dada por

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Utilizar la fórmula anterior para calcular el área no basal de un cono de radio r y de altura h.

Solución: Para $f(x) = \dfrac{r}{h}x$, $a = 0$ y $b = h$, se obtiene $A = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$.

5.4.2.2. Sea $\mathcal{C}$ una curva simple contenida en el semiplano $y \geq 0$ con ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para $t \in [a, b]$, donde f y g son de clase C^1, si $\mathcal{C}$ gira en torno al eje x se genera una superficie de área

$$2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}dt.$$

Utilizando esta fórmula, calcular el área de la superficie de una esfera de radio R.

Solución: Una parametrización de la semicircunferencia contenida en el semiplano $y \geq 0$, de radio R y centro en el origen está dada por

$$x(t) = R\cos(t) \;\text{ e }\; y(t) = R\sin(t),$$

donde $t \in [0, \pi]$ y al rotar dicha curva en torno al eje x se obtiene una esfera de radio R, cuya área está dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\pi R\sin(t)\sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}\,dt \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin(t)\,dt \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

5.4.3. Ley de enfriamiento de Newton

La **Ley de enfriamiento de Newton** señala que la razón de cambio de la temperatura T de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre esa temperatura T y la temperatura T^*(constante) del medio que lo rodea. Esto es, si la temperatura T es una función derivable que depende del tiempo t entonces

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T^*\right),$$

donde k es una constante.

5.4.3.1. Se ha cometido un asesinato. El cadáver fue encontrado a las 14:00 horas, momento en que se le tomó la temperatura, siendo ésta de $32°C$ y dos horas más tarde la temperatura fue de $29°C$. Considerando que la temperatura de la habitación donde se encontraba el cadáver era constante y de $28°C$ y que la temperatura de un cuerpo con vida es de $36°C$, determinar la hora del asesinato.

Solución: Sean $T^* = 28°C$ la temperatura de la habitación y $T = T(t)$ la temperatura del cadáver después de la primera medición, donde t es el tiempo en horas.

De la ecuación $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - T^*\right)$ y el hecho que $\dfrac{d}{dt}\ln|T - T^*| = \left(\dfrac{1}{T - T^*}\right)\dfrac{dT}{dt}$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\ln|T - T^*| = k.$$

Integrando, se tiene que

$$\int \left(\frac{d}{dt}\ln|T - T^*|\right) dt = \int k\, dt,$$

y entonces $T(t) = Ce^{kt} + T^*$.

$T(0) = 32 \Rightarrow C + 28 = 32 \Rightarrow C = 4.$

$T(2) = 29 \Rightarrow 4e^{2k} + 28 = 29 \Rightarrow k = -\ln(2).$

De lo anterior, $T(t) = 4e^{-t\ln(2)} + 28$, luego si t_a representa la hora del asesinato, entonces

$$4e^{-t_a \ln(2)} + 28 = 36.$$

Al resolver la ecuación anterior, se tiene que $t_a = -1$ y por lo tanto, el asesinato fue a las 13:00 horas.

5.4.3.2. Un termómetro que marca $70°F$ se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante de $390°F$, medio minuto después el termómetro marca $110°F$. Determinar el tiempo que tardó el termométro en marcar $145°F$.

Solución: Sean $T^* = 390°F$ la temperatura del horno y la $T = T(t)$ la temperatura del termómetro en el instante t (en segundos) una vez puesto en el horno. La variación de temperatura del termómetro es proporcional a la diferencia entre su temperatura (variable) y la del horno, luego

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T^*).$$

Integrando, se tiene que $T(t) = T^* - Ce^{kt}$.

$T(0) = 70 \Rightarrow 70 = 390 - C \Rightarrow C = 320.$

$T(30) = 110 \Rightarrow 110 = 390 - 320e^{30k} \Rightarrow k = \dfrac{\ln(7/8)}{30}.$

De lo anterior, $T(t) = 390 - 320e^{\frac{\ln(7/8)}{30}t}$, luego si $\tilde{t}$ representa el tiempo en que la temperatura es $145°F$, entonces

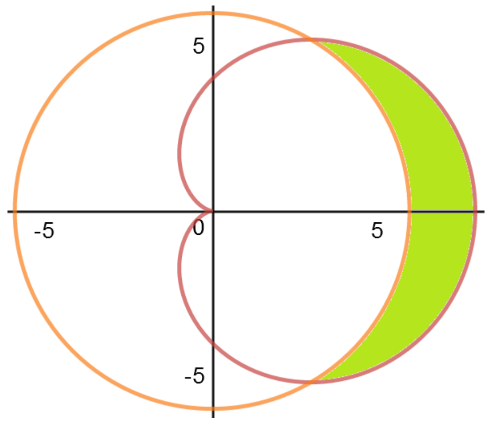
$$390 - 320e^{\frac{\ln(7/8)}{30}\tilde{t}} = 145.$$

Al resolver la ecuación anterior, se tiene que $\tilde{t} = 60$ y por lo tanto, el termómetro tardó un minuto en marcar $145°F$.

5.4.4. Área en coordenadas polares

5.4.4.1. Calcular el área de la región interior a la cardioide $r = 4 + 4\cos\theta$ y exterior a la circunferencia $r = 6$.

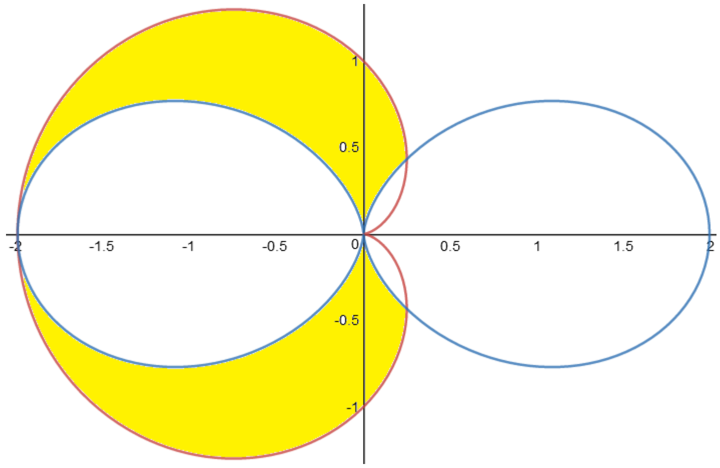
Solución: Como las curvas se intersectan cuando $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ y dada la simetría de los gráficos, el área de la región



está dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{\pi/3} \left[(4 + 4\cos\theta)^2 - 6^2\right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} [8\cos(2\theta) + 32\cos\theta - 12]\, d\theta \\
&= 18\sqrt{3} - 4\pi.
\end{aligned}
$$

5.4.4.2. Calcular el área de la región acotada interior al cardioide $r = 1 - \cos(\theta)$ y exterior a la curva *infinito* $r = 1 + \cos(2\theta)$.



Solución: Al resolver la ecuación

$$1 - \cos(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$$

se obtiene que $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ y $\theta = \pi$, que son los ángulos en donde las curvas se intersectan.

El área de la región acotada por el cardioide y fuera de la curva infinito es

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} \left[(1 - \cos(\theta))^2 - (1 + \cos(2\theta))^2 \right] d\theta \\ &= \frac{21}{16}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

5.4.4.3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas de ecuaciones polares $r = 2\cos(\theta) + 2\sin(\theta)$ y $r = \sqrt{2}$, respectivamente.

a) Escribir la ecuación cartesiana de cada curva.

b) Bosquejar dichas curvas, indicando sus puntos de intersección en coordenadas polares.

c) Escribir la integral que permite calcular el área de la región interior a ambas curvas.

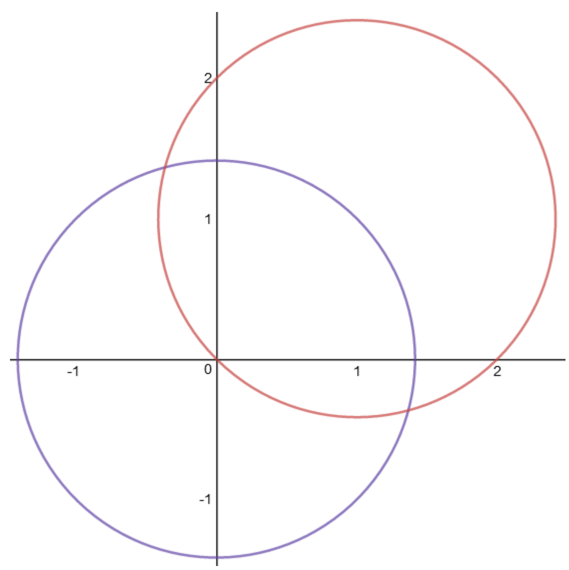
Solución:

a) Del cambio $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, se tiene que $x^2 + y^2 = r^2$ y por lo tanto, la segunda ecuación en coordenadas está dada por $x^2 + y^2 = 2$.

De la primera ecuación, se que tiene $r^2 = 2r\cos(\theta) + 2r\sin(\theta)$, lo cual en coordenadas cartesianas se escribe como

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

b) Un bosquejo de las curvas es



De la ecuación

$$2\cos(\theta) + 2\sin(\theta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(2\theta) = -\frac{1}{2}$$

se obtiene que $\theta = -\dfrac{\pi}{12}$ y que $\theta = \dfrac{7\pi}{12}$, por lo tanto los puntos de intersección son $\left(\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{12}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{12}\right)$.

c) Utilizando simetría con respecto a la recta $\theta = \pi/4$, el área de la región interior a ambas curvas puede calcularse por medio de la integral

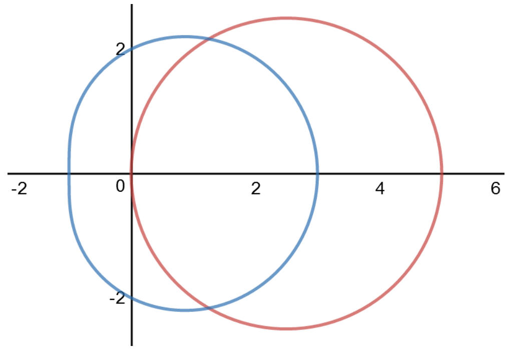
$$A(R) = \int_{\pi/4}^{7\pi/12} \left[\sqrt{2}\right]^2 d\theta + \int_{7\pi/12}^{3\pi/4} \left[2\cos(\theta) + 2\sin(\theta)\right]^2 d\theta.$$

5.4.4.4. Calcular el área de la región barrida por el espiral $r = \theta$, durante su tercera revolución que no fue barrida durante las dos revoluciones anteriores.

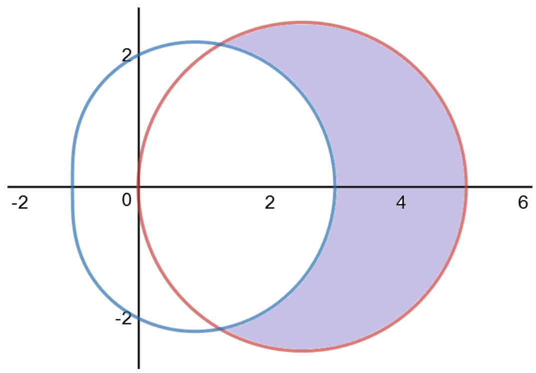
Solución: `https://www.desmos.com/calculator/nzr28qyso2`

$$A = \frac{1}{2}\int_{4\pi}^{6\pi} \theta^2 \, d\theta - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \theta^2 \, d\theta = 16\pi^3.$$

5.4.4.5. Calcular el área de la región interior a la circunferencia $r = 5\cos\theta$ y exterior al limaçon $r = 2 + \cos\theta$.



Solución: Como las curvas se intersectan cuando $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ y dada la simetría de los gráficos, el área de la región

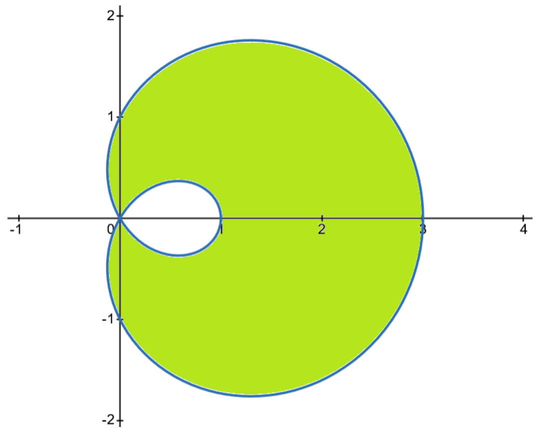


está dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{\pi/3} \left[(5\cos\theta)^2 - (2+\cos\theta)^2\right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} \left[12\cos(2\theta) - 4\cos\theta + 8\right] d\theta \\
&= \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

5.4.4.6. Calcular el área dentro del lazo mayor de la curva $r = 1 + 2\cos\theta$ que es exterior a su lazo menor.

Solución:



$$A = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (1 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta = \pi + 3\sqrt{3}$$

6. Series

6.1. Analizar la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+2}{4n^2-3}$

Solución:

a) Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 \sin^3\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, entonces la serie diverge.

b) Como $0 \leq \dfrac{1}{n3^n+1} \leq \dfrac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge (serie geométrica de razón $\dfrac{1}{3}$), entonces, por criterio de comparación directa, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n+1}$ converge.

c) Al considerar $b_n = \dfrac{3n+2}{4n^2-3}$, se tiene que $b_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ y $b_{n+1} \leq b_n$ (si $f(x) = \dfrac{3x+2}{4x^2-3}$, $f'(x) = -\dfrac{12x^2+16x+9}{(4x^2-3)^2} \leq 0, \forall x \geq 1$); por lo tanto, por criterio de Leibniz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+2}{4n^2-3}$ converge.

6.2. $a)$ Determinar el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

$b)$ Calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]\right)^k$

$c)$ Analizar la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^6+n}}{n^4-n^2+1}$.

Solución:

$a)$ La sucesión de sumas parciales asociada a la serie es

$$s_n = \ln 2 - \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{4}{3} - \ln\frac{3}{4} + ... + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$s_n = \ln 2 - \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = \ln 2.$$

$b)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(\ln 2)^k = \frac{\ln 2}{1-\ln 2}$

$c)$ Al considerar $b_n = \dfrac{\sqrt{n^6+n}}{n^4-n^2+1}$ y $c_n = \dfrac{1}{n}$, se tiene que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = 1$; luego, por criterio de comparación en el límite, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge (serie armónica) entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge.

6.3. Determinar los valores de x para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{3n+4}$ converge y los valores para los cuales la serie diverge.

Solución: Para $x = 7$, la serie converge a 0.

Si $x \neq 7$; al considerar $a_n = \dfrac{(x-7)^n}{3n+4}$ se tiene que $\text{lím}_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x-7|$, luego, por el criterio del cuociente, se tiene que la serie converge para $x \in \,]6,8[$ y que diverge para $x \in \,]-\infty, 6[\, \cup \,]8, \infty[$

Si $x = 6$, se tiene la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+4}$Al considerar $a_n = \dfrac{1}{3n+4}$, se tiene que $b_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ y $b_{n+1} \leq b_n$ (si $f(x) = \dfrac{1}{3x+4}$, $f'(x) \leq 0, \forall x \geq 1$); por lo tanto, por criterio de Leibniz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+4}$ converge.

Si $x = 8$, se tiene la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}$. Al considerar $b_n = \dfrac{1}{3n+4}$ y $c_n = \dfrac{1}{n}$, se tiene que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \frac{1}{3}$; luego, por criterio de comparación en el límite, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge (serie armónica) entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge.

6.4. Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-6)^n}{n^3+n}$.

Solución: Para $x = 6$, la serie converge a cero.

Para $x \neq 6$, definiendo

$$L := \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(x-6)^{n+1}}{(n+1)^3+n+1} \frac{n^3+n}{(x-6)^n} \right| = |x-6|$$

por el criterio del cuociente se tiene que la serie converge si

$$L < 1 \Leftrightarrow |x-6| < 1 \Leftrightarrow 5 < x < 7$$

y se tiene que la serie diverge si $L > 1 \Leftrightarrow |x-6| > 1 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty, 5[\, \cup \,]7, +\infty[$, de donde, el radio de convergencia es $R = 1$.

Si $x = 5$, se tiene la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+n}$, la cual por el criterio de Leibniz converge, pues la sucesión $\dfrac{1}{n^3+n}$ es positiva, decreciente y converge a cero.

Si $x = 7$, se tiene la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3+n}$. Como $0 \leq \dfrac{1}{n^3+n} \leq \dfrac{1}{n^3}\ \forall n$ y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge (serie p con $p = 3 > 1$), por criterio de comparación directa, se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+n}$ converge.

De lo anterior, el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia es $I = [5, 7]$.

6.5. Encontrar el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+3}x^n$ y luego deducir dónde converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+3}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^n$.

Solución: Sea $a_n = \dfrac{1}{n^2+n+3}x^n$, como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|$, entonces; por el criterio de la razón, la serie converge (absolutamente) si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$.

Si $x = \pm 1$, se tienen la series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n^2+n+3}$. Como $0 \leq \dfrac{|\pm 1|}{n^2+n+3} \leq \dfrac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie p, con $p = 2$), entonces; por criterio de comparación, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n^2+n+3}$ convergen.

De lo anterior, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+3}x^n$ converge solamente en $[-1, 1]$ y además, como $\dfrac{|x+3|}{|x-2|} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+3}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^n$ converge solamente en $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$.

6.6. Obtener el desarrollo en serie de Taylor en torno a $x_0 = 0$ para

$$f(x) = \frac{5x - 6}{3x^2 - 7x + 4},$$

indicando su intervalo de convergencia.

Solución: Al escribir la expresión que define a f usando descomposición en suma de fracciones parciales, se tiene que

$$\frac{5x - 6}{3x^2 - 7x + 4} = -\frac{1}{1 - x} - \frac{2}{4 - 3x}.$$

Además, como

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ para} |x| < 1$$

y

$$\frac{2}{4 - 3x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} x\right)^n, \text{ para} |x| < \frac{4}{3};$$

se tiene que

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left\{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\} x^n.$$

El intervalo de convergencia es $]-1, 1[$.

6.7. Representar en serie de potencias de x la función $f(x) = \dfrac{11}{12x^2 + 16x - 3}$, indicando el intervalo de convergencia correspondiente.

Indicación: El denominador en la expresión de $f(x)$ se factoriza como $(2x+3)(6x-1)$.

Solución: $\dfrac{11}{12x^2 + 16x - 3} = -\dfrac{33}{10\,(1-6x)} + \dfrac{11}{30(1 - \left(-\dfrac{2x}{3}\right)}$.

De la serie geométrica, se tiene que $\dfrac{1}{1-6x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (6x)^n$ para $|x| < \dfrac{1}{6}$ y que $\dfrac{1}{1 - \left(-\dfrac{2x}{3}\right)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{2x}{3}\right)^n$ para $|x| < \dfrac{3}{2}$; luego,

$$f\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{33}{10} \cdot 6^n + \frac{11}{30}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) x^n.$$

El intervalo de convergencia es $\left]-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}\right[$.

6.8. Obtener el desarrollo en serie de Taylor en torno a $x_0 = 0$ para

$$f(x) = \frac{16x - 17}{6x^2 - 11x + 3},$$

indicando su intervalo de convergencia.

Solución: Al escribir la expresión que define a f usando descomposición en suma de fracciones parciales, se tiene que

$$\frac{16x - 17}{6x^2 - 11x + 3} = -\frac{5}{1 - 3x} - \frac{2}{3 - 2x}.$$

Además, como

$$\frac{5}{1 - 3x} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n, \text{ para } |x| < \frac{1}{3}$$

y

$$\frac{2}{3 - 2x} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}x\right)^n, \text{ para } |x| < \frac{3}{2};$$

se tiene que

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 5 \cdot 3^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right\} x^n.$$

El intervalo de convergencia es $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

6.9. Determinar justificadamente, la certeza o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones:

a) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ es condicionalmente convergente.

b) Para la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$, el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia es $I = [2, 4[$.

Solución:

a) Como $\cos(n\pi) = (-1)^n$ y la sucesión $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ es positiva, decreciente y converge a cero, por el criterio de Leibniz se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ converge.

Por otra parte, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es una serie p divergente (pues $p = 1/2$), se tiene que la serie original no converge absolutamente.

De lo anterior, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ converge condicionalmente y la afirmación es **verdadera**.

b) Para $x = 3$, la serie converge a cero.

Para $x \neq 3$, definiendo $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \frac{n}{(x-3)^n}\right| = |x-3|$, por el criterio del cuociente se tiene que la serie converge si

$$L < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

y se tiene que la serie diverge si $L > 1 \Leftrightarrow |x-3| > 1 \Leftrightarrow x \in\,]-\infty, 2[\, \cup\,]4, +\infty[$, de donde, el radio de convergencia es $R = 1$.

Si $x = 2$, se tiene la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, la cual converge, pues la sucesión $\dfrac{1}{n}$ es positiva, decreciente y converge a cero.

Si $x = 4$, se tiene la serie armónica, la cual es divergente.

De lo anterior, como el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia es $I = [2, 4[$, se tiene que la afirmación es **verdadera**.

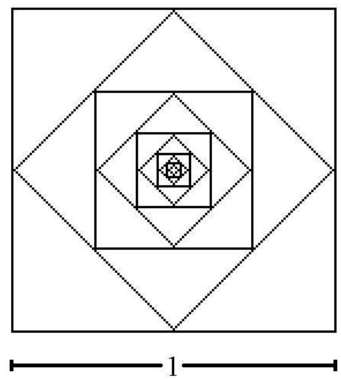
6.10. Considerar un cuadrado de lado 1.

a) Con los puntos medios de cada lado, considerar un nuevo cuadrado y calcular su área.

b) Designar el área del cuadrado original como a_0, la del cuadrado interior como a_1, la del cuadrado interior al interior como a_2, y así sucesivamente. Calcular las áreas a_2, a_3,..., a_n.

c) Expresar la cantidad $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$ escrita como una sumatoria.

d) Al tratar de representar lo descrito en *b*) cuando $n \to \infty$, se obtiene la figura siguiente:



¿Qué valor se obtiene al sumar las áreas de todos los cuadrados?

Solución:

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $a_2 = \dfrac{1}{4}$, $a_3 = \dfrac{1}{8}$, $\ldots$, $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$

6.11. Sabiendo que, para $x \in]-1, 1[$, se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$.

Solución: Al derivar término a término en la serie geométrica, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1},$$

y por lo tanto, como $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, para $x \in]-1, 1[$ es válida la igualdad

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Al considerar en esta última igualdad el valor $x = \dfrac{1}{3}$, se observa que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{9}{4}.$$

6.12. Expresar $f(x) = x^2e^x$ como una serie y probar que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)n!} = \frac{5}{e} - \frac{23}{12}$.

Solución: Como $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, entonces $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$.

En la segunda igualdad, al integrar con respecto a x se tiene que

$$e^x(x^2 - 2x + 2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+3)n!} + C.$$

Al reemplazar $x = 0$ en la igualdad anterior, se obtiene $C = 2$, y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+3)n!} = e^x(x^2 - 2x + 2) - 2.$$

En esta última expresión si se considera $x = -1$, se obtiene $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)n!} = \frac{5}{e} - 2$, y como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)n!} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)n!},$$

entonces, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)n!} = \frac{5}{e} - \frac{23}{12}$.

Última actualización: **20 de enero de 2025**

Prof. Elvis Gavilán
egavilan@udec.cl