Recopilación de ejercicios resueltos para Cálculo III (521227)

Ⓒ Prof. E. Gavilán G.

http://www.udec.cl/~egavilan

Concepción, 4 de marzo de 2019

¡Bien! Seguramente ya terminaron las vacaciones e intentando estudiar Cálculo III hay que recordar un poco lo visto en primer año. Si alguien está decidido a estudiar Cálculo III, *repasar un poco* lo de antes y revisar esta colección de problemas resueltos podría ayudarle un poco; podría, porque si un estudiante no asiste a clases y no estudia, no hay mucho qué hacer con este documento y quizás sea mejor pasar el tiempo haciendo alguna otra cosa en lugar de *estudiar*.

El Cálculo en varias variables entrega las bases necesarias para estudiar muchas aplicaciones, por ejemplo, en física e ingeniería los conceptos de densidad, trabajo y voltaje están definidos formalmente mediante la integral múltiple, integral de línea e integral de línea sobre campos vectoriales conservativos, respectivamente. En varias otras áreas relacionadas con *la* Matemática Aplicada resulta de vital importancia estar familiarizado con el Cálculo en varias variables; por ejemplo en Electromagnetismo son fundamentales el Teorema de Gauss y el Teorema de Stokes, en Probabilidades y Estadística el valor de la famosa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

cuyo valor exacto se puede obtener mediante el uso de las coordenadas polares y el Teorema del cambio de variables, está asociado a la distribución normal estándar; y en Métodos de Optimización o Investigación Operativa es conveniente como punto de partida conocer el Teorema de los valores extremos y los multiplicadores de Lagrange.

Este documento puede ser encontrado en `http://www.udec.cl/~egavilan` y corresponde, en gran parte, a una recopilación de problemas resueltos hace *un rato* por exestudiantes de Ingeniería Civil en la Universidad de Concepción. Los ejercicios están separados en tres grupos, el primero para complementar lo visto en clases, el segundo a aquellos que podrían aparecer en algún test y el tercero a *esos* que se preguntan en los certámenes. A continuación hay una especie de índice:

4. **Regla de la cadena:** 18, problemas 2, 3, 4 y 5; 21, problemas 2, 3 y 4; 88; 89, 2; 91, 2; 93, 1; 96, 1; 125, 2; 129, 2; 133, 2; 137, 2; 141, 2; 161, 2; 165, 1; 168, 2; 173, 1; 178, 1.

5. **Teorema de la función inversa, Teorema de la función implícita:** 24; 88, 2; 89, 1; 91, 2; 93, 2; 94, 1; 96, problemas 2 y 3; 99, 2; 129, 4; 133, 3; 137, 3; 146, 2; 178, 2.

6. **Extremos libres, extremos condicionados, multiplicadores de Lagrange:** 28; 94, 2; 101, 1; 104, problemas 3 y 4; 125, problemas 3 y 4; 129, 5; 133, 4; 137, 4; 144, 1; 146, 4; 154, 1; 158, 1; 161, 3; 165, 2; 171, 2; 173, 2; 176, 3; 180, 1; 182, problemas 1 y 2.

7. **Funciones definidas por integrales**: 35, 101, 2; 103; 104, 2; 108, problemas 1 y 2; 109; 150, 2; 182, 5.

8. **Integración**

   i) Integración sin cambio de variables: 39, 3; 41, 3; 45, problemas 3 y 4; 107; 108, 3; páginas 110 y 111; 114, 1; 115, 1; 116, 1; 117, problemas 1 y 3; 118, 1; 120, 1; 137, 5; 144, 2; 146, 3; 154, 2; 158, 3; 165, problemas 3 y 4; 168, 5; 171, 3; 176, 2; 178, problemas 3 y 4; 180, problemas 2 y 3.

   ii) Integración con cambio de variables: 39, problemas 1 y 2; 41, problemas 1 y 2; 45, problemas 6 y 7; 113, 1; 117, 2; 118, 2; 144, problemas 3 y 4; 146, 5; 158, 2; 168, 3; 173, 3; 176, 3.

   iii) Coordenadas polares: 39, 4; 41, 6; 49, problemas 1 y 3; 114, 2; 115, 2; 123, 1; 141, problemas 3 y 4; 171, 5; 176, 4; 180, problemas 3 y 4.

   iv) Coordenadas cilíndricas: 39, problemas 5 y 6; 41, problemas 4, 5, 7, 8 y 9; 45, problemas 1 y 5; 116, 2; 117, 1; 118, 3; 119, 1; 125, 5; 133, 5; 137, 5; 144, 5; 150, 3; 154, 2; 165, 5; 168, 4; 173, problemas 4 y 5; 178, 5.

   v) Coordenadas esféricas: 39, problemas 5 y 6; 41, problemas 5, 7, 8 y 9; 45, 2; 49, 2; 124, 1; 137, 5; 165, 5; 168, 4; 171, 4; 173, 5.

9. **Cálculo vectorial**

   i) Integral de línea: 51, problemas 1, 5, 6 y 7; 141, 5.

   ii) Teorema de Green: 55, problemas 1 y 2; 60, 1; 112, 1; 113, 2; 120, 3; 121; 150, 4; 154, 3; 182, problemas 3 y 5.

   iii) Campo conservativo: 49, 4; 51, 7; 55, 5; 60, 3; 112, 2; 116, 3; 120, 2; 124, 2; 154, 4; 158, 4.

   iv) Integral de superficie: 51, problemas 2, 3 y 4; 119, 2.

   v) Teorema de Stokes: 51, 6; 55, problemas 3, 4 y 7; 60, problemas 3, 5, 7 y 9; 123, 2; 154, 5; 161, 5; 176, 5; 180, 5.

   vi) Teorema de Gauss: 55, problemas 3 y 6; 60, problemas 2, 4, 5, 6, 8 y 10; 123, 3; 150, 5; 154, 5; 158, 5; 161, 4; 182, 4.

Concepción, 4 de marzo de 2019

EJEMPLOS

1. Para los siguientes conjuntos determinar la adherencia; el interior; el conjunto de los puntos de acumulación y la frontera.

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^3<y\le x, x>0\}\cup\{(0,1)\},$$
$$B=\{(x,y,1)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1\},$$
$$C=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 1<x^2+y^2+z^2+t^2\le 4\}\cup\{(0,0,0,0);(1,0,0,0);(1,1,1,2)\},$$
$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=4-x^2-y^2\ge 0\}.$$

2. Calcular, si es posible, los siguientes límites:

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x-y}\right)}{x^2+|x|+|y|},$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^6+y^2},$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2} e^{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}},$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x+y}.$$

3. Sean f y g las funciones definidas, para $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, como sigue

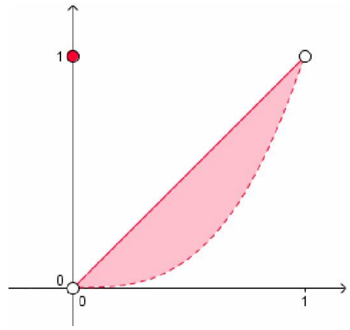
$$f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^4+|z|}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{|x|^3+|y|^3}}\right) \quad \text{y} \quad g(x,y,z)=f(x,y,z)+\frac{x+z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

¿Cómo habría que definirlas en $(0,0,0)$ para que resulten continuas en dicho punto?

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+y^2} & ,x\neq y^2\\ 0 & ,x=y^2\end{cases}$. Analizar la continuidad de f.

Idea de la Solución:

1. A:



$\overline{A}=\{(x,y):x^3\le y\le x, x\ge 0\}\cup\{(0,1)\}$, $\overset{\circ}{A}=\{(x,y):x^3<y<x\}$,

$A'=\{(x,y):x^3\le y\le x, x\ge 0\}$

$Fr(A)=\{(x,y):y=x^3,\ 0<x<1\}\cup\{(x,y):y=x,\ 0\le x\le 1\}\cup\{(0,1)\}$

$B=\overline{B}=Fr(B)=B'$, $\overset{\circ}{B}=\{\ \}$.

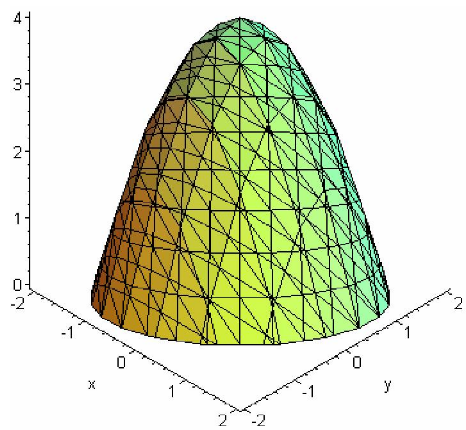
$\overset{\circ}{C}=\{(x,y,z,t):1<x^2+y^2+z^2+t^2<4\}$

$\overline{C}=\{(x,y,z,t):1\le x^2+y^2+z^2+t^2\le 4\}\cup\{(0,0,0,0);(1,1,1,2)\}$

$C'=\{(x,y,z,t):1\le x^2+y^2+z^2+t^2\le 4\}$

$Fr(C)=\{(x,y,z,t):1=x^2+y^2+z^2+t^2 \vee x^2+y^2+z^2+t^2=4\}\cup\{(0,0,0,0);(1,1,1,2)\}$

D:



$\overline{D}=\{(x,y,z):z=4-x^2-y^2\ge 0\}=D'=Fr(D)$, $\overset{\circ}{D}=\{\ \}$

2.

a) Para $(x,y)\neq(0,0)$, $\dfrac{\left|x^2\sin\left(\dfrac{1}{x-y}\right)\right|}{x^2+|x|+|y|}\leq\dfrac{x^2}{x^2+|x|+|y|}\leq\dfrac{x^2}{|x|}=|x|$ y como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$; entonces, por Teorema del sandwich se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2\sin\left(\dfrac{1}{x-y}\right)}{x^2+|x|+|y|}=0$.

b) Para $(x,y)\neq(0,0)$, $\dfrac{x^4|y|}{x^6+y^2}=\dfrac{|x\cdot x^3y|}{\left\|(x^3,y)\right\|^2}\leq\dfrac{|x|\left\|(x^3,y)\right\|^2}{\left\|(x^3,y)\right\|^2}=|x|$; luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4y}{x^6+y^2}=0$.

c) Si $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=1\}$ entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}e^{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}}=0$.

Si $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=0\}$ entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}e^{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}}=e$.

De lo anterior, no existe límite.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin\left(x^2-y^2\right)}{x+y}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x-y)\dfrac{\sin\left(x^2-y^2\right)}{x^2-y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x-y)\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin(t)}{t}=0\cdot1=0$.

3. Para f: Como $|f(x,y,z)|\leq|xy|=h(x,y,z)$, $\forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}h(x,y,z)=0$, entonces $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)=0$. Debe definirse $f(0,0,0)=0$.

Para g: Como $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)=0$, debe analizarse $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{x+z}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Si (x,y,z) está en $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=z=0\}$, se tiene $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{x+z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}$ y como este límite no existe, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}g(x,y,z)$ no existe y g no puede definirse de modo que sea continua en $(0,0,0)$.

4. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq -y^2\}$, si $(x_0,y_0)\in A$ se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

(cuociente de polinomios con denominador no nulo), por tanto f es continua en A.

Ahora si $(x,y)\in A^C-\{(0,0)\}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(-y_0^2,y_0)} f(x,y)$ no existe.

En el origen, al tomar la trayectoria $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y^2\}$, se tiene que

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)=0$, luego f no es continua $(0,0)$.

Así, f es continua A y es discontinua en A^C.

1. **Para el conjunto** $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<|x|+|y|<1\}$ **determinar la adherencia** $\overline{A}$**, la frontera** $Fr(A)$**, el conjunto de los puntos de acumulación** A' **y el interior** $\overset{\circ}{A}$**.**

2. **Para** $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$**, calcular** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$**.**

3. **Estudiar la continuidad en el origen para las siguientes funciones:**

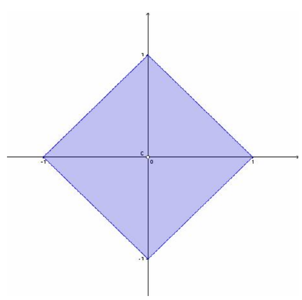
a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$**,** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[\left(x^2+y^2\right)^2\right]}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **,**

b) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$**,** $g(x,y)=\begin{cases}x^3+\sin\left(y^2\right) & ,y\le x\\ x^2-xy+y^2+\cos\left(y^2\right) & ,\ y>x\end{cases}$**.**

4. **Analizar la continuidad de** f **en todo** $\mathbb{R}^2$ **si** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}, & x^2+y^2\neq 1\\ 0\ , & x^2+y^2=1\end{cases}$**.**

<u>Idea de la Solución</u>:

1.



$\overline{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le|x|+|y|\le 1\}=A'$, $\overset{\circ}{A}=A$,

$Fr(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|=1\}\cup\{(0,0)\}$.

2. $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x-y}=\dfrac{x^3-y^3+2y^3}{x-y}=\dfrac{x^3-y^3}{x-y}+\dfrac{2y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2+\dfrac{2y^3}{x-y}$.

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+xy+y^2\right)=0$, debe analizarse la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^3}{x-y}$.

$$\frac{y^3}{x-y}=k \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{y^3}{k}+y\,,\ k\neq 0\,.$$

Sea $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\dfrac{y^3}{k}+y\,, k\neq 0\right\}$.

Si $(x,y)\in T$ entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^3}{x-y}=k$ y por lo tanto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^3}{x-y}$ no existe.

Luego, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

3.

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\frac{\sin\left[\left(x^2+y^2\right)^2\right]}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left[\left(x^2+y^2\right)^2\right]}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$=0\cdot 1$$

$$=0\,.$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$, f es continua en $(0,0)$.

b) Si $(x,y)\in T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0, y>0\right\}$, se tiene $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=1$. Si el límite existiera su valor debería ser 1, como $1\neq 0=f(0,0)$, g no es continua en $(0,0)$.

4. Sea $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$.

- Si $(x_0,y_0)\in B^C$ se tiene que f es el cuociente de polinomios con denominador no nulo, luego $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, por tanto f es función continua en el conjunto B^C.
- Ahora si $(x,y)\in B$ el denominador de la expresión $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}$ es siempre cero, luego cuando el numerador es no nulo el límite no existe. Deber analizarse entonces el caso en que el numerador sea cero,

$x^2+y^2=1 \quad (1) \qquad\qquad x^2-y^2=0 \iff y=\pm x \quad (2)$

Al reemplazar la ecuación (2) en la (1), se llega a las siguientes soluciones:

$$P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P_3=-P_2 \qquad P_4=-P_1$$

Para $\lim\limits_{(x,y)\to P_1} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to P_1}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}$, al tomar la trayectoria $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to P_1} f(x,y)=1\neq 0=f(P_1)$.

Luego f no es continua en $P_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

De manera similar se llega a que f no es continua en los otros tres puntos.

De lo anterior, f es continua en todo $\mathbb{R}^2$ excepto en $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$.

1. **Sea** $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+|z|} & ,(x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ,(x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$.

Mostrar que f es diferenciable en el origen.

2. **Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por** $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) **Mostrar que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.**

b) **Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $\left(1,2,\,5\sin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$.**

3. **Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Probar que f es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$.

4. **Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una norma en $\mathbb{R}^n$. ¿Es f diferenciable en el origen?**

Idea de la solución:

1. $f(0,0,0)=0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=\underset{h\to0}{lím}\frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h}=\underset{h\to0}{lím}\frac{0-0}{h}=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)=\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$$

En este caso se tiene que f es diferenciable en el origen ssi $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{f(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}=0$.

Como $\dfrac{|f(x,y,z)|}{\|(x,y,z)\|}\leq\dfrac{|\sin(xyz)|}{\|(x,y,z)\||z|}\leq\dfrac{|xy|}{\|(x,y,z)\|}\leq\|(x,y,z)\|$, $\forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$ y

$\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\|(x,y,z)\|=0$, se tiene que efectivamente $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{f(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}=0$; luego, f es diferenciable en $(0,0,0)$.

2.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right),\ \forall(x,y)\neq(0,0);$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2y\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right),\ \forall(x,y)\neq(0,0).$

Las dos derivadas parciales son funciones continuas $\forall(x,y)\neq(0,0)$, es decir, f es de clase C^1 $\forall(x,y)\neq(0,0)$. Luego, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

En el origen, $f(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Luego, f es diferenciable en $(0,0)$ ssi

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$. Como $\dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|}\leq\|(x,y)\|,\ \forall(x,y)\neq(0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\|(x,y)\|=0$

se tiene por Teorema del sandwich que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$; luego f es diferenciable en $(0,0)$. Por tanto, f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

b) La ecuación del plano tangente en el punto $(0,0,0)$ está dada por $z=0$.

La ecuación del plano tangente en el punto $\left(1,2,\ 5\sin\left(\dfrac{1}{5}\right)\right)$ está dada por

$$z=\frac{8}{5}\cos\left(\frac{1}{5}\right)-3\sin\left(\frac{1}{5}\right)+x\left(2\sin\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{2}{5}\cos\left(\frac{1}{5}\right)\right)+y\left(4\sin\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{4}{5}\cos\left(\frac{1}{5}\right)\right).$$

3. Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{3x^4y^2+x^2y^4}{(x^2+y^2)^2}$, se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas $\forall(x,y)\neq(0,0)$ ya que ellas son cuocientes de polinomios con denominador no nulo. Luego, $\forall(x,y)\neq(0,0)$, f es función de clase C^1.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Como $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq 2\|(x, y)\|^2, \forall (x, y) \neq (0,0)$ y $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq 4\|(x, y)\|^2, \forall (x, y) \neq (0,0)$ y

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x, y)\| = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Por tanto, f es de clase C^1 en todo IR^2 .

4. $\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0,...,0) - f(0,...,0)}{h} = f(1,0,...,0) \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$, como $f(1,0,...,0) > 0$ y $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ no existe, la derivada parcial de f con respecto a la primera variable no existe en el origen, luego f no es diferenciable en dicho punto.

1. **Sea** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) **Calcular** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **en cada punto donde exista.**

b) **Decidir si** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **es continua en el punto** $(0,0)$ **y si** f **es diferenciable en** $(0,0)$**.**

2. **Sea** $f_p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **definida por** $f_p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2y}{|x|^p+|y|^p} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

¿Para qué valores de p **la función** f_p **es diferenciable en el origen?**

3. **Sea** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ **definida por** $f(X)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$**, con** $p\geq 1$**.**

a) **Analizar la diferenciabilidad de** f **en el origen.**

b) **¿Para qué direcciones** f **admite derivada direccional en el origen?**

c) **¿Qué ocurre en a) y b) si** $f(X)=\max\{|x_i|\}$**?**

Idea de la solución:

1.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}\quad\forall(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0.$$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en el punto $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Como $(x,y)\in T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y^2\}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\neq0$, luego $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en el origen.

En este caso se tiene que $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, luego f es diferenciable en $(0,0)$ ssi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$.

Como $\frac{|f(x,y)|}{(x^2+y^4)\|(x,y)\|} \le \frac{x^2y^2}{x^2\|(x,y)\|} \le \|(x,y)\|$, $\forall (x,y)\neq(0,0)$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|=0$,

entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$.

$\therefore$ f es diferenciable en $(0,0)$.

2. $\frac{\partial f_p}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_p(h,0)-f_p(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{|h|^p}$, $\frac{\partial f_p}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_p(0,h)-f_p(0,0)}{h}=0$.

- Si $p>2$, f_p no es diferenciable en el origen ya que $\frac{\partial f_p}{\partial x}(0,0)$ no está definida.

- Si $p=2$ se tiene que $\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)=1$ y f_2 es diferenciable en $(0,0)$ si y sólo si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_2(x,y)-f_2(0,0)-\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)y}{\|(x,y)\|}=0.$$

En este caso el límite queda $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_2(x,y)-x}{\|(x,y)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{\|(x,y)\|^3}$; al tomar la

trayectoria $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-x\}$ se tiene que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{\|(x,y)\|^3}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq0$; luego

f_2 no es diferenciable en $(0,0)$.

- Si $p<2$ se tiene que $\frac{\partial f_p}{\partial x}(0,0)=0$, f_p es diferenciable en $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_p(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$,

como

$$\frac{|f_p(x,y)|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{|x^3|+|x^2y|}{\|(x,y)\||x|^p} \leq \frac{|x|^{3-p}+|x|^{2-p}|y|}{\|(x,y)\|} \leq 2\|(x,y)\|^{2-p},\ \forall (x,y)\neq(0,0)$$

y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|^{2-p} = 0$ entonces por Teorema del sandwich $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_p(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$, luego, f_p es diferenciable en $(0,0)$.

- Finalmente f_p es diferenciable en $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $p<2$.

3.

a) Como $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,\ldots,0)-f(0,\ldots,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ no existe, no existe la derivada de f con respecto a la variable x_1 en el origen; por tanto, f no es diferenciable en ese punto.

b) Sea $\hat{v}=(v_1,\ldots,v_n)$ un vector unitario. Al considerar $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t\hat{v})-f(0,\ldots,0)}{t} = f(\hat{v})\lim\limits_{t\to 0}\frac{|t|}{t}$, se tiene que este límite existe y vale cero solamente cuando $f(\hat{v})=0$, o sea si $\hat{v}=\theta$, lo cual es una (contradicción). Por lo tanto, $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\theta)$ no existe.

c) Lo mismo.

1. **Sea** $f(x,y,z)=x\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)-z$ **definida para** $y\neq 0$ **y sea** $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: f(x,y,z)=0\right\}$**.** **Encontrar la ecuación del plano tangente a** S **en el punto** $(x_0,y_0,z_0)\in S$ **y mostrar que él contiene al origen.**

2. **Sea** $z=f\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$**, con** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **de clase** C^1**. Probar que** $x\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)=0$**.**

3. **Si** f **es real de variable real, si** $u(x,y)=xy\,f\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$**, determinar una expresión para la función escalar** $g(x,y)$ **de modo que se verifique la relación**

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)-y^2\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=g(x,y)\,u(x,y).$$

4. **Calcular** $\dfrac{d}{dt}(g\circ f)$ **en** $t=2$**, donde** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ **está definida por** $f(t)=\left(t,t^2-4,e^{t-2}\right)$ **y** g **es una función a valores reales con dominio** $\mathbb{R}^3$ **tal que**

$$\frac{\partial g}{\partial x}(P_0)=4,\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(P_0)=2,\qquad \frac{\partial g}{\partial z}(P_0)=2\qquad \text{y}\qquad P_0=(2,0,1).$$

5. **Sea** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$**,** $(x,y)\to f(x,y)$ **una función de clase** C^2 **y el cambio de variables dado por** $x=u+v$ **e** $y=uv$**. Sea** $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$**,** $(u,v)\to g(u,v)=f(u+v,uv)$**. Obtener una expresión para** $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)$ **en términos de las variables** x **e** y**.**

<u>Idea de la solución</u>:

1. La ecuación del plano pedido es $\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$, de donde se tiene

$$\left(\sin\left(\frac{x_0}{y_0}\right)+\frac{x_0}{y_0}\cos\left(\frac{x_0}{y_0}\right),-\frac{x_0^2}{y_0^2}\cos\left(\frac{x_0}{y_0}\right),-1\right)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

y como $z_0=x_0\sin\left(\dfrac{x_0}{y_0}\right)$, dicha ecuación queda

$$x\left(\sin\left(\frac{x_0}{y_0}\right)+\frac{x_0}{y_0}\cos\left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right)-y\frac{x_0^2}{y_0^2}\cos\left(\frac{x_0}{y_0}\right)-z=0,$$

de donde se ve claramente que el origen está contenido en el plano tangente.

2. $$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{2y}{(x-y)^2}f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right),\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{2x}{(x-y)^2}f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\frac{2xy}{(x-y)^2}f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)+\frac{2xy}{(x-y)^2}f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=0.$$

3. $$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=y\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)+xy\,f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{xy}\right)=y\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=x\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)+xy\,f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{xy}\right)=x\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right),$$

reemplazando lo anterior en la relación dada se tiene,

$$x^2y\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)-xy^2f\left(\frac{x+y}{xy}\right)=g(x,y)\,u(x,y).$$

Luego, una fórmula para $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, es $g(x,y)=x-y$.

4. Sean $x(t)=t$, $y(t)=t^2-4$, $z(t)=e^{t-2}$; $(g\circ f)(t)=g(f(t))=g(x(t),y(t),z(t))$

$$\frac{d}{dt}\big(g(f(t))\big)=\frac{d}{dt}\big(g(x(t),y(t),z(t))\big)=\frac{\partial g}{\partial x}(f(t))\frac{\partial x}{\partial t}(t)+\frac{\partial g}{\partial y}(f(t))\frac{\partial y}{\partial t}(t)+\frac{\partial g}{\partial z}(f(t))\frac{\partial z}{\partial t}(t);$$

como $f(2)=P_0$, se tiene

$$\frac{d}{dt}(g(f(2)))=\frac{d}{dt}(g(P_0))=\frac{\partial g}{\partial x}(P_0)\frac{\partial x}{\partial t}(2)+\frac{\partial g}{\partial y}(P_0)\frac{\partial y}{\partial t}(2)+\frac{\partial g}{\partial z}(P_0)\frac{\partial z}{\partial t}(2)$$

$$\frac{d}{dt}(g(f(2)))=4\cdot 1+2\cdot 4+2\cdot 1=14.$$

5. $$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+v\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)+v\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+v\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)+v\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+u\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)+u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+u\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)+u\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Aquí, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ (Schwarz), $u+v=x$ y $u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=x^2-2y$; luego,

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)(u,v)=2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2(u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+\left(u^2+v^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)(u,v)=2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2x\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\left(x^2-2y\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

1. **Suponer que una partícula se lanza desde la superficie $x^2+y^2-z^2=-1$ en el punto $(1,1,\sqrt{3})$ en una dirección normal hacia el plano xy en el tiempo $t=0$ con una rapidez inicial de 10 unidades por segundo. Despreciando los efectos de gravedad, ¿Dónde y cuándo cruza la partícula el plano xy?**

2. **Si f es una función real de variable real de clase C^2, mostrar que $w:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $w(r,s)=f\left(\frac{r-s}{s}\right)$, es una solución de la ecuación diferencial parcial**

$$\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r,s)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial r}(r,s)=-\frac{1}{rs^2}f'\left(\frac{r-s}{s}\right).$$

3. **Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(u,v)\mapsto f(u,v)$ es una función de clase C^1 y tal que la ecuación $f(x^2-y^2,y^2-z^2)=0$ define implícitamente una función $z=z(x,y)$. Suponiendo que $\frac{\partial f}{\partial v}\neq 0$, calcular la expresión $E(x,y,z)=yz\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z)+zx\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z)$ y verificar que ella no depende de f.**

4. **Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea además $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, con $n\geq 3$, la función definida por $f(X)=g(\|X\|)$.**

a) **Probar que $\Delta f(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X)=g''(r)+\frac{n-1}{r}g'(r)$, donde $r=\|X\|$, $X\neq\theta$.**

b) **Probar que si $\Delta f(X)=0$, entonces $f(X)=\frac{C_1}{\|X\|^{n-2}}+C_2$, $X\neq\theta$, con C_1 y C_2 constantes.**

Idea de la solución:

1. Sean la superficie $S: x^2+y^2-z^2=-1$, el punto $X_0=(1,1,\sqrt{3})$ y $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+1$.

La superficie S tiene ecuación $f(x,y,z)=0$ y como el vector normal al plano tangente a S en el punto X_0 está dado por $\vec{n}=\nabla f(X_0)=(2,2,-2\sqrt{3})$, se tiene que, $\vec{v}=\|\vec{v}\|\hat{v}=10\hat{n}$ y la ecuación de itinerario de la partícula está dada por

$$X(t)=(x(t),y(t),z(t))=X_0+\vec{v}\,t=\left(1+\frac{10t}{\sqrt{5}},1+\frac{10t}{\sqrt{5}},\sqrt{3}-10\sqrt{\frac{3}{5}}t\right);$$

$z(t_1)=0\Rightarrow t_1=\frac{\sqrt{5}}{10}$ (segundos), la partícula cruza a $z=0$ en $(2,2,0)$ en el tiempo t_1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial r}(r,s) = f'\left(\dfrac{r-s}{s}\right)\dfrac{1}{s}$, $\quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r,s) = f''\left(\dfrac{r-s}{s}\right)\dfrac{1}{s^2}$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial r}(r,s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(f'\left(\frac{r-s}{s}\right)\ \frac{1}{s}\right) = -\frac{r}{s^3} f''\left(\frac{r-s}{s}\right) - \frac{1}{s^2} f'\left(\frac{r-s}{s}\right)$$

$$\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r,s) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial r}(r,s) = \frac{1}{s^3} f''\left(\frac{r-s}{s}\right) - \frac{1}{s^3} f''\left(\frac{r-s}{s}\right) - \frac{1}{rs^2} f'\left(\frac{r-s}{s}\right) = -\frac{1}{rs^2} f'\left(\frac{r-s}{s}\right).$$

3. Al considerar $u(x,y,z) = x^2 - y^2$ y $v(x,y,z) = y^2 - z^2$ y derivar implícitamente la ecuación $f(x^2 - y^2, y^2 - z^2) = 0$, con respecto a x e y para obtener $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) = 0$$

$$2x\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - 2z\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z) = \frac{x}{z}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)}{\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) = 0$$

$$-2y\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \left(2y - 2z\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z)\right)\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z) = \frac{y}{z}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) - \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)}{\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)}.$$

Luego, $E(x,y,z) = yz\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y,z) + zx\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y,z) = xy$.

4.

a) $\dfrac{\partial r}{\partial x_i}(X)=\dfrac{x_i}{r}$, $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}(X)=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{x_i}{r}\right)=\dfrac{r-\dfrac{x_i^2}{r}}{r^2}=\dfrac{r^2-x_i^2}{r^3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)=g'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x_i}=g'(r)\dfrac{x_i}{r}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}g'(r)\right)=g''(r)\frac{x_i^2}{r^2}+\frac{r^2-x_i^2}{r^3}g'(r)$$

$$\Delta f(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_i^2}{r^2}g''(r)+\frac{r^2-x_i^2}{r^3}g'(r)\right\}=g''(r)+\frac{n-1}{r}g'(r).$$

b) Se tiene entonces que $\Delta f(X)=0$ equivale a $g''(r)+\dfrac{n-1}{r}g'(r)=0$. Si $h=g'$ la ecuación queda $h'(r)+\dfrac{(n-1)}{r}h(r)=0$ y puede ser escrita como $\dfrac{d}{dr}\left(r^{n-1}h(r)\right)=0$.

De esta última se tiene que $h(r)=\dfrac{C}{r^{n-1}}$, donde C es una constante; luego, $g(r)=\dfrac{C_1}{r^{n-2}}+C_2$, donde $C_1=\dfrac{C}{2-n}$ y C_2 es otra constante.

$$\Delta f(X)=0 \quad\Leftrightarrow\quad g(r)=\frac{C_1}{r^{n-2}}+C_2 \quad\Leftrightarrow\quad f(X)=\frac{C_1}{\|X\|^{n-2}}+C_2.$$

1. **Probar que cerca del punto** $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = \left(1,1,0,\pi/2,0\right)$ **se puede resolver el sistema**

$$x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 - 2 = 0$$
$$xy - \sin(u)\cos(v) + z = 0$$

de manera única para x, y **y** z **como funciones de** u **y** v**. Calcular** $\dfrac{\partial x}{\partial v}\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$**.**

2. **Sea** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **una función de clase** C^1 **y sean** $u = f(x)$**,** $v = -y + x\,f(x)$**. Si** $f'(x_0) \neq 0$**, probar que la transformación** $T(x,y) = (u,v)$ **es invertible cerca de** (x_0, y_0) **y que su inversa tiene la forma** $x = f^{-1}(u)$**,** $y = -v + u\,f^{-1}(u)$**.**

3. **Sea** $f: D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ **definida por** $f(x,y,z) = g\left(x+\dfrac{z}{y}, y+\dfrac{z}{x}\right)$**, con** g **función real de clase** C^1 **en** $\mathbb{R}^2$ **y** $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\neq 0$**,** $\forall (x,y,z)\in D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x\neq 0, y\neq 0\right\}$**.**

a) **Expresar** f **como la compuesta de dos funciones de clase** C^1**.**

b) **Verificar que la ecuación** $f(x,y,z) = 0$ **define implícitamente a** z **como función de clase** C^1 **de las variables** x **e** y**.**

c) **Comprobar que** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy$**.**

4. **Dada la función** $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$**, definida por** $F(x,y) = \left(e^x\cos(y), e^x\sin(y)\right)$**.**

a) **Probar que todo punto** $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ **admite una vecindad abierta** V **tal que la función** $F: V\to F(V)$ **admite una inversa** G **de clase** C^1 **sobre** $F(V)$**.**

b) **¿Es** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **inyectiva?**

c) **Para cada par** $(u,v)\in F(V)$ **encontrar la matriz jacobiana** $\left[dG(u,v)\right]$**.**

<u>Idea de la solución</u>:

1. Sea $F:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$,
$(x,y,z,u,v)\mapsto F(x,y,z,u,v) = \left(f_1(x,y,z,u,v), f_2(x,y,z,u,v), f_3(x,y,z,u,v)\right)$

donde $f_1(x,y,z,u,v) = x^2 - y\cos(uv) + z^2$, $f_2(x,y,z,u,v) = x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 - 2$, y $f_3(x,y,z,u,v) = xy - \sin(u)\cos(v) + z$. Sea el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = \left(1, 1, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.

i) F es de clase C^1 en vecindades de P_0,

ii) $F(P_0) = (0,0,0)$,

iii) $$\left.\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x,y,z)}\right|_{P_0} = \left|\begin{matrix} 2x & -\cos(uv) & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{matrix}\right|_{P_0} = 6 \neq 0$$

Por i), ii) y iii), según el Teorema de la función implícita, el sistema dado define de manera única a x, y y z como funciones de clase C^1 en las variables u y v. Además, se tiene que

$$\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right)_{\left(\frac{\pi}{2},0\right)} = -\left(\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}\right)^{-1}_{P_0} \left(\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v)}\right)_{P_0} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{12} \\ 0 & -\frac{\pi}{6} \\ 0 & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \text{ y } \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -\frac{\pi}{12}.$$

2. Como $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = -f'(x_0) \neq 0$ y $T \in C^1$ en vecindades de (x_0, y_0), por

el Teorema de la función inversa, T es inversible cerca del punto (x_0, y_0).

$$\begin{aligned} (x,y) = T^{-1}(u,v) &\Leftrightarrow T(x,y) = (u,v) \\ &\Leftrightarrow f(x) = u \wedge -y + x\, f(x) = v \\ &\Leftrightarrow x = f^{-1}(u) \wedge y = u\, f^{-1}(u) - v \\ &\Leftrightarrow (x,y) = \left(f^{-1}(u), u\, f^{-1}(u) - v\right). \end{aligned}$$

3.

a) Sea $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $h(x,y,z)=(u(x,y,z),v(x,y,z))$, donde $u(x,y,z)=x+\dfrac{z}{y}$ y $v(x,y,z)=y+\dfrac{z}{x}$, dado que u y v son funciones de clase C^1 sobre D, entonces h es función de clase C^1 en el conjunto D. Además como g es de clase C^1 sobre D, se tiene que $f=g\circ h$ es la compuestas de dos funciones C^1 .

b) Al considerar la ecuación $f(x,y,z)=0$, como sobre el conjunto D, f es de clase C^1 y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\neq 0$, por del Teorema de la función implícita se tiene que dicha ecuación define a z función de clase C^1 de las variables x e y.

c) Al considerar la ecuación $g(u(x,y,z),v(x,y,z))=0$ y derivar implícitamente con respecto a x e y para obtener $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z)\right)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\left(-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z)\right)=0,$$

de donde $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y,z)=\dfrac{\dfrac{z}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)-\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)}{\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)}$.

Además, de $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)+\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y,z)=0$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\left(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z)\right)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\left(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z)\right)=0,$$

se obtiene $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y,z)=\dfrac{\dfrac{z}{y^2}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)-\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)}{\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)}$.

Luego,

$$x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z)=\frac{x\left(\dfrac{z}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)-\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)\right)+y\left(\dfrac{z}{y^2}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)-\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)}{\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy\,.$$

4.

a) $\left[dF(x,y)\right]=\begin{bmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y)\end{bmatrix}$. Como $\det\left[dF(x_0,y_0)\right]=e^{2x_0}\neq 0$ y F es de clase C^1, por el Teorema de la función inversa, existe una vecindad V del punto (x_0,y_0), tal que $F:V\to F(V)$ posee inversa local de clase C^1 sobre $F(V)$.

b) No, pues $F(0,0)=F(0,2\pi)$.

c) Aquí $\left[dG(u,v)\right]=\left[dF(x,y)\right]^{-1}$, donde $(x,y)\in V$ es tal que $F(x,y)=\left(u(x,y),v(x,y)\right)$, es decir, $u(x,y)=e^x\cos(y)$ y $v(x,y)=e^x\sin(y)$. Así,

$$\left[dG(u,v)\right]=\begin{bmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y)\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{u}{u^2+v^2} & \dfrac{v}{u^2+v^2} \\ -\dfrac{v}{u^2+v^2} & \dfrac{u}{u^2+v^2}\end{bmatrix}.$$

1. **Hallar los puntos críticos y clasificarlos como máximos relativos, mínimos relativos o puntos de silla para** $f(x,y,z)=x^2z+y^2z+\frac{2}{3}z^3-4x-4y-10z$.

2. **Sea** $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **de clase** C^2 **y** A **un conjunto abierto;** f **se dice armónica en** A**, si** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ **en todo punto** (x,y) **de** A**. Demostrar que si** f **es armónica y tiene un máximo o un mínimo local en** (x_0,y_0) **en** A **entonces todas las derivadasparciales de segundo orden de** f **en** (x_0,y_0) **son nulas.**

3. **Analizar la naturaleza de los puntos críticos para las siguientes funciones:**

a) $f(x,y)=e^x(\sin(y)-1)$,

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy$.

4. **La temperatura en un punto** (x,y,z) **está dada por** $T(x,y,z)=x-2y+2z$.

a) **Determinar si existen extremos locales para** T **en** $\mathbb{R}^3$.

b) **Encontrar los puntos sobre** $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2\le 1\}$ **para los cuales se alcanza la mayor y la menor temperatura.**

5. **Hallar los valores extremos** $f(x,y)=x^2-y^2$ **sobre** $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\le 1\}$.

6. **Sea** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ **definida por** $f(x,y)=6xy^2-2x^3-3y^4$.

a) **Determinar y clasificar los puntos críticos de la función** f.

b) **Mostrar que** f **alcanza valores extremos sobre** $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\le 16\}$**. Indicar cómo encontrar dichos valores.**

c) **Mostrar que la función** f **no tiene mínimo absoluto sobre** $\mathbb{R}^2$.

7. **Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange encontrar el punto de la elipse de ecuación** $x^2+4y^2=4$ **que se encuentra a la mayor distancia, así como el punto que se encuentra a la menor distancia, de la recta de ecuación** $x+y=4$.

8. **Hallar los extremos absolutos para** $f(x,y,z)=2x-2y+z$ **sobre la curva** C **intersección del plano** $z-x+y=1$ **y el cilindro** $x^2+z^2=1$.

Idea de la solución:

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2xz-4=0 \qquad \Rightarrow \quad x=2/z \qquad (1)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2yz-4=0 \qquad \Rightarrow \quad y=2/z \qquad (2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-10=0 \qquad \Rightarrow \quad x^2+y^2+2z^2=10 \qquad (3)$

De (1), (2) y (3) se tiene, $(z^2-1)(z^2-4)=0$; hay 4 puntos críticos, ellos son $P_1=(1,1,2)=-P_2$, $P_3=(2,2,1)=-P_4$.

$$Hf(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 2z & 2y \\ 2x & 2y & 4z \end{pmatrix}$$

Punto	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Naturaleza
P_1	positivo	positivo	positivo	Mínimo local estricto
P_2	negativo	positivo	negativo	Máximo local estricto
P_3	positivo	positivo	negativo	Silla
P_4	negativo	positivo	positivo	Silla

2. Como f es armónica y C^2 en A, entonces para cualquier punto (x,y) en A, se tiene que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$. El determinante de la matriz hessiana en el punto (x_0,y_0) es

$$|Hf(x_0,y_0)|=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}=-\left\{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\right]^2+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)\right]^2\right\}.$$

Luego, si alguna derivada parcial de segundo orden de f en (x_0,y_0) fuese no nula, se tendría que $|Hf(x_0,y_0)|<0$ y (x_0,y_0) sería un punto de silla, lo cual no puede ocurrir, por tanto, todas la derivadas parciales de segundo orden de f en (x_0,y_0) son nulas.

3.

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f(x,y)=0 \Rightarrow \sin(y)=1 \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, k entero.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \Rightarrow \cos(y)=0 \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee y=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, k entero.

Como $e^x>0$ y $-2\le \sin(y)-1\le 0$, entonces es claro que $f(x,y)\le f\left(x,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$, por lo tanto $\left(x,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ corresponden a puntos de máximos absolutos.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x+y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y+x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2z$. El único punto crítico es el origen y corresponde un mínimo absoluto, pues

$$f(x,y,z)=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+z^2\ge 0=f(0,0,0),\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

4.

a) $\frac{\partial T}{\partial x}$ no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}^3$, luego T no posee extremos relativos.

b) $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$. Por Teorema de los valores extremos, T alcanza extremos absolutos sobre D.

- Las derivadas parciales no son nulas en $\overset{\circ}{D}$. No hay puntos críticos en $\overset{\circ}{D}$.
- Par $Fr(D)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\right\}$, al definir $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ y utilizar multiplicadores de Lagrange, se tiene $\nabla f(x,y,z)=\lambda\,\nabla g(x,y,z)$ y $g(x,y,z)=0$.

Hay 4 ecuaciones,

$$\begin{array}{llll} 1=2x\lambda & (1) & -2=2y\lambda & (2) \\ 2=2\lambda z & (3) & x^2+y^2+z^2=1 & (4) \end{array}$$

Despejando λ de (1), (2) y (3) e igualando se tiene que $2x = -y = z$. Reemplazando en la ecuación (4) en función de x se llega $x = \pm\frac{1}{3}$ y hay dos puntos $P_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -P_2$.

- Como $T(P_1) = 3 = -T(P_2)$; se tiene que P_1 es el punto de mayor temperatura y P_2 es el punto de menor temperatura.

5. Por el Teorema de los valores extremos, f alcanza extremos absolutos sobre A.

- En $\overset{\circ}{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, el único punto crítico es $P_0 = (0,0)$.
- En $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$:

  $f(x,y) = x^2 - y^2 = 2x^2 - 1 = g(x),\ \forall x \in [-1,1]$

  $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$; g también alcanza extremos para $x = \pm 1$, y como $x = \pm 1 \Rightarrow y = 0$, se tienen los puntos $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (0,-1)$, $P_3 = (1,0)$ y $P_4 = (-1,0)$.

- $f(P_1) = f(P_2) = -1$, -1 es el valor mínimo absoluto para f en A,

  $f(P_3) = f(P_4) = 1$, 1 es el valor máximo absoluto para f en A.

6.

a) Puntos críticos: $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,-1)$; $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 36y^2 \end{pmatrix}$.

Punto	Δ_1	Δ_2	Naturaleza
$(1,1)$	negativo	positivo	Máximo local estricto
$(1,-1)$	negativo	positivo	Máximo local estricto

Para el origen, si se consideran el número $\varepsilon > 0$ y los valores de f sobre el eje x, se tiene que $f(\varepsilon,0) = -2\varepsilon^3 < f(0,0) = 0 < f(-\varepsilon,0) = 2\varepsilon^3$ y el origen no es punto de máximo ni de mínimo, es punto de silla.

b) Como f es continua sobre A (que es compacto), entonces ella posee valores extremos sobre dicho conjunto. Para hallar los valores extremos se puede proceder como sigue:

- Se encuentran, si existen, puntos críticos en $\overset{\circ}{A}$.
- Se encuentran candidatos a extremos en $Fr(A)$, para lo cual se resuelve el sistema

$$\begin{aligned} 6y^2 - 6x^2 &= 2x\lambda \\ 12xy - 12y^3 &= 2y\lambda \\ x^2 + y^2 &= 16. \end{aligned}$$

- La función f se evalúa en todos los puntos antes obtenidos, se comparan los valores de las imágenes para obtener así los extremos (máximo y mínimo absolutos) de f en A.

Observación: Para los hallar puntos candidatos a extremos en $Fr(A)$, alternativamente a utilizar multiplicadores de Lagrange es parametrizar la circunferencia o despejar una variable en función de otra y expresar a f como una función de una sola variable.

c) Un punto de mínimo absoluto, en un conjunto abierto, como lo es $\mathbb{R}^2$, es también un punto de mínimo relativo. Ninguno de los puntos críticos es un mínimo relativo, por tanto la función no posee mínimo absoluto.

Observación: $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = -\infty$ también asegura que f no alcanza mínimo absoluto.

7. Sea $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$. La distancia desde un punto $P(x,y)$ de la elipse hasta la recta de ecuación $x + y = 4$ está dada por $\dfrac{|x+y-4|}{\sqrt{2}}$. La elipse está bajo la recta, por tanto $x + y < 4$ o sea $|x+y-4| = 4 - x - y$. Encontrar los puntos sobre la elipse más alejados y los más cercanos a la recta equivale a encontrar los extremos de la función $f(x,y) = 4 - x - y$ dada la condición $g(x,y) = 0$.

Usando multiplicadores de Lagrange, se tiene que $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$ y $g(x,y)=0$, de donde

$$-1=2x\lambda \qquad (1)$$

$$-1=8y\lambda \qquad (2)$$

$$x^2+4y^2=4. \qquad (3)$$

De (1) y (2) se tiene que $x=4y$; y al reemplazar en (3) se obtiene $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Se ha llegado a dos puntos: el más cercano a la recta es $P_1=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y el más alejado, $P_2=-P_1$.

Otra solución: Sean $g(x,y,z,w)=x^2+4y^2-4$; $h(x,y,z,w)=z+w-4$. Sean además, $P(x,y)$ y $Q(z,w)$ dos puntos en el plano. La distancia entre estos dos puntos está dada por $\sqrt{(x-z)^2+(y-w)^2}$. Si $f(x,y,z,w)=(x-z)^2+(y-w)^2$, utilizando Lagrange, se tiene:

$$\nabla f(x,y,z,w)=\lambda_1\nabla g(x,y,z,w)+\lambda_2\nabla h(x,y,z,w)$$
$$g(x,y,z,w)=0$$
$$h(x,y,z,w)=0$$

Hay 6 ecuaciones:

$$2(x-z)=2\lambda_1 x \qquad (1)$$

$$2(y-w)=8\lambda_1 y \qquad (2)$$

$$-2(x-z)=\lambda_2 \qquad (3)$$

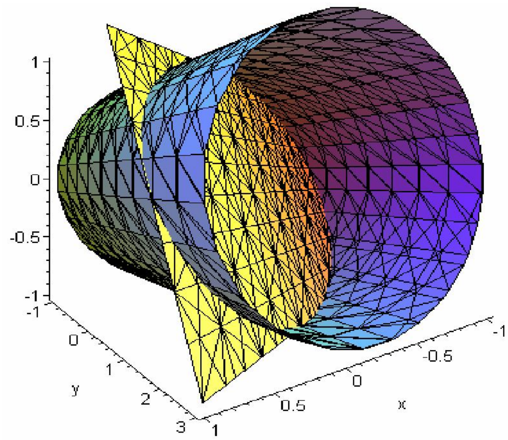
$$-2(y-w)=\lambda_2 \qquad (4)$$

$$x^2+4y^2=4 \qquad (5)$$

$$z+w=4. \qquad (6)$$

Se piden los puntos sobre la elipse, así que interesan los valores para x e y. De (3) y (4) se tiene $x-z=y-w$; así, de (1) y (2) se tiene que $x=4y$ y al reemplazar en (5) se obtiene que $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Hay dos puntos, el más cercano $P_1=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y el más alejado $P_2=-P_1$.

8. Sean $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, donde $g(x,y,z) = -x+y+z-1$ y $h(x,y,z) = x^2+z^2-1$.



Usando multiplicadores Lagrange, se tiene el siguiente sistema definido por

$\nabla f(x,y,z) = \alpha\,\nabla g(x,y,z) + \beta\,\nabla h(x,y,z)$, $g(x,y,z)=0$ y $h(x,y,z)=0$.

Hay 5 ecuaciones,

$$2 = -\alpha + 2\beta\,x \qquad (1)$$

$$-2 = \alpha \qquad (2)$$

$$1 = \alpha + 2\beta\,x \qquad (3)$$

$$-x+y+z=1 \qquad (4)$$

$$x^2+z^2=1 \qquad (5)$$

$\alpha = -2$ en (1) $\Rightarrow$ $\beta = 0$ o $x = 0$.

Si $\beta = 0$ no se cumple la ecuación (3), por tanto necesariamente debe cumplirse que $x = 0$ y reemplazando este valor en la ecuación (5) se llega a que $z = 1$ o $z = -1$, luego con estos valores de z y x en la ecuación (4) se tiene que $y = 0$ o $y = 2$.

Se ha llegado entonces a dos puntos $P_1(0,0,1)$ y $P_2(0,2,-1)$; $f(P_1) = 1$ máximo absoluto, $f(P_2) = -5$ mínimo absoluto.

1. **Calcular** $\lim_{t\to 0}\int_0^1 (3x-1)\cos(tx)\ dx$.

2.

a) **Probar que** $\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\ dt = \frac{1}{1+x^2}$ **y que la convergencia es uniforme.**

b) **Deducir que** $\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{sen\left(\sqrt{3}t\right)}{\mathrm{t}}\ dt = \frac{\pi}{3}$.

3. **Para** $x \geq 0$ **sean** $F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$ **y** $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

a) **Probar que** F **es derivable sobre** $[0,\infty[$ **y que** $F'(x) = 2\sqrt{F(x)}\, e^{-x^2}$, $\forall x \in [0,\infty[$.

b) **Probar que** G **es derivable y que** $G'(x) = -F'(x)$, $\forall x \in [0,\infty[$.

c) **Probar que la función** $H:[0,\infty[\to \mathbb{R}$, $H(x) := F(x)+G(x)$ **es constante y además encontrar su valor.**

d) **Calcular** $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

4. **Dada la función** $\phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

a) **Probar que** $\phi(\alpha)$ **es derivable sobre** $\mathbb{R}$.

b) **Mostrar que** ϕ **satisface la ecuación diferencial:** $\phi'(\alpha) = -\frac{\alpha}{2}\phi(\alpha)$.

c) **Calcular** $\phi(\alpha)$.

5. **Sea** $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$, $x > 0$.

a) **Justificar el hecho que** F **es 2 veces derivable.**

b) **Mostrar que** F **satisface la ecuación diferencial** $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$.

<u>Idea de la solución</u>:

1. $f(x,t)=(3x-1)\cos(tx)$ es continua sobre $\mathbb{R}\times[0,1]\to\mathbb{R}$, luego $F(t)=\int_0^1 f(x,t)dx$ también es continua y por lo tanto $\lim_{t\to 0} F(t)=F(0)$ y $\lim_{t\to 0}\int_0^1 (3x-1)\cos(xt)\ dx=\int_0^1 (3x-1)\ dx=\frac{1}{2}$.

2.

a) $\int e^{-t}\cos(xt)\ dt=\frac{e^{-t}}{1+x^2}\left[x\sin(xt)-\cos(xt)\right]$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\ dt=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{e^{-a}}{1+x^2}\left[x\sin(xa)-\cos(xa)\right]+\frac{1}{x^2+1}\right)=\frac{1}{1+x^2}$$

$\left|e^{-t}\cos(xt)\right|\le e^{-t}$, $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+$; $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=1$.

b) La integral $\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\ dt$ es uniformemente convergente $\forall x\in\mathbb{R}$.
De la convergencia uniforme, se tiene el intercambio

$$\int_0^{+\infty}\int_0^b e^{-t}\cos(xt)\ dx\ dt=\int_0^b\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,dt\,dx=Arctg\ b.$$

Por otra parte, como $\int_0^b e^{-t}\cos(xt)\ dx=\frac{e^{-t}\sin(bt)}{t}$, entonces $\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin\left(\sqrt{3}t\right)}{\mathrm{t}}\ dt=\frac{\pi}{3}$.

3.

a) Sea $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$, por T.F.C. se tiene que $f'(x)=e^{-x^2}$, $F'(x)=2\sqrt{F(x)}\ e^{-x^2}$.

b) $g(x,t)=\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{t^2+1}$ y $g_x(x,t)=-2x\ \ e^{-x^2(1+t^2)}$ son continuas $\forall(x,t)\in\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+$.

c) Leibniz: $G'(x)=\int_0^1 g_x(x,t)\,dt=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt$ (puede considerarse aquí $y=xt$);

$$G'(x)=-2\,e^{-x^2}\int_0^x e^{-y^2}dy=-2\,e^{-x^2}\sqrt{F(x)}=-F'(x).$$

d) $H(x)=F(x)+G(x)$, $H'(x)=F'(x)-F'(x)=0$, $\therefore H(x)=k$, con k constante.

$$H(0)=F(0)+G(0)=\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{4},\ \ \therefore H(x)=\frac{\pi}{4}\ ,\ \forall x\geq 0\,.$$

e) $$\lim_{x\to+\infty} H(x)=\lim_{x\to+\infty} F(x)+\underbrace{\lim_{x\to+\infty} G(x)}_{0}=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2=\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. $\phi(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx$, $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$.

a)

i) $\phi(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (problema anterior), hay convergencia puntual.

ii) $f(\alpha,x)=e^{-x^2}\cos(\alpha x)$ y $f_\alpha(\alpha,x)=-xe^{-x^2}\sin(\alpha x)$ son funciones continuas $\forall(\alpha,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+$.

iii) Como $\left|f_\alpha(\alpha,x)\right|\leq x\,e^{-x^2}$, $\forall(\alpha,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+$ y $\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}dx=\dfrac{1}{2}$ entonces

$\int_0^{+\infty} f_\alpha\ (\alpha,x)\ dx$ converge uniformemente con respecto a α en $\mathbb{R}$.

Por i), ii) y iii), según regla de Leibniz, se tiene que ϕ es derivable $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$.

b) $$\phi'(\alpha)=-\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\sin(\alpha x)dx=\frac{1}{2}\left\{\lim_{a\to+\infty}\left[e^{-x^2}\sin(\alpha x)\right]\Big|_0^a-\alpha\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\cos(\alpha x)dx\right\}$$

$$u=\sin(\alpha\,x),\ u'=\alpha\cos(\alpha x)\,;\ v'=-x\,e^{-x^2}\ ,\ v=\frac{e^{-x^2}}{2}$$

$$\phi'(\alpha)=-\frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha\,x)dx=-\frac{\alpha}{2}\phi(\alpha)$$

c) $\phi'(\alpha) = -\frac{\alpha}{2}\phi(\alpha)$, $\int \frac{d\phi}{\phi} = -\int \frac{\alpha}{2} d\alpha$, $\ln|\phi| = -\frac{\alpha^2}{4} + C$, de aquí se tiene $\phi(\alpha) = Ke^{-\frac{\alpha^2}{4}}$,

donde $K = e^C$. De la condición inicial, $\phi(0) = K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; luego, $\phi(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$.

5.

a)

i) $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$; como $\left| \frac{e^{-t}}{1+t^2} \right| \le e^{-t}$ y $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ entonces $F(1)$ converge.

ii) $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ y $f_x(x,t) = -\frac{t\,e^{-xt}}{1+t^2}$ son funciones continuas $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

iii) Si $x \in [a,b] \subseteq]0,+\infty[$ se tiene que $e^{-xt} \le e^{-at}$, luego $|f_x(x,t)| \le t\,e^{-at}$ y como $\int_0^{+\infty} t\,e^{-at} dt$ converge, $\int_0^{+\infty} f_x\ (x,t)\ dt$ converge uniformemente con respecto a x.

De i), ii) y iii), se tiene que F es derivable $\forall x \in \mathbb{R}^+$ y $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt$.

iv) $F'(1) = -\int_0^{\infty} \frac{t\,e^{-t}}{1+t^2} dt$; como $\left| \frac{t\,e^{-t}}{1+t^2} \right| \le t\,e^{-t}$ y $\int_0^{\infty} t\,e^{-t} dt = 1$ entonces $F'(1)$ converge.

v) $f_x(x,t) = -\frac{t\,e^{-xt}}{1+t^2}$ y $f_{xx}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$ son funciones continuas $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

vi) Si x pertenece al intervalo compacto $[a,b] \subseteq]0,\infty[$ se tiene que $e^{-xt} \le e^{-at}$, luego $|f_{xx}(x,t)| \le e^{-at}$ y dad que como $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge entonces $\int_0^{+\infty} f_{xx}\ (x,t)\ dt$ también converge uniformemente con respecto a x.

b) De iv), v) y vi) se tiene que F' es derivable $\forall x \in \mathbb{R}^+$ y $F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$; luego,

$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

1. **Calcular la integral $\iint\limits_{A} (x+y)\, d(x,y)$, sabiendo que A es la región del plano acotada por el paralelógramo de vértices en $(0,1)$, $(1,0)$, $(3,4)$ y $(4,3)$.**

2. **Si D es la región interior al paralelógramo cuyos vértices son $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,4)$ y $(1,3)$, hallar $\iint\limits_{D} xy\; d(x,y)$.**

3. **Calcular el volumen acotado por $z=0$, $x+z=1$ y $x=y^2$ usando integrales triples en todos los órdenes de integración posibles.**

4. **Evaluar $\iint\limits_{S} \left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}\; d(x,y)$ donde S es el disco unitario.**

5. **Usando integrales triples determinar el volumen dentro del cilindro $x^2+y^2=9$ y *fuera* del cono de ecuación $z^2=x^2+y^2$.**

6. **Un sólido se encuentra acotado inferiormente por $z=0$ y superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y por el cono $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$, calcular el volumen de dicho sólido.**

<u>Idea de la solución</u>:

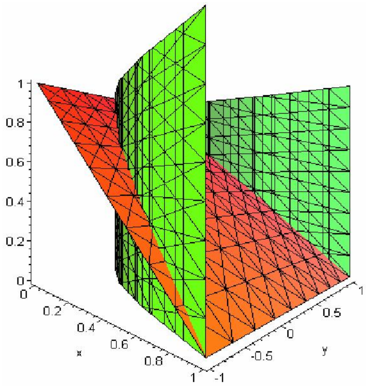
1. A está encerrada por $x-y=-1$, $x-y=1$, $x+y=1$ y $x+y=7$; al considerar $s=x-y$ y $t=x+y$, se tiene que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\dfrac{1}{2}$ y $\iint\limits_{A}(x+y)\,d(x,y)=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} ds \int_{1}^{7} t\,dt=24$.

2. $T(u,v)=T\left(u(1,0)+v(0,1)\right)=u\,T(1,0)+v\,T(0,1)=u(2,1)+v(1,3)=(2u+v,u+3v)$,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=5,\ \iint\limits_{D} xy\; d(x,y)=\int_0^1\int_0^1 5(2u+v)(u+3v)\,dv\,du=\frac{205}{12}.$$

3. Volumen $=\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_0^{1-x} 1\,dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^{1-x} 1\,dz\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1\,dy\,dz\,dx$

$$=\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1\,dy\,dx\,dz=\int_0^1\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{y^2}^{1-z} 1\,dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{1}\int_0^{1-y^2}\int_{y^2}^{1-z} 1\,dx\,dz\,dy=\frac{8}{15}.$$

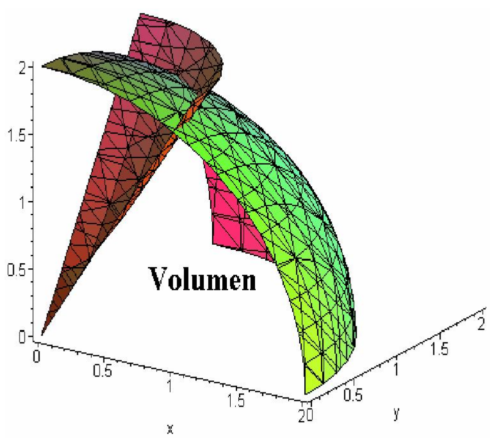


4. $\iint\limits_{S}\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}\, d(x,y)=\int_0^1\int_0^{2\pi} r\left(1+r^2\right)^{3/2} d\theta\, dr=\frac{2\pi}{5}\,\left(4\sqrt{2}-1\right).$

5. $V=8\int_0^3\int_0^{\pi/2}\int_0^r r\, dz\, d\theta\, dr=8\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{3\csc(\varphi)}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=36\pi\,.$

6. $z=0\to\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, $x^2+y^2+z^2=4\to\rho=2$, $z=\sqrt{3x^2+3y^2}\to\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

En el primer octante, se tiene



y $V=\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\rho^2\sin(\varphi)\, d\varphi\, d\theta\, d\rho=\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$.

Observación: En coordenadas cilíndricas, $V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{3}r} r\, dz\, dr\, d\theta+\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$.

1. **Calcular la integral** $\iint_R (x+y)^2 e^{x-y} d(x,y)$ **donde** R **es la región acotada por** $x+y=1$**,** $x+y=4$**,** $x-y=-1$ **y** $x-y=1$**.**

2. **Encontrar** $\iint_S (x^2+y^2)\ d(x,y)$**, donde** S **es la región del primer cuadrante limitada por las curvas** $xy=4$**,** $xy=7$**,** $x^2-y^2=2$ **y** $x^2-y^2=10$**.**

3. **Mediante un cambio en el orden de integración evaluar** $\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dy\, dx$ **y** $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^{y} e^{x^2} dx\, dy$**.**

4. **Hallar el volumen encerrado por** $x^2+y^2+z^2=16$ **y** $(x-2)^2+y^2=4$**.**

5. **Calcular el volumen del sólido acotado superiormente por la esfera** $x^2+y^2+z^2=4z$ **e inferiormente por el cono de ecuación** $z=\sqrt{x^2+y^2}$ **.**

6. **Evaluar la integral** $\iint_R \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} d(x,y)$**, donde la región** R **está determinada por las condiciones** $x^2+y^2\le 1$ **y** $x+y\ge 1$**.**

7. **Sea** R **la región sólida encerrada por la esfera con centro en el origen y radio** 2 **y sobre el cono** $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ **. Expresar la integral triple** $I=\iiint_R z^2 d(x,y,z)$**, como integrales iteradas, usando coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.**

8. **Usar integrales triples y un cambio de variables adecuado para calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la esfera de ecuación** $x^2+y^2+z^2=4$ **e inferiormente por la hoja superior del cono de ecuación** $3z^2=x^2+y^2$**.**

9. **Un sólido está acotado inferiormente por el plano** $z=1$**, lateralmente por el cono** $z^2=x^2+y^2$ **y superiormente por la esfera** $x^2+y^2+z^2=18$**. ¿Cuál es el volumen del sólido?**

<u>Idea de la solución</u>:

1. $-1\le s=x-y\le 1$; $1\le t=x+y\le 4$; $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right)^{-1}=\dfrac{1}{2}$

$$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y} d(x,y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{1}^{4} t^2 e^s dt\, ds=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^s ds\int_1^4 t^2 dt=\frac{21}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

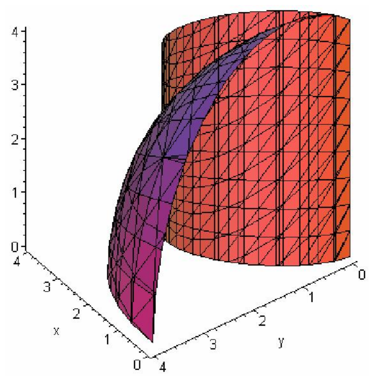
2. Considerando $4 \le u = x^2 - y^2 \le 7$ y $2 \le v = xy \le 10$, se tiene que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)} \text{ y } \left(x^2+y^2\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}\text{; de donde,}$$

$$\iint_S \left(x^2+y^2\right) d(x,y) = \frac{1}{2}\int_4^7\int_2^{10} 1\,dv\,du = \frac{1}{2}\int_4^7 1\,du \int_2^{10} 1\,dv = 12\,.$$

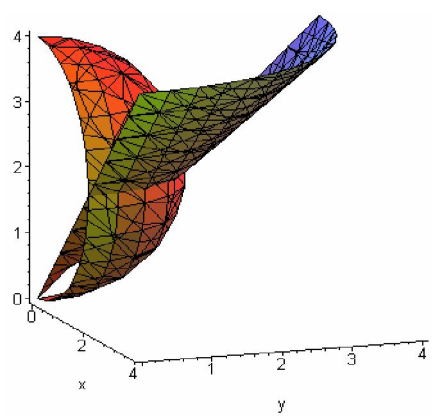
3. $$\int_0^4\int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2}dy\,dx = \int_0^2\int_0^{2y} e^{y^2}dx dy = e^4-1\,,\ \int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^{y} e^{x^2}dx\,dy = -\int_0^1\int_y^{\sqrt[3]{y}} e^{x^2}dx\,dy = -\int_0^1\int_{x^3}^{x} e^{x^2}dy\,dx = 1-\frac{e}{2}.$$

4.



Cilíndricas, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$; Volumen $= 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos(\theta)}\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{128\pi}{9}(3\pi-4)$.

5.

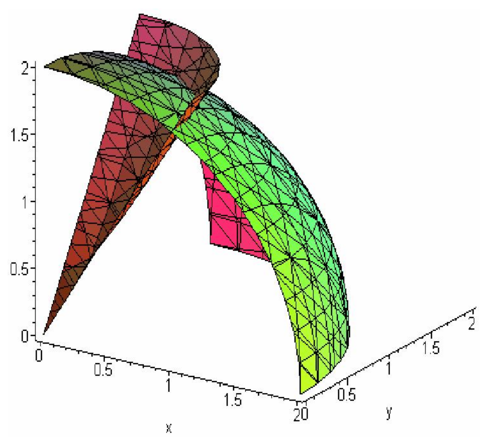


Cilíndricas, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$; $V_{Barquillo} = 4\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_r^{\sqrt{4-r^2}+2} r\,dz\,dr\,d\theta = 8\pi$.

Esféricas, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2 \sin(\varphi)$, $V_{Barquillo} = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{4\cos(\varphi)} \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho d\varphi d\theta = 8\pi$.

6. Polares, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$, $\displaystyle\iint_R \frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\, d(x,y) = \int_0^{\pi/2}\int_{1/(\cos(\theta)+\sin(\theta))}^{1} \frac{r}{\left(1+r^2\right)^2} dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

7. Gráficos de las superficies en el primer octante:



La proyección del volumen en el plano xy es un círculo de centro en el origen y radio 1.

$$I = \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 dz\ dy\ dx}_{\text{rectangulares}} = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} r\ z^2 dz\ dr\ d\theta}_{\text{cilíndricas}} = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2} \rho^4 \sin(\varphi)\ \cos^2(\varphi) d\rho\ d\phi\ d\theta}_{\text{esféricas}}.$$

8. Al reemplazar $3z^2 = x^2+y^2$ en $x^2+y^2+z^2=4$, se tiene que $z^2=1$, de donde $z=\pm 1$.

Como la región está sobre la hoja superior del cono, la curva de intersección que está sobre el plano xy corresponde a la circunferencia de intersección entre el cilindro $x^2+y^2=3$ y el plano $z=1$; luego, la proyección del volumen sobre el plano $z=0$ es $x^2+y^2 \le 3$.

- Al considerar el cambio a coordenadas cilíndricas $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y $z = z$; se tiene

Que la ecuación de la esfera es $r^2+z^2=4$ y la del cono por $z = \pm\dfrac{r}{\sqrt{3}}$. La integral triple que calcula el volumen es $V_{Barquillo} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{r/\sqrt{3}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \dfrac{8\pi}{3}$.

- Al utilizar coordenadas esféricas $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$ y $z = \rho\cos(\varphi)$ se tiene que la ecuación de la esfera está dada por $\rho = 2$ y la del cono por $\phi = \dfrac{\pi}{3}$. La integral triple que calcula el volumen es $V_{Barquillo} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\pi/3} \rho^2\sin(\varphi)\,d\varphi\,d\rho\,d\theta = \dfrac{8\pi}{3}$.

9. Utilizando coordenadas cilíndricas, se tiene que

$$V_{Mankeke} = V_{Barquillo} - V_{Cono\ peque\tilde{n}o} = \int_0^{2\pi}\int_0^{3/\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{9-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\left(57-23\sqrt{2}\right)\pi}{3}.$$

Observaciones:

i) Lo anterior, en coordenadas esféricas, queda escrito como

$$V_{Mankeke} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{3} \rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta - \frac{\pi}{3}.$$

ii) En coordenadas esféricas, sin restar el volumen (conocido) del cono pequeño, se tiene

$$V_{Mankeke} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_{\sec(\varphi)}^{3} \rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

iii) En coordenadas cilíndricas, sin restar el volumen (conocido) del cono pequeño, se tiene

$$V_{Mankeke} = V_{Mankeke\ perforado} + V_{buz\acute{o}n\ cil\acute{i}ndrico}$$

$$V_{Mankeke} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_1^{\sqrt{9-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_1^{3/\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{9-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta.$$

1. **Calcular el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ interior a $x^2+y^2+z^2=1$ y a $x^2+y^2=y$.**

2. **Determinar el valor de $\iiint\limits_S \sqrt{z}\, d(x,y,z)$, donde S es el sólido en el primer octante limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ y los planos $x=\sqrt{3}y$ y $x=y$.**

3. **Calcular el volumen acotado por las superficies $z=\sqrt{x},\ z=x^2,\ y=0$ y $x-y+z=0$.**

4. **Sea D la región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano de ecuación $x+y=4$ y el cilindro $y^2+4z^2=16$. Escribir las integrales que calculan el volumen de D considerando los órdenes de integración $dz\,dy\,dx$ y $dy\,dx\,dz$.**

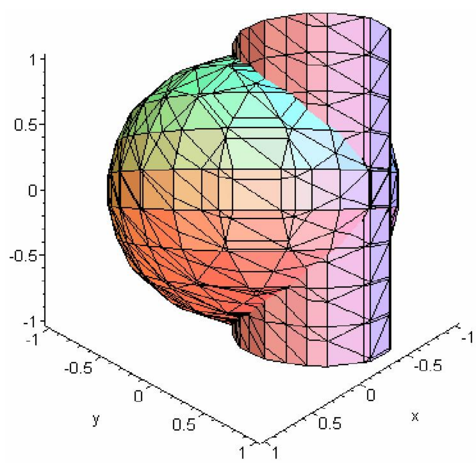
5. **Sea D la región del espacio interior $x^2+y^2=2y$, fuera del cilindro $x^2+y^2=y$, sobre el plano xy y bajo el plano $z=3-y$; calcular su volumen.**

6. **Evaluar $\iint\limits_D \cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)d(x,y)$, donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$.**

7. **Si $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 2-x\}$, encontrar $\iint\limits_S e^{\frac{y-x}{y+x}}d(x,y)$.**

<u>Idea de la solución</u>:

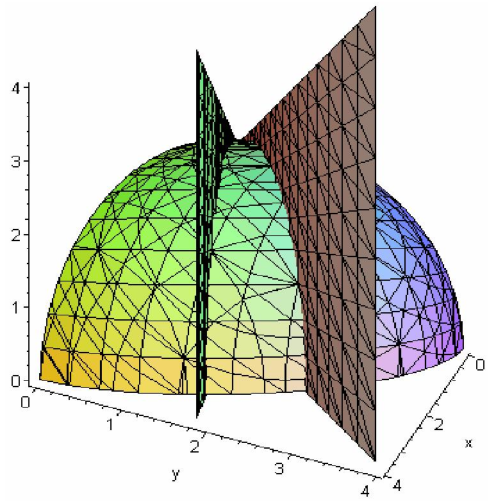
1.



La proyección en el plano xy corresponde al círculo $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\le\dfrac{1}{4}$, este en coordenadas cilíndricas se describe $r\le\sin(\theta)$ y como él está en el semiplano superior tiene que $0\le\theta\le\pi$.

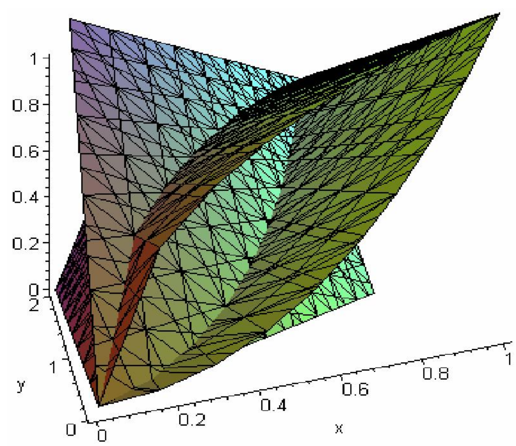
$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{\sin(\theta)}\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\ dz\ dr\ d\theta=\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}.$$

2. Esféricas, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=-\rho^2\sin(\varphi)$;



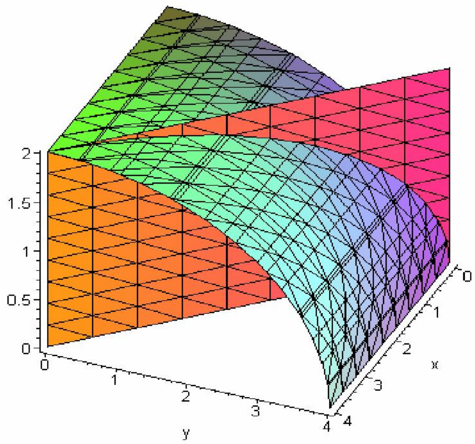
$$\iiint_D \sqrt{z}\ d(x,y,z)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 \sqrt{\rho\cos(\varphi)}\ \rho^2\sin(\varphi)\,d\rho d\varphi d\theta=\frac{128}{63}\pi\ .$$

3.



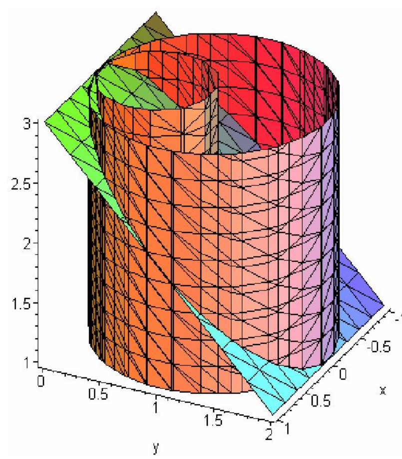
$$V=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\int_0^{x+z} 1\ dy\,dz\,dx=\frac{3}{10}.$$

4.



$$V=\int_{0}^{4}\int_{0}^{4-x}\int_{0}^{\frac{\sqrt{16-y^2}}{2}} 1\,dz\,dy\,dx=\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-\sqrt{16-4z^2}}\int_{0}^{\sqrt{16-4z^2}} 1\,dy\,dx\,dz+\int_{0}^{2}\int_{4-\sqrt{16-4z^2}}^{4}\int_{0}^{4-x} 1\,dy\,dx\,dz\ .$$

5.

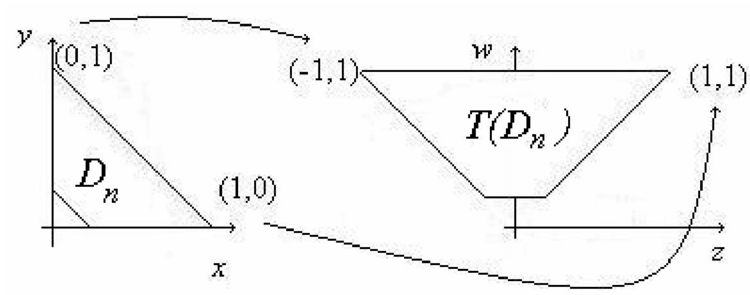


$$V=\int_{0}^{\pi}\int_{\sin\theta}^{2\sin\theta}\int_{0}^{3-r\sin\theta} r\,dz\,dr\,d\theta=\frac{11}{8}\pi\ .$$

6. Sea $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$; f no cambia de signo en D y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe. Sea

$$D_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{n}\le x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\},\ n\ge 1, \text{ se tiene que } D_n\subseteq D_{n+1} \text{ y } \bigcup_{n=1}^{+\infty}\overset{\circ}{D}_n=\overset{\circ}{D}.$$

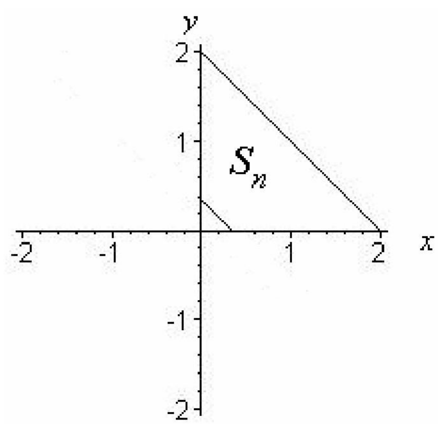
Para integrar sobre D_n se considera el cambio $T(x,y)=(x-y,x+y)=(z,w)$.

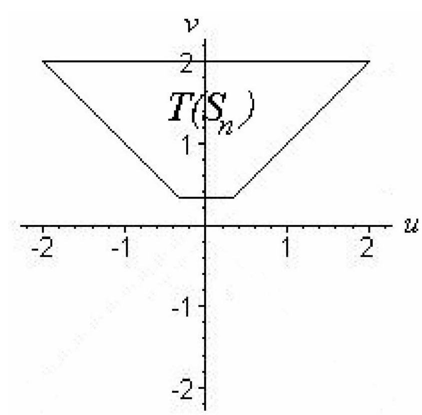


$$\iint_{D_n} f(x,y)\,d(x,y)=\frac{1}{2}\iint_{T(D_n)} f(z,w)\,d(z,w)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\int_{-w}^{w}\cos\left(\frac{z}{w}\right)dz\,dw=\frac{\sin 1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\iint_{D} f(x,y)\,d(x,y)=\lim_{n\to+\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,d(x,y)=\frac{\sin 1}{2}.$$

7. Si $f(x,y)=e^{\frac{y-x}{y+x}}$, se tiene que f no cambia de signo en S y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe. Al considerar $S_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{n}\le x+y\le 2-x, x\ge 0, y\ge 0\right\}$, con $n\ge 1$, se tiene que $S_n\subseteq S_{n+1}$ y $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}\overset{\circ}{S}_i=\overset{\circ}{S}$. Para integrar, se considera $T(x,y)=(y-x,y+x)=(u,v)$.





$$\iint_{S_n} f(x,y)\,d(x,y)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{2}\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv=\left(e-\frac{1}{e}\right)\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=I_n,$$

$$\iint_{S} f(x,y)\,d(x,y)=\lim_{n\to+\infty} I_n=e-\frac{1}{e}.$$

1. **Evaluar** $\iint\limits_S \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2(x^2+y^2)^{1/2}}\,d(x,y)$**, si** $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 1,\ y\geq 0\}$**.**

2. **Sea** $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\geq 1\}$**. Calcular** $\iiint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,d(x,y,z)$**.**

3. **Hallar** $\iint\limits_S \ln(x^2+y^2)d(x,y)$**, si** $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x^2+y^2\leq 1\ \}$**.**

4. **Calcular la integral de línea** $\int\limits_C 2xy\ dx+x^2\ dy$**, cuando** C **es la curva que une el origen** $\theta=(0,0)$ **con el punto** $A=(2,1)$ **en los siguientes casos:**

a) C **es el segmento orientado que va desde** θ **hasta** A**.**

b) C **es el arco de parábola simétrico con respecto al eje** y**.**

c) C **es el arco de parábola simétrico con respecto al eje** x**.**

d) C **es la línea quebrada** θBA**, siendo** $B=(2,0)$**.**

e) C **es la línea quebrada** θDA**, siendo** $D=(0,1)$**.**

Idea de la Solución:

1. Sea $f(x,y)=\frac{y}{(1+x^2+y^2)^2(x^2+y^2)^{1/2}}$. La función f no cambia de signo en S.

El conjunto S no es acotado $\mathbb{R}^2$. Sea $T_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x^2+y^2\leq n^2, y\geq 0\}$ con $n\in\mathbb{N}^*$, puede verse que: $T_n\subset T_{n+1}\ \wedge\ \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\overset{\circ}{T}_n=\overset{\circ}{S}$, usando coordenadas polares,

$$\iint\limits_{T_n} f(x,y)\ d(x,y)=\int_0^{\pi}\int_1^{n}\frac{r\sin(\theta)}{(1+r^2)^2}\ dr\ d\theta=\frac{1}{2}\frac{n^2-1}{n^2+1},$$

$$\iint\limits_S f(x,y)d(x,y)=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=\frac{1}{2}.$$

2. El conjunto D es no acotado en $\mathbb{R}^3$.

Sea $T_n=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:1\le x^2+y^2+z^2\le n^2\right\}$, con $n\in\mathbb{N}^*$.

Puede verse que $T_n\subseteq T_{n+1}\ \wedge\ \bigcup_{n=1}^{+\infty}\overset{\circ}{T}_n=\overset{\circ}{S}$, usando esféricas se tiene,

$$\iint_{T_n} f(x,y,z)\ d(x,y,z)=\int_1^n\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\varphi)}{\rho^2}\ d\varphi\ d\theta\, d\rho=4\pi\left(1-\frac{1}{n}\right) \text{ y}$$

$$\iint_D f(x,y,z)d(x,y,z)=4\pi\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=4\pi .$$

3. Sea $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; S es acotado en $\mathbb{R}^2$, f es no acotada y no cambia de signo. Sea $S_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le 1\right\}$ con $n\in\mathbb{N}^*$, como $S_n\subset S_{n+1}\ \wedge\ \bigcup_{n=1}^{+\infty}\overset{\circ}{S}_n=\overset{\circ}{S}$. Usando coordenadas polares, se tiene

$$\iint_{S_n} f(x,y)d(x,y)=\int_0^{2\pi}\int_{1/n}^{1} r\ln\left(r^2\right)drd\theta=2\pi\int_{1/n}^{1} r\ln\left(r^2\right)dr=\pi\left(\frac{1}{n^2}+\frac{\ln(n^2)}{n^2}-1\right) \text{ y}$$

$$\iint_S f(x,y)d(x,y)=\pi\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{\ln(n^2)}{n^2}-1\right)=-\pi .$$

4.

a) $C:\begin{cases}x=2t\\ y=t\end{cases}$, $t\in[0,1]$, $\int_C 2xy\,dx+x^2dy=12\int_0^1 t^2\,dt=4$

b) $C:y=\frac{x^2}{4}$, $x\in[0,2]$ o $C:\begin{cases}x=t\\ y=\frac{t^2}{4}\end{cases}$, $t\in[0,2]$, $\int_C 2xy\,dx+x^2dy=\int_0^2 t^3dt=4$

c) $C:x=2y^2$, $x\in[0,1]$ o $C:\begin{cases}x=2t^2\\ y=t\end{cases}$, $t\in[0,1]$, $\int_C 2xy\,dx+x^2dy=20\int_0^1 t^4dt=4$

d) $C=C_1\cup C_2$, donde $C_1:\begin{cases}x=t\\ y=0\end{cases}$, $t\in[0,2]$ y $C_2:\begin{cases}x=2\\ y=t\end{cases}$, $t\in[0,1]$

$$\int_C 2xy\ dx+x^2\ dy=\int_0^2 0\ dt+\int_0^1 4\ dt=4$$

e) $C=C_1\cup C_2$, donde $C_1:\begin{cases}x=0\\ y=t\end{cases}$, $t\in[0,1]$ y $C_2:\begin{cases}x=t\\ y=1\end{cases}$, $t\in[0,2]$

$$\int_C 2xy\ dx+x^2\ dy=\int_0^1 0\ dt+\int_0^2 2t\ dt=4 .$$

1. **Integrar** $f(x,y,z)=xyz$ **a lo largo de las siguientes trayectorias:**

a) $C(t)=\left(e^t\cos(t),e^t\sin(t),3\right)$, $t\in[0,2\pi]$,

b) $C(t)=\left(\cos(t),\sin(t),t\right)$, $t\in[0,2\pi]$,

c) $C(t)=\left(\frac{3}{2}t^2,2t^2,t\right)$, $t\in[0,1]$.

2. **El cilindro** $x^2+y^2=2x$ **encierra una porción de superficie** S **sobre la hoja superior del cono cuya ecuación está dada por** $z^2=x^2+y^2$. **Evaluar la integral** $\iint_S\left(x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1\right)dS$.

3. **Evaluar la integral** $\iint_S\left(x^2+2yz\right)dS$, **si** S **es la parte del plano** $2x+y+2z=6$ **que se encuentra en el primer octante.**

4. **Calcular** $\iint_S\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS$, **sabiendo que** S **es la parte del paraboloide circular** $z=8-x^2-y^2$ **acotada por el paraboloide elíptico** $z=x^2+3y^2$.

5. **Mostrar que la integral** $\int_C 2x\sin(y)\,dx+\left(x^2\cos(y)-3y^2\right)dy$ **es independiente de la trayectoria. Evaluar la integral sobre alguna línea orientada desde** $A=(-1,0)$ **hasta** $B=(5,1)$, **directamente parametrizando esa línea, para luego usar una función potencial y comprobar el resultado obtenido.**

6. **Calcular** $\oint_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, **si** C **es la intersección de las superficies** $x^2+y^2=a^2$ **y** $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$, **con** a **y** h **positivos.**

7. **Sean** $F(x,y,z)=\left(\frac{2xz}{x^2+y^2}+y+1\right)\hat{i}+\left(\frac{2yz}{x^2+y^2}+x+2\right)\hat{j}+\left(\ln\left(x^2+y^2\right)+3\right)\hat{k}$ **y** C **la curva de intersección entre el plano** $z=y$ **con la porción del cilindro** $x^2+y^2=1$ **donde** $0\le z\le 1$, **calcular** $\int_C F\cdot dr$.

Idea de la Solución:

1.

a) $C'(t)=\left(e^t\cos(t)-e^t\sin(t),e^t\sin(t)+e^t\cos(t),0\right)$, $t\in[0,2\pi]$

$\|C'(t)\|=\sqrt{2}e^t$, $\int_C f\,dr=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}3e^{3t}\sin(t)\cos(t)\,dt=\frac{3\sqrt{2}}{13}\left(1-e^{6\pi}\right)$;

b) $C'(t)=\left(-\sin(t),\cos(t),1\right)$, $t\in[0,2\pi]$

$\|C'(t)\|=\sqrt{2}$, $\int_C f\,dr=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}t\sin(t)\cos(t)\,dt=-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$;

c) $C'(t)=(3t,4t,1)$, $t\in[0,1]$, $\|C'(t)\|=\sqrt{25t^2+1}$

$\int_C f\,dr=3\int_0^1 t^5\sqrt{25t^2+1}\,dt=\frac{235158\sqrt{26}-8}{546875}$

2. $f(x,y,z)=x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1$, $\Phi(x,y)=\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\le 2x\right\}$, $\|\vec{n}\|=\sqrt{2}$, $f(\Phi(x,y))=1$

$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\sqrt{2}\iint_D 1\,d(x,y)=\sqrt{2}$ Área $(D)=\sqrt{2}\pi$

3. $f(x,y,z)=x^2+2yz$, $\Phi(x,y)=\left(x,y,3-x-\frac{y}{2}\right)$, $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 3,\ 0\le y\le 6-2x\right\}$,

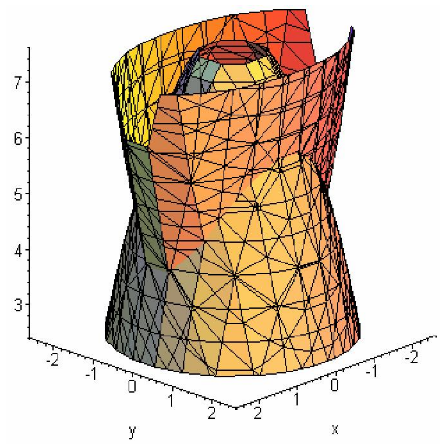
$\|\vec{n}\|=\frac{3}{2}$, $f\left(\Phi(x,y)\right)=x^2+y(6-2x-y)$;

$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D \frac{3}{2}\left[x^2+y(6-2x-y)\right]\,d(x,y)=\frac{243}{4}$

4. La proyección de S sobre el plano xy es $D\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\le 1\right\}$.

Si $\Phi(x,y)=\left(x,y,8-x^2-y^2\right)$, se tiene que $\|\vec{n}(x,y)\|=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$. Luego,

$\iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dA = \iint_D \left(1+4x^2+4y^2\right)d(x,y)$, para evaluar la integral doble se considera el cambio $x = 2r\cos(\theta)$ e $y = \sqrt{2}r\sin(\theta)$, de donde $\iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dA = 14\sqrt{2}\pi$.



5. Sea el campo vectorial $F(x,y) = (p(x,y), q(x,y)) = \left(2x\sin(y), x^2\cos(y) - 3y^2\right)$, como $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ F es conservativo y la integral de línea dada es independiente de la trayectoria. Sea $C = C_1 \cup C_2$ donde $C_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}, t \in [-1,5]$ y $C_2 : \begin{cases} x(t) = 5 \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [0,1]$;

$\int_C F \cdot dr = \int_{-1}^{5} 0\,dt + \int_0^1 \left(25\cos(t) - 3t^2\right)\,dt = 25\sin(1) - 1$. Como $F = \nabla f$, se tiene

$f_x(x,y) = 2x\sin(y)$

$f(x,y) = x^2\sin(y) + g(y)$

$f_y(x,y) = x^2\cos(y) + g'(y) = x^2\cos(y) - 3y^2$

$g(y) = -y^3 + k$, $k \in \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2\sin(y) - y^3 + k$;

$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A) = 25\sin(1) - 1$.

6. Si la curva está en sentido antihorario vista desde la parte superior del eje z, se

tiene que una parametrización es $C:\begin{cases} x(t)=a\cos(t) \\ y(t)=a\sin(t) \\ z(t)=h\ (1-\cos(t)) \end{cases}$, donde $t\in[0,2\pi]$,

$$\int_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz=-2\pi\left(a^2+ah\right).$$

Otra solución: Sea $F(x,y,z)=(y-z,z-x,x-z)$ y sea S la porción del plano acotada por el cilindro $x^2+y^2=a^2$; S se puede parametrizar por como $\phi(x,y)=\left(x,y,h\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\right)$, donde el dominio es el conjunto $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le a^2\right\}$ y el vector normal a S es $\vec{n}=\left(\dfrac{h}{a},0,1\right)$. Considerando la curva en sentido antihorario vista desde la parte superior del eje z, por Teorema de Stokes, se tiene

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\,dS=\iint_D(-2,-2,-2)\cdot\left(\frac{h}{a},0,1\right)\,d(x,y)=-2\pi\left(ah+a^2\right).$$

7. Considerando la curva orientada desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(-1,0,0)$ y teniendo en cuenta que un potencial $f(x,y,z)=z\ln\left(x^2+y^2\right)+xy+x+2y+3z$, se tiene que el valor de la integral de línea es

$$\int_\gamma F\cdot dr=\int_\gamma \nabla f\cdot dr=f(-1,0,0)-f(1,0,0)=-2.$$

Observación: Para calcular la integral de línea por definición, se puede considerar la parametrización $C(t)=(\cos(t),\sin(t),\sin(t))$, con $t\in[0,\pi]$.

1. **Dadas** $p(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y$ **y** $q(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x$**. Calcular** $\oint_C pdx+qdy$**, donde** C **es la elipse** $9x^2+4y^2=36$ **recorrida en sentido positivo.**

2. **Sea** $F=F_1+F_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$**, con** F_1 **y** F_2 **definidos por** $F_1(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ **y** $F_2(x,y)=\left(\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2},\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right)$**. Evaluar la integral de línea** $\oint_C F\cdot dr$**, donde** C **es la elipse** $x^2+4y^2=4$ **recorrida en sentido antihorario.**

3. **Sea** F **el campo vectorial** $F(x,y,z)=\left(yz,-xz,yz^2\right)$ **y la superficie** $S=S_1\cup S_2$ **con** $S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:z=2-x^2-y^2\geq 0\right\}$ **y** $S_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=2,\ 0\leq z\leq 8\right\}$**. Hallar el valor de** $\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\,dS$**, donde** $\hat{n}$ **es la normal exterior a** S**.**

a) **Directamente, parametrizando la superficie** S**.**

b) **Usando el Teorema de Gauss y el Teorema de Stokes.**

4. **Calcular** $\oint_C F\cdot dr$**, con** $F(x,y,z)=(2y,z,3y)$ **y** C **es la intersección de entre la esfera** $x^2+y^2+z^2=6z$ **y plano** $z=x+3$**, orientada en sentido antihorario vista desde el origen, directamente, parametrizando** C **y luego, usando el Teorema de Stokes.**

5. **Considerar las funciones** p **y** q **del problema 1. Determinar el valor de la integral de línea** $\int_C p\,dx+q\,dy$**, sabiendo que** C **es el arco de la elipse cuya ecuación está dada por** $4x^2+9y^2=36$ **en el primer cuadrante que une** $(3,0)$ **con** $(0,2)$**.**

6. **Utilizar el Teorema de Gauss para evaluar** $\iint_S F\cdot\hat{n}\,dA$**, donde** $F(x,y,z)=(y,2x,3z)$ **y** $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2-2z=0,\ z\leq 2\right\}$**.**

7. **Considerar** $I=\oint_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$**, donde** C **es la intersección entre las superficies** $x^2=4z+4$ **e** $y^2=-4z+4$**, recorrida de modo que su proyección en el plano** $z=0$**, está orientada en sentido antihorario. Transformarla en una integral de superficie para calcular su valor.**

Idea de la solución:

1. Sean la función vectorial $F(x,y)=(p(x,y),q(x,y))$, la curva $C_1:\begin{cases} x=\varepsilon\cos(t)\\ y=\varepsilon\sin(t)\end{cases}$, donde $0<\varepsilon<2$ y $t\in[0,2\pi]$, y D la región encerrada por la curva C que no está encerrada por C_1. Por el Teorema de Green (segunda versión), se tiene que

$$\oint_C F\cdot dr-\oint_{C_1} F\cdot dr=\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right)d(x,y)=-Área(D)=\pi\left(\varepsilon^2-6\right).$$

Al calcular directamente la integral sobre C_1, se tiene $\oint_{C_1} F\cdot dr=-\pi\varepsilon^2$; luego, $\oint_C F\cdot dr=-6\pi$.

2. Sean $C_1:\begin{cases} x=\varepsilon\cos(t)\\ y=\varepsilon\sin(t)\end{cases}$ y $C_2:\begin{cases} x=\delta\cos(t)+1\\ y=\delta\sin(t)\end{cases}$, con $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $0<\delta<\frac{1}{2}$ y $t\in[0,2\pi]$.

Sean $p=p_1+p_2$ y $q=q_1+q_2$, donde $p_1(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $q_1(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $p_2(x,y)=-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$ y $q_2(x,y)=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$. Si D es la región del plano que es exterior a C_1 y C_2 e interior a C, entonces por el Teorema de Green (segunda versión),

$$\oint_C F\cdot dr-\oint_{C_1} F\cdot dr-\oint_{C_2} F\cdot dr=\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right)d(x,y)=0,\text{ pues }\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

Además, $\oint_C F\cdot dr=\oint_{C_1} p_1dx+q_1dy+\oint_{C_1} p_2dx+q_2dy+\oint_{C_2} p_1dx+q_1dy+\oint_{C_2} p_2dx+q_2dy$;

en el lado derecho de la última igualdad, la segunda y la tercera integral valen cero (Green, primera versión), la primera y la última valen (directas) 2π. Luego, $\oint_C F\cdot dr=4\pi$.

3. $\nabla\times F(x,y,z)=\left(z^2+x,y,-2z\right)$

a) $\Phi_1(x,y)=\left(x,y,2-x^2-y^2\right)$, $D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 2\right\}$,

$$\vec{n}_1(x,y)=\Phi_{1y}(x,y)\times\Phi_{1x}(x,y)=-(2x,2y,1)$$

$$\iint_{S_1}\nabla\times F\cdot\hat{n}\,dS=\iint_{D_1}\left[-2\left(2-x^2-y^2\right)^2x-4\left(1-x^2-y^2\right)\right]d(x,y)$$

$$\iint_{S_1} \nabla\times F\cdot\hat{n}\; dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left[-2\left(2-r^2\right)^2 r^2\cos\theta + 4\left(1-r^2\right)\, r\right]drd\theta$$

$$\iint_{S_1} \nabla\times F\cdot\hat{n}\; dS = 0;$$

$$\Phi_2(\theta,z)=\left(\sqrt{2}\cos(\theta),\sqrt{2}\sin(\theta),z\right),\; D_2=\left\{(\theta,z)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\theta\le 2\pi,\; 0\le z\le 8\right\}$$

$$\vec{n}_2(\theta,z)=\Phi_{2\theta}(\theta,z)\times\Phi_{2z}(\theta,z)=\left(\sqrt{2}\cos(\theta),\sqrt{2}\sin(\theta),0\right),\; \iint_{S_2}\nabla\times F\cdot\hat{n}\; dS = 32\pi .$$

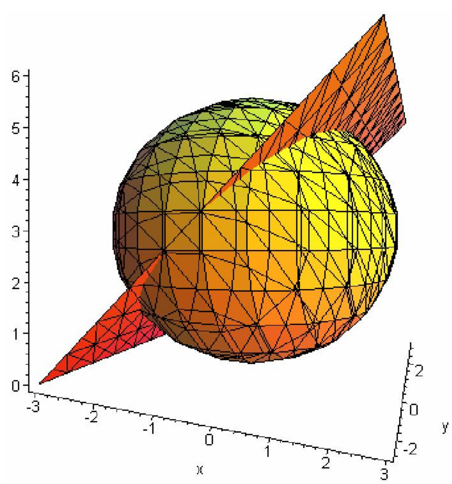
$$\iint_{S} \nabla\times F\cdot\hat{n}\; dS = \iint_{S_1} \nabla\times F\cdot\hat{n}\; dS + \iint_{S_2} \nabla\times F\cdot\hat{n}\; dS = 32\pi .$$

b) Sean $S_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 2,\; z=8\right\}$, la superficie orientada con vector normal apuntando hacia arriba y $S_T = S\cup S_3$ tal que $\partial V = S_T$. Por Teorema de Gauss, se tiene que $\oiint_{S_T}\nabla\times F\cdot\hat{n}\; dS = \iiint_V \nabla\cdot\left(\nabla\times F\right) d(x,y,z)=0$. Luego, $\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\, dS = -\iint_{S_3}\nabla\times F\cdot\hat{n}\, dS$.

Por Stokes, $\iint_{S_3}\nabla\times F\cdot\hat{n}\, dS = \oint_C F\cdot dr$. $C=\partial S_3$ tiene sentido antihorario y parametrización $C(t)=\left(\sqrt{2}\cos(t),\sqrt{2}\sin(t),8\right)$, $t\in[0,2\pi]$; luego, $\oint_C F\cdot dr = -32\pi$ y $\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\; dS = 32\pi$.

Observación: En b) puede usarse solamente el Teorema de Stokes, pues $\partial S = -\partial S_3 = -C$.

4. $F(x,y,z)=(2y,z,3y)$



- $\dfrac{x^2}{\left(3/\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ corresponde a la proyección de C en el plano $z=0$. Una parametrización es $-C(t)=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\cos(t),3\sin(t),\frac{3}{\sqrt{2}}\cos(t)+3\right)$, $t\in[0,2\pi]$; luego,

$$\oint_C F\cdot dr=\int_0^{2\pi}\left(6\sin(t),\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t+3,9\sin(t)\right)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\sin(t),-\cos(t),\frac{3}{\sqrt{2}}\sin(t)\right)dt=\frac{36}{\sqrt{2}}\pi .$$

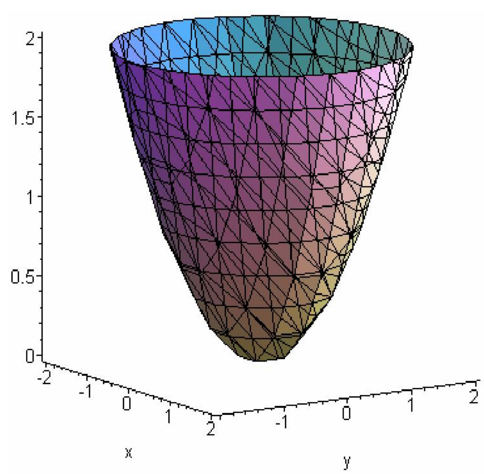
- Sea S la porción del plano $z=x+3$ encerrada por C, aquí $\vec{n}=(1,0,-1)$. La proyección de S sobre $z=0$ es $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{\left(3/\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^2}{3^2}\leq 1\right\}$, luego por Stokes, se tiene

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\,dS=\iint_D 4\,d(x,y)=4\,\acute{A}rea(D)=\frac{36}{\sqrt{2}}\pi .$$

5. Sea el campo vectorial $G(x,y)=(0,x)$, al definir la función $H=F+G$ se tiene que un potencial para ella es la función escalar h definida por $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+2xy$. Si el arco C está orientado de $(3,0)$ a $(0,2)$, se tiene $\int_C H\cdot dr=f(0,2)-f(3,0)=-1$; por otra parte si $C(t)=(3\cos(t),2\sin(t))$, con $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, se tiene

$$\int_C G\cdot dr=\int_0^{\pi/2}(0,3\cos(t))\cdot(-3\sin(t),2\cos(t))\,dt=\frac{3}{2}\pi\text{ ; por lo tanto, }\int_C F\cdot dr=-1-\frac{3}{2}\pi .$$

6.



Sean $S_0=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2\leq 4,\ \ z=2\right\}$ y $S_1=S\cup S_0$ orientada exteriormente. Si $\partial V=S_1$, por Gauss, se tiene que

$$\iint_{S_1} F\cdot\hat{n}\,dA=\iiint_V \nabla\cdot F(x,y,z)\,d(x,y,z)=3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r\;dz\;dr\;d\theta=12\pi\,.$$

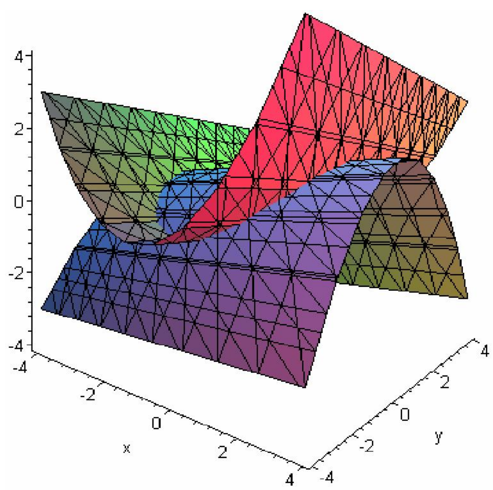
S_0 tiene parametrización $\phi_0(x,y)=x\hat{i}+y\hat{j}+2\hat{k}$, con vector normal $\hat{k}$ y dominio

$D_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$, luego

$\iint_{S_0} F\cdot\hat{n}\,dA=\iint_D (y,2x,6)\cdot\hat{k}\,d(x,y)=6\acute{A}rea\;(D)=24\pi$ y por tanto $\iint_S F\cdot\hat{n}\,dA=-12\pi$.

7. $F(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$. La proyección de C en el plano $z=0$ es $x^2+y^2=8$. Sea S la porción del cilindro parabólico $z=\dfrac{4-x^2}{4}$ encerrada por la curva C, el vector normal a S es $\vec{n}=\left(\dfrac{x}{2},0,1\right)$. La región $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 8\}$ es el dominio de la parametrización de la superficie S. Por Stokes, se tiene

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\,dS=\iint_D (-2,-2,-2)\cdot\left(\frac{x}{2},0,1\right)d(x,y)=-8\pi\,.$$



Observación: Para la ecuación de la superficie S puede considerarse también la del otro cilindro parabólico o la del paraboloide hiperbólico dado por $z=\dfrac{x^2-y^2}{8}$.

1. **Hallar** $\oint_C \left(e^x + 3x^2y^2\right)dx + \left(x + 2x^3y\right)dy$**, donde** γ **es la curva simple y cerrada cuya traza es el cuadrilátero de vértices** $A = (1,1)$**,** $B = (3,0)$**,** $C = (2,2)$ **y** $D = (0,3)$**.**

2. **Calcular** $\oiint_S F \cdot \hat{n}\, dS$**, para** $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ **y** S **es la superficie del tetratedro limitado por los planos** $x = 0$**,** $y = 0$**,** $z = 0$ **y el plano** $x + y + z = a$**, con** $a > 0$**.**

3. **Encontrar** $\oint_\gamma \left(x^2 - yz\right)dx + \left(y^2 - xz\right)dy + \left(z^2 - xy\right)dz$**, donde** γ **es la curva cuya traza es la intersección de** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ **y** $x + y + z = 0$**.**

4. **Un campo escalar** Ψ **de clase** C^2 **es tal que** $\|\nabla\Psi\|^2 = 4\Psi$ **y** $\nabla \cdot (\Psi(\nabla\Psi)) = 10\Psi$**. Calcular** $\oiint_S \frac{\partial\Psi}{\partial\hat{n}} dS$**, donde** S **es una esfera unitaria y** $\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{n}}$ **es la derivada direccional de** Ψ **en la dirección del vector unitario normal exterior a** S**.**

5. **Hallar** $\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\; dS$ **con** $F(x,y,z) = (y - z, yz, -xz)$**, si** S **corresponde a las caras del cubo** $[0,2]\times[0,2]\times[0,2]$ **que no están en el plano** xy **y** $\hat{n}$ **es la normal exterior.**

6. **Sea** S **la superficie del cubo** V **de centro en** $(0,0,0)$ **con aristas paralelas a los ejes coordenados y longitud** 2**, orientada exteriormente. Dadas** $u(x,y,z) = \cos(\pi x) + 9z^2$ **y** $v(x,y,z) = 3x + y^2$**, calcular** $\oiint_S u \frac{\partial v}{\partial\hat{n}} dS$ **si es la normal exterior a** S**.**

7. **Sea** $F(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{j} + z\hat{k}$**, usar el Teorema de Stokes para calcular el trabajo a lo largo de** $C(t) = 2\cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j} + (3 + \sin(t))\hat{k}$**, donde** $t \in [0,2\pi]$**.**

8. **Determinar el flujo de** $F(x,y,z) = (x, -2y, 3z)$ **a través de la frontera de la región acotada por** $x = y^2$ **y** $z^2 = 4 - x$ **orientada exteriormente.**

9. **Determinar el valor de** $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$**, si** C **es la intersección de las superficies** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ **y** $x + y + z = 0$**, recorrida en sentido antihorario.**

10. **Sea** $F(x,y,z)=\dfrac{x\hat{\imath}\ +y\hat{\jmath}\ +z\hat{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$**, con** $(x,y,z)\neq(0,0,0)$**.**

a) **Calcular el flujo** $\displaystyle\oiint_S F\cdot\hat{n}\,dS$ **a través de una esfera de radio** a **centrada en el origen.**

b) **Hallar la divergencia del campo,** $\nabla\cdot F$ **.**

c) **En la teoría electromagnética, el campo eléctrico creado por una carga puntual** q**, ubicada en el origen es** $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}F$**, donde** ε_0 **es una constante. Usar las partes a), b) y el Teorema de Gauss para calcular** $\displaystyle\oiint_S E\cdot\hat{n}\,dS$ **en los siguientes casos:**

S **es una esfera centrada en el origen y orientada exteriormente.**
S **es la esfera unitaria de centro en el punto** $(2,0,0)$**.**
S **es el elipsoide** $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ **orientado exteriormente.**

Idea de la Solución:

1. Sea $C=\partial D$ orientada en sentido antihorario, por el Teorema de Green, se tiene

$$\oint_C\left(e^x+3x^2y^2\right)dx+\left(x+2x^3y\right)dy=\iint_D 1\,d(x,y)=Área(D)=3\,.$$

2. Sea V el volumen encerrado por S, como $F\in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ y S es seccionalmente suave y cerrada, por el Teorema de Gauss se tiene que $\displaystyle\oiint_S F\cdot\hat{n}\,dS=\iiint_V\nabla\cdot F(x,y,z)\,d(x,y,z)=0$.

3. El campo vectorial $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y,z)=\left(x^2-yz,y^2-xz,z^2-xy\right)$ es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ y $\nabla\times F=\theta$, por lo que él es conservativo y como γ es cerrada, $\displaystyle\oint_\gamma F\cdot dr=0$.

4. $\Psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\Psi(\nabla\Psi)=\left(\Psi\Psi_x,\Psi\Psi_y,\Psi\Psi_z\right)$

$$\nabla\left(\Psi\left(\nabla\Psi\right)\right)=\Psi_x^2+\Psi\Psi_{xx}+\Psi_y^2+\Psi\Psi_{yy}+\Psi_z^2+\Psi\Psi_{zz}=10\Psi \qquad (1)$$

$$\left\|\nabla\Psi\right\|^2=\Psi_x^2+\Psi_y^2+\Psi_z^2=4\Psi \qquad (2)$$

De (1) y (2), se tiene $\Psi_{xx}+\Psi_{yy}+\Psi_{zz}=6$, por tanto $\nabla\cdot\left(\nabla\Psi\right)=6$. Como Ψ es diferenciable (pues $\Psi \in C^2$) entonces $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}} = \nabla\Psi \cdot \hat{n}$, luego $\oiint\limits_S \dfrac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}} dS = \oiint\limits_S \nabla\Psi \cdot \hat{n}\, dS$. Por el Teorema de Gauss (considerando a V como el volumen encerrado por S), se tiene

$$\oiint\limits_S \nabla\Psi \cdot \hat{n}\, dS = \iiint\limits_V \nabla\cdot(\nabla\Psi)(x,y,z)\, d(x,y,z) = 6V = 8\pi .$$

5. Sea S_1 el cuadrado del plano $z=0$ de centro en $(1,1,0)$, con lados paralelos a los ejes y de lado 2, es decir, $S_1 = \{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$. Una parametrización para S_1 es $\Phi_1(x,y) = (x,y,0)$, con $D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$ y $\vec{n}_1(x,y) = \hat{k}$, luego $\iint\limits_{S_1} \nabla\times F\cdot\hat{n}\ dS = \iint\limits_{D_1} (\ldots,\ldots,-1)\cdot(0,0,1)\, d(x,y) = -\,\acute{A}rea(D_1) = -4$.

Como $\partial S = \partial S_1$ por Teorema de Stokes, se tiene que $\iint\limits_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\ dS = \iint\limits_{S_1} \nabla\times F\cdot\hat{n}\ dS = -4$.

6. v es C^2, por tanto, $\dfrac{\partial v}{\partial \hat{n}} = \nabla v\cdot\hat{n}$ y se tiene $\oiint\limits_S u\dfrac{\partial v}{\partial \hat{n}} dS = \oiint\limits_S u\nabla v\cdot\hat{n}\, dS$.

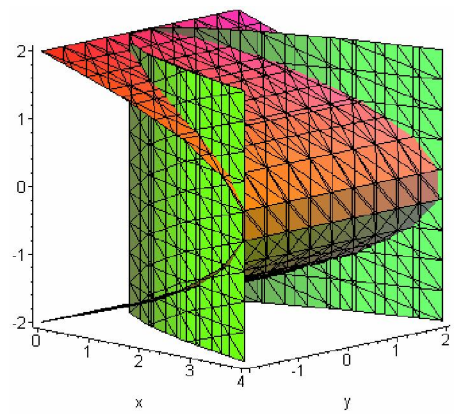
Sea $F = u\nabla v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\mapsto F(x,y,z) = \left(3\cos(\pi x) + 27z^2, 2y\cos(\pi x) + 18yz^2, 0\right)$, por Teorema de Gauss, se tiene que $\oiint\limits_S F\cdot\hat{n}\, dS = \iiint\limits_V \nabla\cdot F(x,y,z)\, d(x,y,z)$; luego,

$$\iint\limits_S u\nabla v\cdot\hat{n}\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(2\cos(\pi x) - 3\pi\sin(\pi x) + 18z^2\right) dz\, dy\, dx = 48 .$$

7. C es la intersección del cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y el plano $z = y+3$. Sea C_1 la circunferencia unitaria en el plano $z=0$ orientada en sentido antihorario, una parametrización es $C_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, con $t\in[0,2\pi]$.Sea S la superficie que tiene como borde a $C\cup C_1$, por la segunda versión del Teorema de Stokes, se tiene que $\oint\limits_C F\cdot dr - \oint\limits_{C_1} F\cdot dr = \iint\limits_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\ dS$. Como $\nabla F(x,y,z) = \theta$, se tiene que

$\oint\limits_{C_1} F\cdot dr = \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t), 0)\cdot(-\sin(t), \cos(t), 0)\, dt = 2\pi$ y por lo tanto, $\oint\limits_C F\cdot dr = 2\pi$.

8. Sea $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2\le x\le 4-z^2\}$ el volumen encerrado por las dos superficies y sea $S=\partial V$. Sean S_1 la parte del cilindro parabólico $x=y^2$ sobre S y S_2 la parte del cilindro parabólico $x=4-z^2$ sobre S , es decir, $S=S_1\cup S_2$.



La proyección de V sobre el plano $x=0$ es $D=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : y^2+z^2\le 4\}$ y coincide con la proyección de S_1 y también con la proyección de S_2 sobre el mismo plano.

$$\Phi_1(y,z)=(y^2,y,z);\ D_1=D;\ \vec{n}_1(y,z)=\Phi_{1z}(y,z)\times\Phi_{1y}(y,z)=(-1,2y,0)$$

$$\Phi_2(y,z)=(4-z^2,y,z);\ D_2=D;\ \vec{n}_2(y,z)=\Phi_{2y}(y,z)\times\Phi_{2z}(y,z)=(1,0,2z)$$

$$\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS=\iint_{S_1} F\cdot\hat{n}\,dS+\iint_{S_2} F\cdot\hat{n}\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[5r^3\left(\sin^3(\theta)-\cos^3(\theta)\right)+4r\right]dr\,d\theta=16\pi .$$

Otra solución: Usando el Teorema de Gauss, se tiene

$$\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS=\iiint_V \nabla\cdot F(x,y,z)\,dV=2\iiint_V d(x,y,z)=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2\cos^2(\theta)}^{4-r^2\sin^2(\theta)} r\,dx\,dr\,d\theta=16\pi .$$

9. La proyección de la curva C sobre el plano $z=0$ está dada por $x^2+xy+y^2=\dfrac{a^2}{2}$. Sea S la parte del plano encerrada por la esfera. Una parametrización para S es

$\Phi(x,y)=(x,y,-x-y)$, aquí el dominio es $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+xy+y^2\le\dfrac{a^2}{2}\right\}$ y

$\vec{n}(x,y)=\Phi_x(x,y)\times\Phi_y(x,y)=-(1,1,1)$ es el vector normal. Si $F(x,y,z)=(y,z,x)$, por el Teorema de Stokes, se tiene $\oint_C F\cdot dr=\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\,dS=-3\,Área(D)$.

Para calcular el área de D se considera el cambio de variables T dado por $x=\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v$ e $y=\frac{1}{\sqrt{2}}u-\frac{1}{\sqrt{2}}v$, se tiene

$$T(D)=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:3u^2+v^2\le a^2\right\}=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\frac{u^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{v^2}{a^2}\le 1\right\};$$ luego,

$Área(D)=\iint_D 1\,d(x,y)=\iint_{T(D)}1\,d(u,v)=Área(T(D))=\frac{a^2\pi}{\sqrt{3}}$ y $\oint_C F\cdot dr=-a^2\sqrt{3}\pi$.

10.

a) El vector normal unitario a la superficie una esfera de radio a y centro en el origen está dado por $\hat{n}(x,y,z)=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{(x,y,z)}{a}$. Luego, $\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS=\frac{1}{a^2}\iint_S dS=\frac{1}{a^2}Área(S)=4\pi$.

b) $\nabla\cdot F(x,y,z)=0$.

c)

- Si S está orientada exteriormente, por la parte a a) se tiene $\iint_S E\cdot\hat{n}\,dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$.
- Si S es la esfera unitaria de centro en $(2,0,0)$, por Gauss y parte b) se tiene, $\iint_S E\cdot\hat{n}\,dS=0$.
- Si S es el elipsoide $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ orientado exteriormente, se considera una esfera de radio $0<\varepsilon<\sqrt{2}$ centrada en el origen orientada exteriormente, por Gauss se deduce que

$$\iint_S E\cdot\hat{n}\,dS-\iint_{S_1}E\cdot\hat{n}\,dS=\iiint_V \nabla\cdot F(x,y,z)\,d(x,y,z).$$

Como $\nabla\cdot F(x,y,z)=0$ y el valor de la integral de superficie del campo E sobre cualquier esfera centrada en el origen es $\frac{q}{\varepsilon_0}$, se tiene que $\iint_S E\cdot\hat{n}\,dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$.

PROBLEMAS TIPO TEST

1. Hallar $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, A' y $Fr(A)$, si

a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 3\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x\leq 1, y=0\}\cup\{(0,2)\}$,

b) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sqrt{x^2+y^2}, 1\leq z<4\right\}$.

2. Sean f y g las funciones definidas, para $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, por

$$f(x,y,z)=2x+y+3z+28+\frac{xyz}{x^4+y^2+|z|} \quad y \quad g(x,y,z)=x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

¿Cómo habría que definirlas en el punto $(0,0,0)$ para que ellas resulten continuas en dicho punto? Si eso es posible, ¿Qué valor debe darse a cada función en ese punto?

<u>Solución</u>:

1.

a) $\overline{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 3\}\cup\{(x,0) : 0\leq x\leq 1\}\cup\{(0,2)\}$

$\overset{\circ}{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>3\}$

$A'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 3\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1, y=0\}$

$Fr(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=3\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1, y=0\}\cup\{(0,2)\}$

b) $\overline{A}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \mathrm{z}=\sqrt{x^2+y^2}, 1\leq z\leq 4\right\}=A'=Fr(A)$, $\overset{\circ}{A}=\phi$

2. Como $|f(x,y,z)-28|\leq 2|x|+|y|+3|z|+|xy|:=h(x,y,z)$, $\forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} h(x,y,z)=0$, se tiene entonces que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=28$.

Luego, para que f sea continua en $(0,0,0)$ debe definirse $f(0,0,0)=28$.

Como $|g(x,y,z)|\leq|x|$, $\forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}|x|=0$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} g(x,y,z)=0$. Para que g sea continua en $(0,0,0)$ debe definirse $g(0,0,0)=0$.

1. **Hallar $\overline{A}$, A', $\overset{\circ}{A}$ y $Fr(A)$ $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2-y^2\geq 1, |x|<4\}$. Además, indicar justificadamente si A es abierto, cerrado, acotado y/o compacto.**

2. **Sean $f(x,y,z)=\dfrac{xyz}{x^4+y^4+|z|}$ y $g(x,y,z)=\dfrac{xyz}{x^4+y^4+z^4}\sin\left(\sqrt{x^4+z^4}\right)$. Determinar si existen los límites para f y para g en $(0,0,0)$.**

<u>**Solución**</u>**:**

1.

$$\overset{\circ}{A}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2-y^2>1, |x|<4\}$$

$$\overline{A}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2-y^2\geq 1, |x|\leq 4\}=A'$$

$$Fr(A)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2-y^2=1\vee|x|=4\}.$$

Como el interior de A no es igual a A, el conjunto no es abierto.

Como la adherencia de A no es igual a A, el conjunto no es cerrado.

A no es acotado, pues para cualquier bola de centro en el origen y radio r, se tiene que el punto $(2,0,r+1)\in A$ no pertence a dicha bola.

2. Para $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ se tiene que $|f(x,y,z)|=\dfrac{|xyz|}{x^4+y^4+|z|}\leq|xy|$, de aquí resulta que el límite de f en $(0,0,0)$ es cero.

Para $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, se tiene que

$$|g(x,y,z)|\leq\left|\frac{xyz}{x^4+y^4+z^4}\sin\left(\sqrt{x^4+y^4+z^4}\right)\right|\leq\frac{|xyz|}{\|(x^2,y^2,z^2)\|}=\frac{(x^2)^{\frac{1}{2}}(y^2)^{\frac{1}{2}}(z^2)^{\frac{1}{2}}}{\|(x^2,y^2,z^2)\|}\leq\|(x^2,y^2,z^2)\|^{\frac{1}{2}}.$$

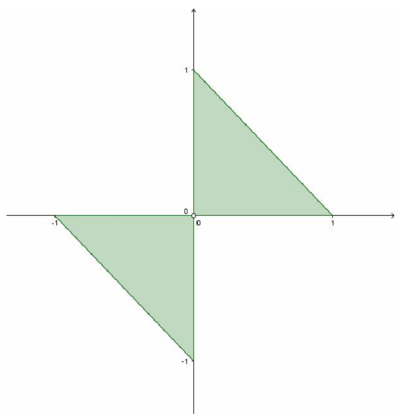
De aquí, también se tiene que el límite de g en $(0,0,0)$ es cero.

1. **Graficar** $A=\{(x,y):0<x^2+2xy+y^2\le 1\wedge xy\ge 0\}$ **y determinar** $\overline{A}$**,** $\overset{\circ}{A}$**,** A' **y** $Fr(A)$**.**

2. **Sabiendo que** $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x-y^3}$ **, estudiar la existencia de** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$**.**

<u>Solución</u>:

1. A :



$\overline{A}=\{(x,y):|x+y|\le 1\wedge xy\ge 0\}=A'$, $\quad \overset{\circ}{A}=\{(x,y):|x+y|<1\wedge xy>0\}$

$Fr(A)=\{(x,y):|x+y|=1\wedge xy>0\}\cup\{(x,0):|x|\le 1\}\cup\{(0,y):|y|<1, y\ne 0\}$

2. Si $(x,y)\in T_x=\{(x,y): y=0\}$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$,

si $(x,y)\in T_y=\{(x,y): x=0\}$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=-1$;

por lo tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

1. **Graficar** $A=\{(x,y): x^2 < y \le |x|\}$ **y hallar** $\overline{A}$**,** $\overset{\circ}{A}$**,** A' **y** $Fr(A)$**.**

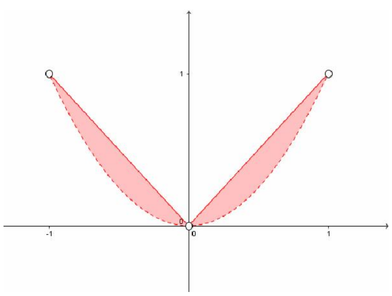
2. **Sea** $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**, tal que** $f\left(x-y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$**, hallar la expresión para** $f(x,y)$**.**

3. **Analizar la continuidad de**

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}(y-1)\dfrac{\sin\left[(x-2)(y-1)\right]}{(x-2)^2+(y-1)^2} & ,(x,y)\neq(2,1)\\ 0 & ,(x,y)=(2,1)\end{cases}.$$

<u>Solución</u>:

1. A:



$\overline{A}=\{(x,y): x^2 \le y \le x\}$, $\overset{\circ}{A}=\{(x,y): x^2 < y < x\}$, $A'=\overline{A}$

$Fr(A)=\{(x,y): y=x^2, |x|\le 1\}\cup\{(x,y): y=|x|, 0<|x|<1\}$.

2. Si $x-y=u$ e $\dfrac{y}{x}=v$, se tiene que $x=\dfrac{u}{1-v}$ e $y=\dfrac{uv}{1-v}$; por lo tanto,

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1-v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1-v}\right)^2=\frac{u^2(v+1)}{1-v} \text{ y entonces } f(x,y)=\frac{x^2(y+1)}{1-y}.$$

3. Si $(x_0,y_0)\neq(2,1)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, luego f es continua en (x_0,y_0).

Como $|f(x,y)|\le|x-2|$, $\forall (x,y)\neq(2,1)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}|x-2|=0$; $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y)=0$.

De lo anterior, f es función continua en todo $\mathbb{R}^2$.

1. **Dado** $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\left(x^2-y^2\right)(x-1)>0\right\}$**, hallar los conjuntos** $\overline{A}$**,** $\overset{\circ}{A}$**,** A'**,** $Fr(A)$ **e indicar si** A **es abierto, cerrado, acotado o compacto.**

2. **Dadas las funciones** f **y** g **definidas para** $(x,y,z)\neq(0{,}0{,}0)$**, por**

$$f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^4+y^2+|z|}\cos\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ \ \boldsymbol{y}\ \ g(x,y,z)=f(x,y,z)+\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

¿Cómo habría que definirlas en el punto $(0{,}0{,}0)$ **para que ellas resulten continuas en dicho punto? Si eso es posible, ¿Qué valor debe darse a cada función en ese punto?**

<u>Solución</u>:

1. $\overset{\circ}{A}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\left(x^2-y^2\right)(x-1)>0\right\}$, $\overline{A}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\left(x^2-y^2\right)(x-1)\geq 0\right\}=A'$,

$Fr(A)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|y|=|x|\vee x=1\right\}$.

A es abierto, pues $A=\overset{\circ}{A}$; no es cerrado pues $A\neq\overline{A}$, por ejemplo $(0,0)\in\overline{A}\wedge(0,0)\notin A$; no es acotado, ya que por ejemplo $\forall n\geq 2$, $(n,0)\in A$; A no es compacto por no ser acotado.

2. $\forall(x,y,z)\neq(0{,}0{,}0)$, $|f(x,y,z)|\leq|xy|$ y $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}|xy|=0$, por Teorema del sandwich, se tiene entonces que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)=0$; luego, para que f sea continua en $(0{,}0{,}0)$ debe definirse $f(0,0,0)=0$.

Como $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)=0$, debe analizarse la existencia de $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Si $(x,y,z)\in T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:y=z=0\right\}$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$
y como este límite no existe, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}g(x,y,z)$ no existe y g no puede definirse en el origen de modo que sea continua ahí.

1. **Sea** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$**, tal que** $f(x+y,x-y)=5x^2+5y^2+6xy$**.**

a) **Calcular** $f(0,0)$ **y** $f(-1,1)$**.**

b) **Hallar la expresión para** $f(x,y)$**.**

2. **Si** $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:2<x^2+y^2\leq 4\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=x^3,3\leq x<4\}\cup\{(0,0),(3,9)\}$**.**

Hallar $\overset{\circ}{A}$**,** $\overline{A}$**,** $Fr(A)$**,** A' **e indicar si** A **es abierto, cerrado, acotado o compacto.**

3. **Estudiar la continuidad de** f **en** $(0,0)$ **para los siguientes casos:**

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$**,**

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^4}{x^2+y^6}+\dfrac{x^4}{x-y} & ,y\neq x\\ 0 & ,y=x\end{cases}$**,**

c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0,)\end{cases}$**.**

<u>Solución</u>:

1.

a) De $x+y=0$ y $x-y=0$ se obtiene que $x=0=y$; luego, $f(0,0)=0$.

De $x+y=-1$ y $x-y=1$ se obtiene que $x=0$ e $y=-1$; luego, $f(-1,1)=5$.

b) Si $x+y=u$ y $x-u=v$ se tiene que $x=\dfrac{u+v}{2}$ e $y=\dfrac{u-v}{2}$; por lo tanto,

$$f(u,v)=\frac{5}{4}(u+v)^2+\frac{5}{4}(u-v)^2+\frac{3(u+v)(u-v)}{2}=4u^2+v^2 \text{ y entonces } f(x,y)=4x^2+y^2.$$

2. $\overset{\circ}{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2<x^2+y^2<4\}$,

$\overline{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\le x^2+y^2\le 4\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^3, 3\le x\le 4\}\cup\{(0,0),(3,9)\}$,

$Fr(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=2\vee x^2+y^2=4\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^3, 3\le x\le 4\}\cup\{(0,0),(3,9)\}$,

$A'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\le x^2+y^2\le 4\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^3, 3\le x<4\}$.

A no es abierto pues $A\neq\overset{\circ}{A}$, por ejemplo $(0,0)\in A\wedge(0,0)\notin\overset{\circ}{A}$; A no es cerrado pues $A\neq\overline{A}$, por ejemplo, $(4,64)\in\overline{A}\wedge(4,64)\notin A$; A es acotado, por ejemplo $A\subseteq B((0,0),666)$; A no es compacto por no ser cerrado.

3.

a) Para $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}+1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1}=\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)}$; luego, $|f(x,y)|\le x^2 := g(x,y)$. Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$, se tiene $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=g(0,0)$ por lo que f es continua en el origen.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left\{\dfrac{xy^4}{x^2+y^6}+\dfrac{x^4}{x-y}\right\}$.

Si $(x,y)\neq(0,0)$, $\left|\dfrac{xy^4}{x^2+y^6}\right|=\dfrac{|xy^3||y|}{\|(x,y^3)\|^2}\le\dfrac{\|(x,y^3)\|^2}{\|(x,y^3)\|^2}|y|=|y|$ y por Teorema del sandwich se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^4}{x^2+y^6}=0$.

Si $(x,y)\in T_k=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x-\dfrac{x^4}{k}, k\neq 0\right\}$, dado que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4}{x-y}=k$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4}{x-y}$ no existe; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ tampoco existe y f no es continua en $(0,0)$.

c) Considerando $t=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{e^t}=0=f(0,0)$; de donde, f es continua en $(0,0)$.

1. **Sea** $A=\{(x,0):0\le x\le 1\}\cup\left\{\left(\frac{1}{n},y\right):n\in\mathbb{N}^*,0\le y\le 1\right\}$.

a) **Bosquejar el conjunto** A.

b) **Determinar el interior y la clausura de** A.

c) **Decidir si el conjunto** A **es abierto o cerrado.**

2. **Estudiar la existencia de** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **para**

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6}$,

b) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^2}$,

c) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+|x|+|y|}$,

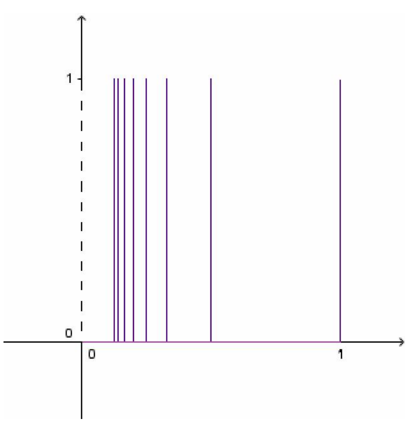
d) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+|x|+y}$.

Indicar en qué caso(s) es posible definir $f(0,0)$**, de manera que** f **sea una función continua en el origen.**

Solución:

1.

a) A:



b) $\overset{\circ}{A}=\{\ \}$, $\overline{A}=A\cup\{(0,y):0<y\le 1\}$.

c) $\overset{\circ}{A} \neq A$, por tanto, A no es un conjunto abierto. $A \neq \overline{A}$, por tanto, A no es un conjunto cerrado.

2.

a) Si $(x,y) \in T_y = \{(x,y) : x = 0\}$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Si $(x,y) \in T = \{(x,y) : y^3 = x^2\}$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe y f no puede definirse en el origen de modo que resulte continua en ese punto.

b) Como $|f(x,y)| \leq |x^2 y|$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x^2 y| = 0$, por acotamiento, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Para que f sea continua en $(0,0)$ debe definirse $f(0,0) = 0$.

c) Como $|f(x,y)| \leq |x|$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$; por acotamiento, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Para que f sea continua en $(0,0)$ debe definirse $f(0,0) = 0$.

d) Si $(x,y) \in T_y = \{(x,y) : x = 0\}$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Si $(x,y) \in T = \{(x,y) : y = -x^4 - |x|\}$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe y f no puede definirse en el origen de modo que resulte continua ahí.

1. Sabiendo que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto o cerrado, utilizar la caracterización dada por $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ para demostrar que $\operatorname{int}(Fr(A)) = \phi$.

2. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} & , \text{ si } x^2+y^2>1 \\ -x^2-y^2 & , \text{ si } |x|+|y| \le 1 \end{cases}$.

a) Hallar el dominio de f y representarlo gráficamente.

b) Calcular, si es posible, $f(0,0)$, $f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $f(3,1)$.

c) Obtener y representar gráficamente los conjuntos de nivel k, para $k=0$ y $k=-1$.

3. Analizar la continuidad de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ **en $(0,0)$.**

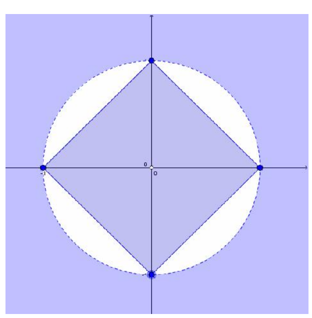
<u>Solución</u>:

1. Primer caso: A abierto. Si $X_0 \in \operatorname{int}(Fr(A))$, entonces (por definición de punto interior), existe $r>0$ tal que $B(X_0, r) \subseteq Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \overline{A} - A$; esto es una contradicción pues (por definición de punto adherente) $x \in \overline{A}$ implica que $B(X_0, r) \cap A \neq \phi$. Es claro entonces que si A es abierto, no pueden haber elementos en $\operatorname{int}(Fr(A))$, es decir, $\operatorname{int}(Fr(A)) = \phi$.

Segundo caso: A cerrado. En este caso, como $B := A^c$ es abierto, del primer caso se tiene que $\phi = \operatorname{int}(Fr(B)) = \operatorname{int}\left(\overline{A^c} \cap \overline{A}\right) = \operatorname{int}\left(\overline{A} \cap \overline{A^c}\right) = \operatorname{int}(Fr(A))$.

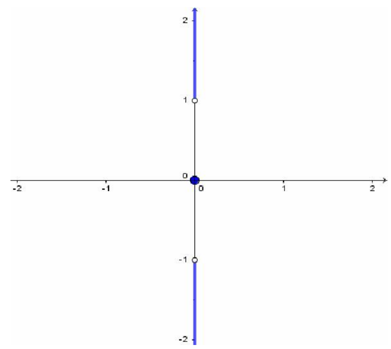
2.

a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1 \vee |x|+|y| \le 1\}$

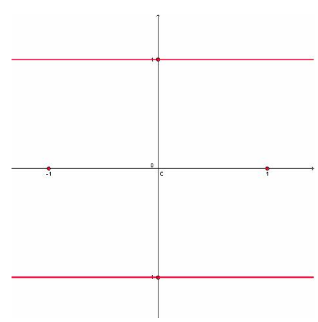


b) $f(0,0)=0$; $f\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ no existe, pues $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\notin D_f$; $f(3,1)=1$.

c) $N_0(f)=\left\{(x,y)\in D_f : \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}=0 \vee -x^2-y^2=0\right\}=\{(0,y)\in D_f : |y|>1\}\cup\{(0,0)\}$



$$N_{-1}(f)=\left\{(x,y)\in D_f : \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}=-1 \vee -x^2-y^2=-1\right\}$$
$$=\{(x,y)\in D_f : x\leq 0,\ y\pm=1\}\cup\{(-1,0),(1,0)\}$$



3. Como $|f(x,y)|=\frac{|x||y|^3}{x^2+y^4}\leq\frac{\sqrt{x^2+y^4}\left(y^4\right)^{3/4}}{x^2+y^4}\leq\frac{\sqrt{x^2+y^4}\left(x^2+y^4\right)^{3/4}}{x^2+y^4}=\left(x^2+y^4\right)^{1/4}$, $\forall(x,y)\neq(0,0)$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^4\right)^{1/4}=0$, se tiene que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ y por lo tanto f es continua en $(0,0)$.

1. **Sea** $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **una sucesión convergente y sea** $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$**. Determinar** $\overset{\circ}{A}$**,** $\overline{A}$**,** $Fr(A)$ **y** A'**, distinguiendo si** A **es finito o no.**

2. **Sea** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **definida por** $f(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x-y}\right) & ,x \neq y \\ 0 & ,x = y \end{cases}$**.**

a) **Hallar, si existe,** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a)$**.**

b) **Calcular, si existe,** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$**.**

c) **¿Es** f **diferenciable en** $(1,1)$**?**

d) **¿Es** f **diferenciable en** $(0,0)$**? Si lo es, hallar la aproximación afín correspondiente.**

<u>Solución</u>:

1. Sea $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Si A es finito, $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_N = l\}$; se tiene $\overset{\circ}{A} = \phi$, $\overline{A} = A = Fr(A)$, y $A' = \phi$. Si A es infinito $\overset{\circ}{A} = \phi$, $\overline{A} = A \cup \{l\} = Fr(A)$ y $A' = \{l\}$.

2.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2a+h)\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$, este límite existe (y vale 0) si y sólo si $a = 0$, por tanto, se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ y que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a)$ no existe si $a \neq 0$.

b) Como $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}$ no existe, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ no existe.

c) No, pues de la parte a), se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ no existe.

d) Dado que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, $\dfrac{\left|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)\right|}{\left\|(x,y)\right\|} = \dfrac{\left|f(x,y)\right|}{\left\|(x,y)\right\|} \leq \left\|(x,y)\right\|$ y como

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left\|(x,y)\right\| = 0$, f es diferenciable en $(0,0)$ y la aproximación afín es la nula.

1. **Sea** $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} 2x+y & ,y\neq x \\ 6 & ,y=x \end{cases}$.

Analizar la diferenciabilidad y encontrar la ecuación del plano tangente (cuando corresponda) al gráfico de f **en el punto** $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ **para:**

a) $(x_0, y_0)=(0,0)$,
b) $(x_0, y_0)=(2,2)$,
c) $(x_0, y_0)=(0,2)$.

2. **Sea** $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, **una función diferenciable en** $X_0 \in D_f$. **Demostrar que la derivada direccional es máxima en la dirección de** $\nabla f(X_0)$ **e indicar dicho valor máximo.**

3. **Determinar la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie** S **definida por** $3z + e^x \sin(y+z)=1$ **en el punto** $(0,\pi/2,0)$.

<u>Solución</u>:

1.

a) Si $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\}$, se tiene que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=6$.

Si $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=2x\}$, se tiene que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Luego, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe y f no es continua ni diferenciable en el origen.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,2)-f(2,2)}{h}=2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2,2+h)-f(2,2)}{h}=1$

f es diferenciable en $(2,2)$ ssi

$$L:=\lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{f(x,y)-f(2,2)-\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)(x-2)-\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)(y-2)}{\|(x-2,y-2)\|}=0$$

considerando $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\}$, se tiene que $L=\lim_{x\to 2}\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{2-x}{|x-2|}$ y como este límite no existe; se tiene que f no es diferenciable en el punto $(2,2)$.

iii) En vecindades del punto $(0,2)$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1$, las derivadas parciales además de existir en $(0,2)$, son continuas en dicho punto por lo que f es de clase C^1 y por tanto diferenciable en ese punto. La ecuación del tangente es $z=2x+y$.

2. Como f es diferenciable en X_0, entonces por teorema, si $\hat{v}$ es una dirección en $\mathbb{R}^n$ se sabe que la derivada direccional de f en X_0 en la dirección $\hat{v}$ está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(X_0)=\nabla f(X_0)\cdot\hat{v};$$

y de la desigualdad de Cauchy - Schwarz, $\left|\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(X_0)\right|\leq\|\nabla f(X_0)\|\|\hat{v}\|=\|\nabla f(X_0)\|$. Por lo tanto, el valor máximo para $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(X_0)$ es $\|\nabla f(X_0)\|$. Al considerar la dirección dada por $\hat{v}=\frac{\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|}$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(X_0)=\frac{\nabla f(X_0)\cdot\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|}=\frac{\|\nabla f(X_0)\|^2}{\|\nabla f(X_0)\|}=\|\nabla f(X_0)\|$.

De lo anterior, se tiene que la derivada direccional es máxima en la dirección del vector gradiente y dicho valor máximo corresponde a la norma de ese vector.

3. La superficie S está determinada por la ecuación $f(x,y,z)=0$, donde $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es la función definida por $f(x,y,z)=3z+e^x\sin(y+z)-1$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=e^x\sin(y+z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=e^x\cos(y+z)$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3+e^x\cos(y+z)$ la ecuación del plano tangente pedida es

$$\nabla f\left(0,\frac{\pi}{2},0\right)\cdot\left(x,y-\frac{\pi}{2},z\right)=0\Leftrightarrow x+3z=0.$$

La ecuación de la recta pedida es $\begin{cases} x=t \\ y=\frac{\pi}{2}, \\ z=3t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

1. **Sea** $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}+3x-2y+z+5 & ,(x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 5 & ,(x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$**.**

a) **Analizar la continuidad de** f **en el origen.**

b) **Hallar** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$**,** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ **y** $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$**,** $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$**.**

c) **Analizar la continuidad de las derivadas parciales en todo** $\mathbb{R}^3$**.**

d) **Analizar la diferenciabilidad de** f **en todo** $\mathbb{R}^3$**.**

2. **Sea** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$**.**

Probar que $(0,0)$ **la derivada direccional existe en cualquier dirección y que** f **no es diferenciable en** $(0,0)$**.**

<u>Solución</u>:

1.

a) Como $\left|f(x,y,z)-5\right|\leq 7\left\|(x,y,z)\right\|$, $\forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left\|(x,y,z)\right\|=0$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=5=f(0,0,0)$. Luego f es continua en $(0,0,0)$.

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{yz\left(x^2+y^2+z^2\right)-2x^2yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+3,\ \forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{xz\left(x^2+y^2+z^2\right)-2xy^2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}-2,\ \forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{xy\left(x^2+y^2+z^2\right)-2xyz^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+1,\ \forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h}=3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h,0)-f(0,0,0)}{h}=-2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0,h)-f(0,0,0)}{h}=1.$$

c) Si $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$, se tiene que

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0);$$

así, las derivadas parciales son funciones continuas $\forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

Al analizar los límites de la derivadas parciales en el origen, tomando la trayectoria

$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\right\}$, se tiene que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{1}{9}+3\neq 3=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0),$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{1}{9}-2\neq -2=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0),$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{1}{9}+1\neq 1=\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0),$$

por tanto, las derivadas parciales no son continuas en el origen.

d) De la parte anterior se tiene que f es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ excepto en el origen.

Luego, $\forall(x,y,z)\neq(0,0,0)$, f es diferenciable.

f es diferenciable en $(0,0,0)$ ssi el límite siguiente es cero,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-f_x(0,0,0)x-f_y(0,0,0)y-f_z(0,0,0)z}{\left\|(x,y,z)\right\|},$$

si $(x,y,z)\in\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\}$, este límite vale $\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^3}$; por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0,0)$.

De lo anterior se tiene que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ excepto en el origen.

2. Si $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2\}$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1\neq 0=f(0,0)$; como f no es continua en $(0,0)$ entonces ella no es diferenciable en dicho punto.

Sea $\hat{v}=(a,b)$ un vector unitario y arbitrario, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(t(a,b)+(0,0)\right)-f(0,0)}{h}=\frac{2a^2}{b},\ b\neq 0;$$

Si $b=0$, se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\pm t,0)-f(0,0)}{h}=0$.

Luego, $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0)$ existe en cualquier dirección.

1. **Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, donde $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$. Determinar los conjuntos de nivel -1, 0, 4 y 9; además graficar la superficie corresponde a la ecuación $z=f(x,y)$.**

2. **Sean f y g las funciones definidas por**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y^3}{x^2+y^2}+3x-2y & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases} \text{ y } g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Determinar:

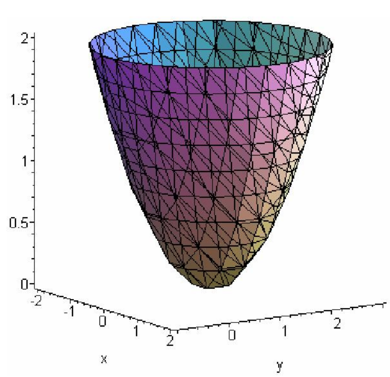
a) **El límite de f en $(0,0)$.**
b) **El límite de g en $(0,0)$.**
c) **Las derivadas parciales de f en $(0,0)$.**
d) **Las derivadas parciales de g en $(0,0)$.**
e) **Si f es diferenciable en $(0,0)$.**
f) **Si g es diferenciable en $(0,0)$.**
g) **Si g es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.**

Solución:

1. $N_{-1}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=-1\}=\{\ \}$, $N_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0\}=\{(0,1)\}$

$N_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2=2^2\}$, $N_9=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2=3^2\}$

Como las curvas de nivel N_k para $k>0$ corresponden a circunferencias de radio $\sqrt{k}$ todas centradas en $(0,1)$ y las intersecciones entre la superficie $z=f(x,y)$ y los planos yz y xz son parábolas, entonces dicha superficie corresponde a un paraboloide circular.



2.

a) Sean $T_1 = \{(x,y): x = 0\}$ y $T_2 = \{(x,y): x = y^2\}$. Si $(x,y) \in T_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$; si $(x,y) \in T_2$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$. Se tiene entonces que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

b) Como $|g(x,y)| \le x^2$, $\forall (x,y) \ne (0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$.

c) Como $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^2} + 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no existe.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = -1.$$

d) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = 0 = \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

e) Como f no es continua en $(0,0)$, entonces ella no es diferenciable dicho punto.

g) Si $(x,y) \ne (0,0)$ entonces $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^4 y}{(x^2+y^2)^2}$.

De aquí se ve que $g \in C^1\left(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\right)$.

Como $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| \le 2|x|$, $\forall (x,y) \ne (0,0)$ y $\left|\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| \le 2|y|$, $\forall (x,y) \ne (0,0)$ y

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y|$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ y

que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

De lo anterior, $g \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

f) Como $g \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ y en particular es de clase C^1 en el origen, se tiene entonces que g es diferenciable en dicho punto.

1. **Sean** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2+|y|}, \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ **y** $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$**,** **determinar:**

a) **Si** f **es diferenciable en** $(0,0)$**.**
b) **Si** g **es diferenciable en** $(0,0)$**.**
c) **La buena aproximación de** f **en las vecindades del punto** $(1,-1)$
d) **La derivada direccional de** f **en** $(0,0)$ **en la dirección del vector** $\hat{u}=a\hat{i}+b\hat{j}$**.**
e) **La derivada direccional de** g **en** $(0,0)$ **en la dirección del vector** $\hat{u}=a\hat{i}+b\hat{j}$**.**

2. **Sea** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$**, con** $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$**.**

a) **Calcular** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ **y** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ **para** x**,** $y\in\mathbb{R}$**.**
b) **Mostrar que** f **no es de clase** C^2 **en el origen.**
c) **Estudiar la diferenciabilidad de** f **en** $(0,0)$**.**
d) **Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de** f **en el punto** $(1,1,0)$**.**

Solución:

1.

a) $f(0,0)=0$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$.

f es diferenciable en $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$; como $\left|\dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}\right|\leq|x|$, $\forall(x,y)\neq 0$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$, se tiene $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$. Luego, f es diferenciable en $(0,0)$.

b) Sea $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2\}$, $(x,y)\in T \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=\dfrac{1}{2}\neq 0$,

por lo tanto, g no es continua en $(0,0)$ y g no es diferenciable en $(0,0)$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2xy\left(y-1-x^4\right)}{\left(x^4+y^2-y\right)^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^2\left(x^4-2y+y^2\right)}{\left(x^4+y^2-y\right)^2}$ son funciones continuas si $y<0$.

De lo anterior, f es de clase si C^1 si $y<0$, por lo tanto, en particular f es diferenciable en el punto $(1,-1)$ y la aproximación está dada por $A(x,y)=-\dfrac{1}{9}(2x+1)$.

d) Como f es diferenciable en $(0,0)$ entonces $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\hat{u}=0$.

e) $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(h(a,b)+(0,0)\right)-f(0,0)}{h}=\dfrac{a^2}{b},\ b\neq 0,$

$b=0\ \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\pm h,0)-f(0,0)}{h}=0$.

2.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x,t)-f(x,0)}{t}=x,\forall x\in\mathbb{R}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,y)-f(0,y)}{t}=-y,\forall y\in\mathbb{R}$.

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=1$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=-1$.

Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, entonces por Lema de Schwarz f no es C^2 en el origen.

c) f es diferenciable en $(0,0)$ ssi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\left\|(x,y)\right\|}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=0$. Como,

$\left|\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\right|\leq|x|\to 0,\ \forall(x,y)\neq(0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\left\|(x,y)\right\|}=0$,

por tanto, f es diferenciable en $(0,0)$.

d) La ecuación del plano pedido es $z=x-y$.

1. **Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, donde A es abierto en $\mathbb{R}^m$ y $X_0 \in A$.**

a) **¿Qué significa que F sea diferenciable en X_0?**
b) **¿Qué significa que F sea de clase C^1 en el abierto X_0?**
c) **¿Cómo se define la matriz jacobiana de F en X_0?**
d) **¿Cómo se define la buena aproximación afín a F en el punto X_0?**
e) **¿Cómo se define la derivada direccional de F en X_0 en dirección $\hat{u}$ en $\mathbb{R}^m$?**

2. **Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por**

$$F(x, y) = \left(\frac{2x^3 - 5y^5}{x^2 + y^4},\ 2x + 5y + 7 \right),\ \textbf{para}\ (x, y) \neq (0,0)\ \textbf{ y }\ F(0,0) = (0,7).$$

Determinar:

a) **Si F es continua en $(0,0)$.**
b) **Si F es diferenciable $(0,0)$.**
c) **Si F es de clase C^1 en algún abierto de $\mathbb{R}^2$.**
d) **La buena aproximación afín de F en las vecindades de $(1,-1)$.**
e) **La matriz jacobiana de F en $(1,-1)$.**

Solución:

1.

a) Significa que $\lim\limits_{H \to \theta} \dfrac{f_j(X_0 + H) - f_j(X_0) - \nabla f_j(X_0) \cdot H}{\| H \|} = 0$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

b) Si $F = (f_1, \ldots, f_n)$, significa que las funciones $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ son continuas en cada punto de A, $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$.

c) Como la matriz $\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(X_0) \right)$ del tipo $n \times m$, donde $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

d) $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $A(X) = \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(X_0) \right) (X - X_0)^T + F(X_0)$.

e) La derivada direccional en el punto X_0 con respecto al vector $\hat{u}$, está definida cuando $m = 1$ y ella está dada por $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{u}}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(X_0 + t\hat{u}) - f(X_0)}{t}$, cuando este límite existe.

2. $F(x,y)=\left(f(x,y),g(x,y)\right)$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-5y^5}{x^2+y^4} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$,

$g(x,y)=2x+5y+7$ (función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$).

a) Como $\left|f(x,y)\right|\leq 2|x|+5|y|$, $\forall(x,y)\neq(0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(2|x|+5|y|\right)=0$ se prueba, por Teorema del sandwich, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

f y g son funciones continuas en $(0,0)$; por tanto, F es continua en $(0,0)$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-5$; f es diferenciable en $(0,0)$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\left\|(x,y)\right\|}=0.$$

En este caso, $\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\left\|(x,y)\right\|}=\dfrac{5x^2y-2xy^4}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^4\right)}$ y

$(x,y)\in T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\right\}\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{5x^2y-2xy^4}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^4\right)}\neq 0$; luego,

f no es diferenciable $(0,0)$; por lo tanto, F no es diferenciable $(0,0)$.

c) f y g son funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. F es función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

e) $\left(\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right)_{(1,-1)}=\begin{pmatrix}-1/2 & -11/2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

d) $A(x,y)=F(1,-1)+\left(\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right)_{(1,-1)}\begin{pmatrix}x-1\\ y+1\end{pmatrix}=\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{11}{2}y,7+2x+5y\right)$.

1. **Considerar** $w = f(x,y)$ **una función de clase** C^2 **en las variables** x **e** y **y sean** $x = u + v$ **e** $y = u - v$**. Mostrar que** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$**.**

2. **Considerar el sistema de ecuaciones**

$$\begin{gathered} xz^3 + yu + \alpha x = 1 \\ 2xy^3 + u^3 z + \alpha(y-1) = 0 \end{gathered}$$

a) **En una vecindad del punto** $P_0 = (x_0, y_0, z_0, u_0) = (0,1,0,1)$**, determinar qué valor(es) de** $\alpha \in \mathbb{R}$ **son tales que el sistema define** $(x,y) = (g(z,u), h(z,u))$**.**

b) **Para** $\alpha = 0$**, calcular** $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ **en el punto** $(z_0, u_0) = (0,1)$**, donde** $w(x,y) = xy + 1$**.**

<u>Solución</u>:

1. De la regla de la cadena se tiene que, $\dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}$ y

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

aquí, como f es C^2, por Lema de Schwarz se tiene que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

2.

a) Si $F(x,y,u,v) = (f_1(x,y,u,v), f_2(x,y,u,v)) = (xz^3 + yu + \alpha x - 1, 2xy^3 + u^3 z + \alpha(y-1))$, F es de clase C^1 cerca de P_0, $F(P_0) = (0,0)$ y $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)} = a^2 - 2$; luego por el Teorema de la función implícita, el sistema define a $x = g(u,v)$ y a $y = h(z,u)$ si $a \neq \pm\sqrt{2}$.

b) Del corolario del teorema, $\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)_{(0,1)} = -\left(\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}_{P_0}\left(\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(z,u)}\right)_{P_0} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

así que, $\dfrac{\partial w}{\partial z}(0,1) = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)(P_0) = \left(y\dfrac{\partial x}{\partial z} + x\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)(P_0) = -\dfrac{1}{2}$.

1. **Mostrar que el sistema** $\begin{array}{c} x^2 - y^2 + u^2 + 2v^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = -4 \end{array}$ **define a** $u = u(x, y)$**,** $v = v(x, y)$**, con** $u(0,1) = 2$ **y** $v(0,1) = -1$**. Encontrar, además las diferenciales** $Du(0,1)$ **y** $Dv(0,1)$ **y la derivada parcial de segundo orden** $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,1)$**.**

2. **Sea** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$**. Se dice que** f **es homogénea de grado** m **si** $f(tX) = t^m f(X)$**, para todo** $t > 0$ **y** $X \in \mathbb{R}^n$**. Si** f **es diferenciable, probar que** f **es homogénea de grado** m **si y sólo si** $mf(X) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X) x_i$**.**

<u>Solución</u>:

1. Sea $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, con $F = (f, g)$, donde $f(x, y, u, v) = x^2 - y^2 + u^2 + 2v^2 - 5$ y $g(x, y, u, v) = x^2 + y^2 - u^2 - v^2 + 4$ y sea el punto $P_0 = (0,1,2,-1)$. F es de clase C^1 en cerca de P_0, $F(P_0) = (0,0)$ y $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}(P_0) = -8 \neq 0$; luego por el Teorema de la función implícita, el sistema define implícitamente a u y v como funciones de x e y.

Además, $\left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)_{(0,1)} = -\left(\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}_{P_0} \left(\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right)_{P_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Las aplicaciones lineales definidas por $Du(0,1)$ y $Dv(0,1)$ están dadas por

$$Du(0,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(h,k) \mapsto Du(0,1)(h,k) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,1)h + \frac{\partial u}{\partial y}(0,1)k = \frac{k}{2},$$

$$Dv(0,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(h,k) \mapsto Dv(0,1)(h,k) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,1)h + \frac{\partial v}{\partial y}(0,1)k = 0.$$

Al derivar las dos ecuaciones con respecto a x y luego sumar se obtiene

$v_x(x, y, u, v) = -\dfrac{2x}{v}$, luego $v_{xx}(x, y, u, v) = -\dfrac{2v + \dfrac{4x^2 v}{v}}{v^2}$ y así $v_{xx}(0,1) = 2$.

2. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ $h:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$X \mapsto f(X)$ $\quad$ $t \mapsto g(t) = tX$ $\quad$ $t \mapsto h(t) = f(g(t))$

De la regla de la cadena, se tiene que $h'(t) = \nabla f(tX)\cdot X$, con X arbitrario y fijo.

Primero debe probarse que si f es homogénea de grado m, $mf(X) = \nabla f(X)\cdot X$.

- Si f es homogénea de grado m, se tiene que $h(t) = f(tX) = t^m f(X)$, para todo $t>0$ y $X \in \mathbb{R}^n$, luego $h'(t) = \nabla f(tX)\cdot X = mt^{m-1} f(X)$ y de aquí, al evaluar h' en 1, se obtiene que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)x_i = mf(X)$.

Así, es claro que si f es homogénea de grado m, entonces $mf(X) = \nabla f(X)\cdot X$.

Ahora debe probarse que si $mf(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)x_i$, f es homogénea de grado m.

- Si $f(X) > 0$, se tiene $h'(t) = \nabla f(X)\cdot X = \frac{1}{t}\nabla f(tX)\cdot tX = \frac{1}{t} mf(tX) = \frac{m}{t}h(t)$ y $\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{m}{t}$ de donde $\ln|h(t)| = \ln t^m + C$, aquí si $t=1$ se obtiene que $\ln f(X) = C$ y por lo tanto $h(t) = t^m f(X)$. Si $f(X) < 0$, del mismo modo se llega a $h(t) = t^m f(X)$.

Si $f(X) = 0$ y existiera algún $t_0 > 0$ tal que $f(t_0 X) \neq 0$, de lo anterior se tendría que

$$f(X) = f\left(\frac{1}{t_0}t_0 X\right) = \left(\frac{1}{t_0}\right)^m f(t_0 X) \neq 0,$$

lo cual es una contradicción; por tanto, si $f(X) = 0$, entonces para todo $t > 0$ se tiene que $f(tX) = 0$.

Así, si f verifica $mf(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)x_i$ entonces ella es homogénea de grado m.

1. **Sea** $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**, definida por** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3(y+2)+2xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \quad , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$**.**

a) **Calcular** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ **y** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$**.**

b) **Determinar si** f **es diferenciable en** $(0,0)$**.**

c) **Decidir si la gráfica de** f **posee plano tangente en el punto** $\left(1,2,\dfrac{12}{5}\right)$ **y en caso afirmativo escribir la ecuación de dicho plano.**

2. **Sean** $z=z(x,y)$ **una función de clase** C^2 **y** $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$**,** $T(u,v)=(x,y)$ **la transformación con componentes** $x=u$**,** $y=uv$**.**

a) **Si** $w(u,v)=z(x(u),y(u,v))$ **transformar** $E=u\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}(u,v)-v\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}(u,v)+\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial w}{\partial v}(u,v)$ **en términos de las variables** x **e** y**.**

b) **Mostrar que la transformación** T **no posee inversa.**

c) **Mostrar que** T **es localmente invertible cerca de** $(1,1)$**, con inversa** T^{-1} **diferenciable y que en cualquier vecindad del punto** $(0,1)$ **la aplicación** T **no es inyectiva.**

Solución:

1.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$.

b) f es diferenciable en $(0,0)$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{\|(x,y)\|^3}=0 \text{, como } \frac{|x^3y|}{\|(x,y)\|^3}\le\|(x,y)\|,$$

$\forall (x,y)\neq(0,0)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\|(x,y)\|=0$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{\|(x,y)\|^3}=0$ y por tanto, f es diferenciable en $(0,0)$.

c) $\forall(x,y)\neq(0,0): \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x^4y+4x^2y^2+3x^2y^3+2x^4+2y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^3\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Claramente estas funciones son continuas $\forall(x,y)\neq(0,0)$, por lo tanto, f es de clase C^1 y además diferenciable $\forall(x,y)\neq(0,0)$. G_f posee plano tangente en el punto $\left(1,2,\dfrac{12}{5}\right)$ pues f es diferenciable en el punto $(1,2)$; la ecuación de dicho plano es $76x-3y-25z=10$.

2.

a) $\dfrac{\partial w}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)+v\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}(u,v)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)+v\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}(u,v)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)+2v\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(x,y)+v^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)=u\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}(u,v)=u\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right)+\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}(u,v)=u\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)+uv\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)+\frac{\partial z}{\partial y}(x,y);$$

se tiene, $E=x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)$.

b) $T(0,v)=(0,0)$, $\forall v\in\mathbb{R}$, por lo tanto T no es inyectiva ni invertible.

c) Como $\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(1,1)}=1\neq 0$ y T es clase C^1 cerca del punto $(1,1)$; entonces T es localmente invertible en vecindades de dicho punto, con inversa T^{-1} diferenciable ya que por el Teorema de la función inversa T^{-1} es clase C^1 cerca de $(1,1)$. Además, de b), si $v=1$ puede verse que cerca del punto $(0,1)$, T no es inyectiva.

1. **Sea** $u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$**, donde** f **y** g **son funciones de una variable dos veces derivables y** c **una constante. Probar que** u **satisface la ecuación de onda** $u_{tt}=c^2u_{xx}$ **.**

2. **Considerar la función** $F(x,y)=\left((x-y)^2,\dfrac{x^2}{y}\right)$**,** $y\neq 0$**.**

a) **Probar que** F **admite inversa local en vecindades** U_0 **de** $(-1,1)$**.**

b) **Sea** $F^{-1}:V_0\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$**,** $(x,y)=(g(u,v),h(u,v))$ **la inversa local de** F **, calcular la razón de cambio de** h **en** $(4,1)$ **en la dirección del vector** $2\hat{i}-\hat{j}$**.**

Solución:

1. $u_x(x,t)=f'(x+ct)+g'(x-ct)$

$$u_{xx}(x,t)=f''(x+ct)+g''(x-ct)$$

$$u_t(x,t)=c\,f'(x+ct)-c\,g'(x-ct)$$

$$u_{tt}(x,t)=c^2f''(x+ct)+c^2g''(x-ct)=c^2\,u_{xx}(x,t).$$

2.

a) Como $J\left(F,(-1,1)\right)=\begin{vmatrix}-4 & 4\\ -2 & -1\end{vmatrix}=12\neq 0$ y F es de clase C^1 en vecindades U_0 de $X_0=(-1,1)$ y por Teorema de la función inversa se tiene que F posee inversa de clase C^1 cerca de $(-1,1)$.

b) Como F^{-1} es diferenciable en $Y_0=F(X_0)=F(-1,1)=(4,1)$, h es diferenciable en $(4,1)$, por lo que $\dfrac{\partial h}{\partial\hat{v}}(Y_0)=\nabla h(Y_0)\cdot\hat{v}$, donde $\hat{v}=2\hat{i}-\hat{j}$.

Además como $J\left(F^{-1},(Y_0)\right)=\begin{pmatrix}-1/12 & -1/3\\ 1/6 & -1/3\end{pmatrix}$,

se tiene que $\nabla h(Y_0)=\left(\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{3}\right)$ y por lo tanto $\dfrac{\partial h}{\partial\hat{v}}(Y_0)=\nabla h(Y_0)\cdot\hat{v}=\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$.

1. Dado el sistema $\begin{array}{l} x^2 - xu - v^2 = 0 \\ y^2 - yv - u^2 = 0 \end{array}$

a) Determinar que condición debe cumplir una solución (x_0, y_0, u_0, v_0) **para que este defina implícitamente a funciones** $u = u(x,y)$**,** $v = v(x,y)$ **de clase** C^1 **cerca de** (x_0, y_0)**.**

b) Aplicando el Teorema de la función implícita para la solución $x = 1$**,** $y = 1$**,** $u = 1$**,** $v = 0$**, decidir si** $T(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ **admite inversa de clase** C^1 **cerca de** $(1,1)$**.**

2. Encontrar los puntos críticos para f **y determinar la naturaleza de cada uno de ellos, cuando:**

a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$,

b) $f(x,y) = (y-2)\ln(xy)$,

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 - xy + z^2 - 2z$.

<u>Solución</u>:

1.

a) Sea $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ con $F(x,y,u,v) = (f(x,y,u,v), g(x,y,u,v))$, donde $f(x,y,u,v) = x^2 - xu - v^2$ y $g(x,y,u,v) = y^2 - yv - u^2$; claramente F es $C^1(\mathbb{R}^4)$ pues f y g lo son; además $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0,0)$.

Como $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -x & -2v \\ -2u & -y \end{vmatrix} = xy - 4uv$, se tiene entonces que para que el sistema dado defina implícitamente dos funciones $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ de clase C^1, cerca de (x_0, y_0) debe cumplirse que $x_0 y_0 - 4u_0 v_0 \neq 0$.

b) El punto $P_0 = (1,1,1,0)$ cumple la condición de la parte a) y por el corolario del Teorema de la función implícita, se tiene

$$\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)_{(1,1)} = -\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}_{P_0} \left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right)_{P_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Así $|J(T,(1,1))| = 2 \neq 0$ y como T es C^1 cerca de $(1,1)$, entonces existe T^{-1} de clase C^1 en vecindades del punto $(1,0)$.

2.

a) Los puntos críticos son $(0,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2\left(3x^2+y^2+1\right)e^{x^2-y^2}+4\left(x^3+xy^2+x\right)x\ e^{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=4xy\ e^{x^2-y^2}-4\left(x^3+xy^2+x\right)y\ e^{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2\left(1-x^2-3y^2\right)e^{x^2-y^2}+4\left(y-yx^2-y^3\right)y\ e^{x^2-y^2}$$

Punto	Δ_1	Δ_2	Naturaleza
$(0,0)$	positivo	positivo	Mínimo local estricto
$(0,1)$	positivo	negativo	Silla
$(0,1)$	positivo	negativo	Silla

El origen, es además un mínimo absoluto, pues $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(0,0)=0\le f(x,y)$.

b) $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0\right\}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\Rightarrow y=2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Rightarrow \frac{y\ln(xy)+y-2}{y}=0$, hay un único punto crítico, $(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},2\right)$. Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2-y}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y+2}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{1}{x}$; se tiene que $\Delta_1=0$ y $\Delta_2=-4$ y el punto es de silla.

c)

De $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0\Rightarrow x=y/2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0\Rightarrow 3y^2=x$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0\Rightarrow z=1$, se tiene que $y=2x=0$ o $y=2x=\frac{1}{6}$ y los puntos críticos son $(0,0,1)$ y $\left(\frac{1}{12},\frac{1}{6},1\right)$.

Para $(0,0,1)$, $\Delta_1=2$, $\Delta_2=-1$ y $\Delta_3=-2$; $(0,0,1)$ es punto de silla.

Para $\left(\frac{1}{12},\frac{1}{6},1\right)$, $\Delta_1=2$, $\Delta_2=1$ y $\Delta_3=2$; $\left(\frac{1}{12},\frac{1}{6},1\right)$ es mínimo relativo.

1. **Sean $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to f(x,y)$ de clase C^2, el cambio $x = u + av$ e $y = u - av$ y a una constante. Sea $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \to g(u,v) = f(u+av, u-av)$. Aplicar la regla de la cadena para escribir $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) - a^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$ en términos de las variables x e y. Deducir luego en qué se transforma la ecuación diferencial parcial $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = a^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$ en términos de las variables x e y.**

2. **Sea $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y)) = (x\cos(y), \sin(x-y))$. Demostrar que F tiene inversa cerca de $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y obtener la matriz jacobiana de dicha inversa en el punto $(0,0)$.**

3. **Mostrar que la ecuación $xe^{y+z} + (z-x)\sin(y+1) - xyz - 2x = 0$, define $z = g(x,y)$ de manera única y como una función de clase C^1 en un entorno del punto $(1,-1,1)$. Además, verificar que $(1,-1)$ es un punto crítico para g.**

<u>Solución</u>:

1. $$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = a\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)=a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-2a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)+a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)-a^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=-4a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$$

La ecuación $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)=a^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$ se transforma en $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0$.

2. $$\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right)_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\cos(y) & -x\sin(y)\\ \cos(x-y) & -\cos(x-y)\end{pmatrix}$$

Como $\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}=\begin{vmatrix}0 & -\pi/2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=\frac{\pi}{2}\neq 0$ y f es C^1 cerca de $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, f posee inversa en vecindades de dicho punto. Por el Teorema de la función inversa, la matriz pedida es

$$\left(J\left(f^{-1},(0,0)\right)\right)=\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}=-\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2} & -1\\ \frac{\pi}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

3. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, con $f(x,y,z)=xe^{y+z}+(z-x)\sin(y+1)-xyz-2x$; claramente f es de clase C^1 en el punto $(1,-1,1)$; como $f(1,-1,1)=0$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1)=2\neq 0$, se tiene entonces que la ecuación define implícitamente de manera única a $z=g(x,y)$ como una función de clase C^1 cerca de $(1,-1)$. Además, por el corolario del Teorema de la función implícita, se tiene

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}_{(1,1)}=-\left(\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1)\right)^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}_{(1,-1)}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix};$$

luego, $\frac{\partial g}{\partial x}(1,-1)=\frac{\partial g}{\partial y}(1,-1)=0$ por lo que $(1,-1)$ un punto crítico para g.

Observación: Para obtener las derivadas parciales en el punto $(1,-1)$, sin utilizar el corolario del teorema, basta derivar la ecuación implícitamente con respecto a x, luego despejar $\frac{\partial g}{\partial x}$ y evaluar en $(1,-1,1)$ (la otra derivada parcial se obtiene análogamente).

1. **Sea $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal, utilizando el Teorema del sandwich mostrar que ella es continua en todo $\mathbb{R}^n$.**
2. **Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una función diferenciable en $X_0 \in D_f$, demostrar que la diferencial $Df\left(X_0\right)$ está definida de manera única.**
3. **¿Qué relación hay entre una aplicación lineal y su diferencial?**

<u>Solución</u>:

1. Sean $X=\sum_{i=1}^{n} x_i \hat{e}_i$ e $Y=\sum_{i=1}^{n} y_i \hat{e}_i$ en $\mathbb{R}^n$, considerando $K:=\sup\left\{\left|L\left(e_i\right)\right| : i=\overline{1,n}\right\}$, se tiene $\left|L\left(X-Y\right)\right|=\left|\sum_{1=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)L\left(\hat{e}_i\right)\right| \leq \sum_{1=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|\left|L\left(\hat{e}_i\right)\right| \leq K\sum_{1=1}^{n}\left|x_i-y_i\right| \leq nK\left\|X-Y\right\|$, de aquí; es claro que $\left|L\left(X\right)-L\left(X_0\right)\right| \leq C\left\|X-X_0\right\|$, con $C=nK>0$.

   Luego, como $\lim_{X\to X_0}\left\|X-X_0\right\|=0$, por Teorema del sandwich, se tiene $\lim_{X\to X_0} L\left(X\right)=L\left(X_0\right)$.

2. Al suponer que existen dos aplicaciones, L_1 y L_2 en $\mathrm{L}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)$ tales que

   $\lim_{H\to\theta}\dfrac{f\left(X_0+H\right)-f\left(X_0\right)-L_1\left(H\right)}{\left\|H\right\|}=0$ y $\lim_{H\to\theta}\dfrac{f\left(X_0+H\right)-f\left(X_0\right)-L_2\left(H\right)}{\left\|H\right\|}=0$, se tiene que

   $\lim_{H\to\theta}\dfrac{L_1\left(H\right)-L_2\left(H\right)}{\left\|H\right\|}=0$, lo cual a su vez implica que $\lim_{H\to\theta}\dfrac{\left|L_1\left(H\right)-L_2\left(H\right)\right|}{\left\|H\right\|}=0$.

   el valor de este último límite considerando la trayectoria $H=tY$, donde Y es un vector no nulo arbitrario y fijo, está dado por

   $$\lim_{t\to 0}\frac{\left|L_1\left(tY\right)-L_2\left(tY\right)\right|}{\left\|tY\right\|}=\lim_{t\to 0}\frac{\left|t\right|\left|L_1\left(Y\right)-L_2\left(Y\right)\right|}{\left|t\right|\left\|Y\right\|}=\frac{\left|L_1\left(Y\right)-L_2\left(Y\right)\right|}{\left\|Y\right\|},$$

   y como dicho valor es cero, dado que $Y\neq\theta$, entonces necesariamente debe tenerse que $L_1\left(Y\right)=L_2\left(Y\right)$ y por lo tanto $L_1=L_2$, lo cual prueba la unicidad de la diferencial.

3. Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es lineal entonces $f\left(X_0+H\right)-f\left(X_0\right)=f\left(H\right)$, por lo que el límite que define la diferenciabilidad queda $\lim_{H\to\theta}\dfrac{f\left(H\right)-L\left(H\right)}{\left\|H\right\|}=0$; luego, de la parte 2., se deduce que la diferencial de una aplicación lineal y la aplicación lineal coinciden, es decir, $Df\left(X_0\right)=f$.

1. **Sea** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}}+3x-7y+15 & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 15 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

a) **Calcular** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ **y** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ **en cada punto** $(x,y)\in\mathbb{R}^2$**.**

b) **Probar que** f **es de clase** C^1 **sobre** $\mathbb{R}^2$**.**

c) **Decidir si** f **es diferenciable en el origen.**

d) **¿Cuál es el valor máximo de la derivada direccional de** f **en el punto** $(1,1)$ **y cuál es su dirección?**

e) **¿Cuál es el valor de las derivadas direccionales** $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)$ **y** $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0)$ **si** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **tienen la dirección de los vectores** $2\hat{i}$ **y** $2\hat{j}$ **respectivamente?**

2. **Demostrar que en una vecindad del punto** $(-3,2,3)$ **la ecuación**

$$z^4-x^2z+9y=72$$

define una función $z=f(x,y)$ **tal que** $f(-3,2)=3$**. Además, encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel** $f(x,y)=3$ **en el punto** $(-3,2)$**.**

<u>Solución</u>:

1.

a) $\forall(x,y)\neq(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y^5}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}+3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{xy^2\left(3x^2+2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}-7$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3h+15-15}{h}=3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-7h+15-15}{h}=-7.$$

b) Si $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ y $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

En $(0,0)$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|\leq y^2\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$ y $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|\leq 3y^2+2|xy|\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$;

aquí, por lo anterior y haciendo uso del Teorema de sandwich, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Se tiene entonces que para cualquier punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Luego, f es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$.

c) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, luego f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y en particular en $(0,0)$.

d) El valor máximo de la derivada direccional de f en el punto $(1,1)$ es $\sqrt{\frac{245}{4} - 16\sqrt{2}}$ y está dado en la dirección de $\nabla f(1,1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3, \frac{5}{2\sqrt{2}} - 7\right)$.

e) $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -7$.

2. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $g(x,y,z) = z^4 - x^2 z + 9y - 72$; claramente g es de clase C^1 en el punto $(-3,2,3)$; como $g(-3,2,3) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial z}(-3,2,3) \neq 0$, se tiene entonces que la ecuación define a $z = f(x,y)$ como una función de clase C^1 cerca de $(-3,2)$.

La curva de nivel $f(x,y) = 3$ está dada por $x^2 - 3y - 3 = 0$; si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se define por $h(x,y) = x^2 - 3y - 3$ se tiene que la curva anterior puede reescribirse como $h(x,y) = 0$ y por lo tanto la ecuación de la recta tangente en el punto $(-3,2)$ está dada por

$$\nabla h(-3,2) \cdot (x+3, y-2) = 0;$$

es decir, la ecuación pedida es $2x + y + 4 = 0$.

1. Hallar los puntos de la curva de intersección entre las superficies

$$S_1 : x^2 - xz - y^2 + z^2 = 1 \quad \textbf{y} \quad S_2 : x^2 + z^2 = 1$$

que están más próximos y los que están más alejados del origen. Justificar antes la existencia de los puntos buscados.

2. Probar que la función $\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^3} dt$ **, definida** $\forall x \ge 0$ **es derivable.**

<u>Solución</u>:

1. Como S_2 es un cilindro de radio 1 cuyo eje es el y, entonces se tiene que $|x| \le 1$ y $|z| \le 1$; restando las ecuaciones se tiene que $y^2 = -xz$, por lo tanto $|y| \le 1$. Por tanto, $C := S_1 \cap S_2$ es conjunto compacto, pues corresponde a una curva acotada.

Sean $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x,y,z) = x^2 - xz - y^2 + z^2 - 1$ y $h(x,y,z) = x^2 + z^2 - 1$.

La continuidad de f y la compacidad de C, por el Teorema de los valores extremos aseguran la existencia de puntos en donde f alcanza extremos absolutos.

Lagrange,

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda_1(2x - z) + 2x\lambda_2, & (1)\\ 2y &= -2y\lambda_1, & (2)\\ 2z &= \lambda_1(2z - x) + 2z\lambda_2, & (3)\\ x^2 - xz - y^2 + z^2 &= 1, & (4)\\ x^2 + z^2 &= 1. & (5) \end{aligned}$$

Restando las ecuaciones (5) y (4), se tiene $xz + y^2 = 0 \quad (6)$

$$(1) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2x + \lambda_1(z - 2x)}{2x}, \; (3) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2z + \lambda_1(x - 2z)}{2z}$$

De $\frac{2x + \lambda_1(z - 2x)}{2x} = \frac{2z + \lambda_1(x - 2z)}{2z}$, se tiene que $z = \pm x$.

- De la ecuación (2) considerando $y \ne 0$, se tienen dos posibilidades

i) $z = x$ en $(6) \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \; (\rightarrow\leftarrow)$.

ii) $z=-x$ en $(6) \Rightarrow y=\pm x$; $z=-x$ en $(5) \Rightarrow z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se ha llegado entonces a los puntos $P_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,-1)$, $P_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,-1)$, $P_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,1)$ y $P_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,1)$.

- De la ecuación (2) considerando $y=0$, se tiene (6) que $xz=0$ o sea, $x=0 \vee z=0$.

  $x=0$ en la ecuación $(5) \Rightarrow z=\pm 1$, $z=0$ en la ecuación $(5) \Rightarrow x=\pm 1$.

  Se ha llegado ahora a los puntos

  $P_5=(0,0,1)$, $P_6=(0,0,-1)$, $P_7=(1,0,0)$, $P_8=(-1,0,0)$.

  Evaluando en f, $f(P_1)=f(P_2)=f(P_3)=f(P_4)=\frac{3}{2}$ y $f(P_5)=f(P_6)=f(P_7)=f(P_8)=1$.

  P_1, P_2, P_3, y P_4, puntos de la curva más alejados del origen.

  P_5, P_6, P_7, y P_8, puntos de la curva más cercanos al origen.

2. $\varphi(x)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^3}dt$, $x\in\mathbb{R}_0^+$.

i) Como $\frac{1}{1+t^3}\le\frac{1}{t^3}$, $\forall t\ge 1$ y $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^3}dt=\frac{1}{2}$; entonces $\varphi(0)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^3}dt$ converge.

ii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definidas por $f(x,t)=\frac{e^{-xt}}{1+t^3}$ y $f_x(x,y)=-\frac{t\,e^{-xt}}{1+t^3}$ son continuas $\forall(x,t)\in\mathbb{R}_0^+\times[1,\infty[$.

iii) Como $|f_x(x,t)|\le\frac{1}{t^2}$, $\forall(x,t)\in\mathbb{R}_0^+\times[1,\infty[$ y $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt=1$ entonces $\int_1^{+\infty}f_x\ (x,t)\ dt$ converge uniformemente con respecto a x en $\mathbb{R}_0^+$.

Por i), ii) y iii) según la regla de Leibniz se tiene que ϕ es derivable $\forall x\ge 0$.

1. **Siendo** $g(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(tx)}{x}, x\neq 0\\ t, x=0\end{cases}$. **Se define** $G(t)=\int_0^{\pi/2} g(x,t)dx$. **Calcular** $G'(t)$.

2.

a) **Demostrar que** $F(x)=\int_0^{+\infty} te^{-t}\cos(tx)\,dt$ **converge uniformemente para** $x\in[a,b]$.

b) **Hallar** $F(x)$ **sabiendo que** $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(tx)\,dt=\dfrac{x}{1+x^2}$.

<u>Solución</u>:

1. $\forall x\neq 0$, $g(x,t)=\dfrac{\sin(tx)}{x}$ es continua; para $x=0$, $\lim\limits_{(x,t)\to(0,t_0)} g(x,t)=\lim\limits_{(x,t)\to(0,t_0)} t\dfrac{\sin(tx)}{tx}=t_0$ y por lo tanto, $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,t_0)} g(x,t)=g(x_0,t_0)$ y así g es función continua $\forall(x,t)\in[0,\pi/2]\times\mathbb{R}$.

$\forall x\neq 0$: $g_t(x,t)=\cos(tx)$ es continua; para $x=0$, se tiene

$$g_t(0,t)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0,t+h)-g(0,t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,t_0)} g_t(x,t)=g_t(x_o,t_o)$ y g_t es continua $\forall(x,t)\in[0,\pi/2]\times\mathbb{R}$.

Luego $G'(t)=\int_0^{\pi/2}\cos(tx)\,dx=\dfrac{sen\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{t}$, para $t\neq 0$ y $G'(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{t}=\dfrac{\pi}{2}$.

2.

a) $F(x)=\int_0^{+\infty} te^{-t}\cos(tx)\,dt$, como $\left|te^{-t}\cos(tx)\right|\le te^{-t}$, $\forall(x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}_0^+$ y $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge, entonces $F(x)$converge uniformemente $\forall x\in[a,b]$.

b) Sea $G(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}\sin(tx)\,dt$; como $G(0)$ converge, $e^{-t}\sin(tx)$ y $te^{-t}\cos(tx)$ son continuas $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+$ y $\int_0^{+\infty} te^{-t}\cos(tx)\,dt$ converge uniformente $\forall x\in[a,b]$, se tiene que

$$G'(x)=\int_0^{\infty} te^{-t}\cos(tx)dt=F(x) \text{ y por lo tanto, } F(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

1. **Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, donde $f(x,y)=u(x,y)(ax+by)$ y u es una función continua en $(0,0)$, con $u(0,0)=3$. Calcular, si existen, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.**

2. **Sea la función $\varphi:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, donde $\phi(x,y)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{x^2y}\frac{\cos(x^2t)}{t}dt$. Decidir si $\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}},1\right)$ es un punto crítico para ϕ.**

3. **Sean $f(x,y)=xy+x-y+1$ y $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=2\}$. El Teorema de los valores extremos asegura que f posee un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto sobre D, hallar dichos valores.**

4. **Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ con un único punto crítico x_0 que es un mínimo local estricto, probar que x_0 corresponde a un mínimo absoluto. Puede considerarse $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, con $g(x,y)=-y^4-e^{-x^2}+2y^2\sqrt{e^x+e^{-x^2}}$ para mostrar que lo anterior no es válido para funciones de varias variables.**

a) **Mostrar que $(0,0)$ es el único punto crítico de g.**

b) **Utilizar el criterio de la matriz hessiana para mostrar que $(0,0)$ corresponde a un punto de mínimo relativo.**

c) **Verificar que g no posee mínimo absoluto.**

<u>Solución</u>:

1. $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)\cdot ah}{h}=3a,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(0,h)\cdot bh}{h}=3b.$$

2. $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x,t)=\dfrac{\cos(x^2t)}{t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-2x\sin(x^2t)$ son funciones continuas.

Para y fijo $u_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, u_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ y $u_2 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, u_2(x) = x^2 y$ son funciones de clase C^1; luego, de la regla general de Leibniz, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) &= \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + u_2'(x) f(x, u_2(x)) - u_1'(x) f(x, u_1(x)) \\
&= -2x \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{x^2 y} \sin(x^2 t)\ dt + \frac{2}{x}\cos(x^4 y) \\
&= \frac{2}{x}\left[2\cos(x^4 y) - \cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

Para x fijo, sea $H(y) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{y} \frac{\cos(x^2 t)}{t}\,dt$; por T.F.C. se tiene $H'(y) = \frac{\cos(x^2 y)}{y}$.

Como $\phi(x,y) = H(x^2 y)$ se tiene que $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = x^2 H'(x^2 y) = \frac{\cos(x^4 y)}{y}$.

Así, $\frac{\partial \phi}{\partial x}\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}, 1\right) = \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}, 1\right) = 0$ y por lo tanto $\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}, 1\right)$ es punto crítico para ϕ.

3. Sea $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$, usando multiplicadores de Lagrange, se tiene

$$
\begin{aligned}
y + 1 &= 2\lambda x \qquad (1) \\
x - 1 &= 2\lambda y \qquad (2) \\
g(x,y) &= 0 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Sumando (1) y (2) se tiene que $x + y = 2\lambda(x + y)$, de donde $y = -x$ o $\lambda = \frac{1}{2}$.

Si $y = -x$ se reemplaza en (3) se tiene que $x = -1$ ó $x = 1$.

Si $\lambda = \frac{1}{2}$ se reemplaza en (2) se tiene que $y = x - 1$, luego al reemplazar esta expresión en la ecuación (3) se tiene que $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ó $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se ha llegado entonces a los puntos

$$P_1=(-1,1)=-P_2,\ P_3=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } P_4=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Evaluando en la función, $f(P_1)=-2=-f(P_2)$, $f(P_3)=\frac{5}{2}=f(P_4)$.

De aquí se ve que los valores pedidos son -2 y $\frac{5}{2}$.

4. Si x_0 no fuera un mínimo absoluto, debería existir $\tilde{x}\in\mathbb{R}$, de modo que $f(\tilde{x})<f(x_0)$. Suponiendo que $\tilde{x}<x_0$, si se considera el valor máximo $f(c)$ de $f:[\tilde{x},x_0]\to\mathbb{R}$ (se sabe que dicho valor existe por el Teorema de los valores extremos), se tiene que $c\in\,]\tilde{x},x_0[$ y así $f'(c)=0$, luego c sería un punto crítico de f distinto de x_0 (contradicción).

a) De $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2xe^{-x^2}+y^2\frac{\left(e^x-2xe^{-x^2}\right)}{\sqrt{e^x+e^{-x^2}}}=0$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-4y^3+4y\sqrt{e^x+e^{-x^2}}=0$, se tiene que $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ se anulan solamente en $(0,0)$; luego, él es el único punto crítico de g.

b) $H(g(0,0))=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\sqrt{2}\end{pmatrix}$; como $\Delta_1>0$ y $\Delta_2>0$; $(0,0)$ es un mínimo relativo.

c) $g(0,y)=-y^4-1+2\sqrt{2}y^2$ y como $\lim\limits_{y\to} g(0,y)=-\lim\limits_{y\to\infty} y^4\left(1+\frac{1}{y^4}-\frac{2\sqrt{2}}{y^2}\right)=-\infty$, se tiene que g no posee mínimo absoluto.

1. Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro parabólico $z=4-y^2$ y los planos $y=2x$, $z=0$ y $x=0$.

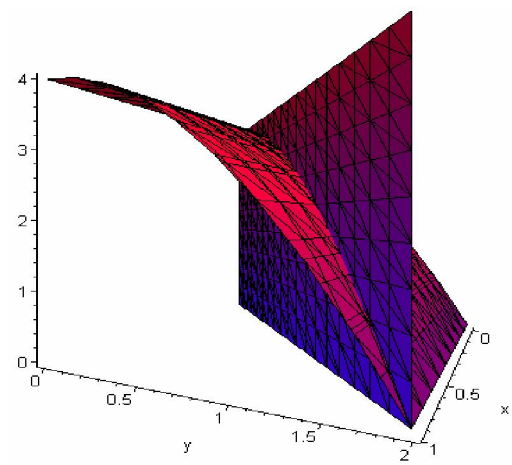
2. Para una función $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el área de la superficie $z=f(x,y)$ está dada por la integral doble

$$\iint_{D_f} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, d(x,y).$$

Calcular el área de la porción del cilindro parabólico $z=y^2$ cuya proyección en el plano xy corresponde al triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(8,1)$.

Solución:

1.



$$V = 2\int_0^1 \int_{2x}^2 \int_0^{4-y^2} 1\, dz\, dy\, dx = 4.$$

2. Sea S la superficie indicada, la proyección de S sobre el plano xy es

$$D=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\ 0\le x\le 8y\right\},$$

y la integral que calcula el área pedida es

$$A(S)=\iint_D \sqrt{1+4y^2}\, d(x,y)=\int_0^1\int_0^{8y}\sqrt{1+4y^2}\,dx\,dy=\frac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

1. **Sabiendo que** $\int_0^{\pi} \frac{dt}{x-\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}$**,** $\forall x \in \left]1,\infty\right[$**, calcular** $I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{(2-\cos t)^2}$**.**

2. **Sea** $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+x}$**, sin calcular la integral probar que** F **es continua sobre** $\left[1,\infty\right[$**.**

3. **Al calcular el volumen** V **limitado por encima por la superficie** $z = f(x,y)$ **y por la parte inferior por una región** S **del plano** xy**, se ha llegado a**

$$V = \int_1^2 \int_x^{x^2} f(x,y)dydx + \int_2^8 \int_x^8 f(x,y)\,dydx\,.$$

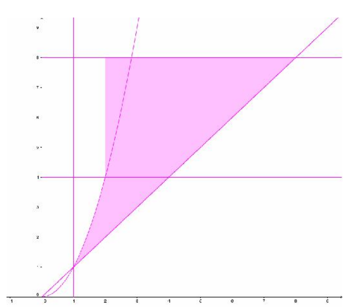
Dibujar S **y expresar** V **en *una* integral con el orden de integración invertido.**

Solución:

1. Sea $F(x) = \int_0^{\pi} \frac{dt}{x-\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}$, como $f(x,t) = \frac{1}{x-\cos t}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{(x-\cos t)^2}$ son continuas $\forall (x,t) \in \left]1,\infty\right[\times [0,\pi]$, por Leibniz, se tiene $F'(x) = -\int_0^{\pi} \frac{dt}{(x-\cos t)^2}$. Por otra parte, como $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -\frac{\pi x}{(x^2-1)^{3/2}}$, se tiene que $I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

2. Como $\frac{1}{t^2+x} \le \frac{1}{t^2+1}$, $\forall x \ge 1$ y $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, según el criterio Weierstrass se tiene que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+x}$ converge uniformemente para x en $\left[1,\infty\right[$; luego, F es función continua en $\left[1,\infty\right[$.

3.



$$V = \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^{y} f(x,y)\,dxdy + \int_4^8 \int_2^{y} f(x,y)\,dxdy\,.$$

1. **Sea** $F(x)=\int_0^{x^4}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{x^4}\right)dt$**,** $\forall x\in\mathbb{R}^+$**. Calcular** $F'(x)$**.**

2. **Sea** $F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)\,dt$**,** $\forall x\in\mathbb{R}$**. Mostrar que** $F'(x)=\int_0^{+\infty}te^{-t^2}\cos(tx)\,dt$**,** $\forall x\in\mathbb{R}$**.**

Solución:

1. $u_1:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}, u_1(x)=0$ y $u_2:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}, u_2(x)=x^4$ son de clase C^1. Las funciones $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x,t)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{x^4}\right)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\frac{4x^3t}{x^8+t^2}$ son continuas $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}_0^+$.

$$F'(x)=\int_0^{x^4}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt+u_2'(x)\cdot f(x,u_2(x))-u_1'(x)\cdot f(x,u_1(x))$$

$$F'(x)=-4\int_0^{x^4}\frac{x^3t}{x^8+t^2}\,dt+4x^3\cdot f(x,x^4)-0\cdot f(x,0)=x^3(\pi-2\ln 2).$$

2.

i) $F(0)$ converge.

ii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x,t)=e^{-t^2}\sin(tx)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=te^{-t^2}\cos(tx)$ son funciones continuas $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+$.

iii) Como $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\le te^{-t^2}$ y $\int_0^{+\infty}te^{-t^2}dt$, entonces $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ converge uniformemente con respecto a $x\in\mathbb{R}$.

Por i), ii) y iii), según regla de Leibniz se tiene que $F'(x)=\int_0^{+\infty}te^{-t^2}\cos(tx)\,dt$.

1. **Evaluar** $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$**.**

2. **Calcular** $\iint_E x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,d(x,y)$ **donde** E **es la región del primer cuadrante acotada por** $x^3+y^3=1$ **y los ejes coordenados.**

3. **Para la función** $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ **y la región** R **del plano limitada por las rectas** $y=x$**,** $y=0$ **y** $x=1$**. Analizar la convergencia de** $\iint_R f(x,y)\,d(x,y)$**.**

Solución:

1. Cambio de variable (simple), $t=\sqrt{x+y}$, $dt=\dfrac{dy}{2\sqrt{x+y}}$, $\sqrt{x+y}\,dy=2t^2dt$;

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 2t^2\left(t^2-3x\right)^2\,dt\,dx=\frac{2}{9}$$

2. $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1\wedge 0\le y\le\sqrt[3]{1-x^3}\right\}$,

$$\iint_E x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,d(x,y)=\int_0^1\int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dydx=\frac{4}{135}.$$

3. $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1\wedge 0\le y\le x\right\}$, f es positiva y no acotada en R. Al considerar recubrimiento $R_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\dfrac{1}{n}\le x\le 1\wedge 0\le y\le x\right\}$ se tiene $R_n\subseteq R_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{+\infty}\overset{\circ}{R}_n=\overset{\circ}{R}$.

$$\iint_{R_n} f(x,y)\,d(x,y)=\int_{1/n}^1\int_0^x\frac{y}{x}dy\,dx=\frac{1}{2}\int_{1/n}^1 x\,dx=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\text{ y }\lim_{n\to+\infty}\iint_R f(x,y)\,d(x,y)=\frac{1}{4}.$$

1. Considerar la función $f(x,y) = x^2 + \sin(\pi y)$.

a) Calcular la integral de f sobre el rectángulo $R = [-1,1] \times [-1,1]$ y sobre la región R_1 acotada por las rectas $y = x$, $y = -x$, $y = -1$ e $y = 1$.

b) Integrar f sobre la región R_2 acotada $y = x$, $y = -x$, $x = -1$ y $x = 1$.

2. Calcular $\int_0^2 \int_0^{\frac{y^2}{2}} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy$.

3. Calcular el volumen de la región D del primer octante acotada por el cilindro $z = 4 - y^2$ y el plano $3x + 4y = 12$.

Solución:

1.

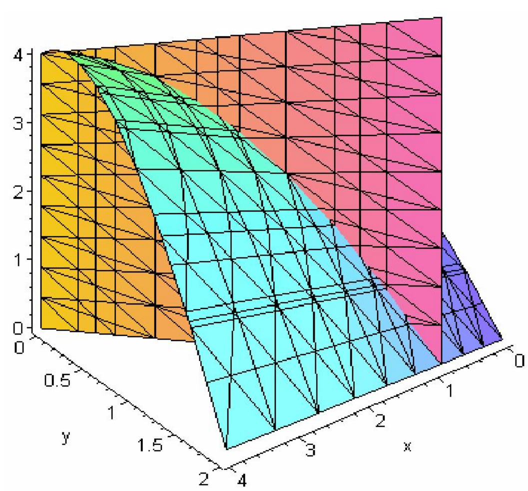
a) $$\iint_R f(x,y)\ d(x,y) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(x^2 + \sin(\pi y)\right) dy\ dx = \frac{4}{3},$$

$$\iint_{R_1} f(x,y)\ d(x,y) = \int_{-1}^{0} \int_{y}^{-y} \left(x^2 + \sin(\pi y)\right) dx\ dy + \int_{0}^{1} \int_{-y}^{y} \left(x^2 + \sin(\pi y)\right) dx\ dy = \frac{1}{3}.$$

b) $$\iint_{R_2} f(x,y)\, d(x,y) = \iint_R f(x,y)\, d(x,y) - \iint_{R_1} f(x,y)\, d(x,y) = 1.$$

2. $$\int_0^2 \int_0^{\frac{y^2}{2}} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_0^2 \int_{\sqrt{2x}}^{2} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dy dx = \frac{5}{4}\ln 5 - 1.$$

3.



$$V = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^{\frac{4}{3}(3-y)} 1\, dx\, dz\, dy = 16.$$

1. **Si** $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$**, calcular la integral doble** $\iint\limits_D (x^4+y^4)\,d(x,y)$ **antes transformándola en una integral de línea.**

2. **Sean** F **el campo vectorial** $F(x,y,z)=\left(x^2-yz\right)\hat{i}+\left(y^2-xz\right)\hat{j}+\left(z^2-xy\right)\hat{k}$ **y** Γ **la curva que se encuentra en el primer octante como intersección entre los cilindros** $x^2+z^2=1$ **e** $y^2+z^2=1$**. Fijar una orientación para** Γ **y calcular** $W=\int_\Gamma F\cdot dr$**.**

Solución:

1. Una parametrización para $Fr(D)$ es $C(t)=\left(a\cos(t),b\sin(t)\right)$, $t\in[0,2\pi]$ (recorrida en sentido antihorario). Del Teorema de Green, considerando $p(x,y)=-x^4y$ y $q(x,y)=xy^4$,

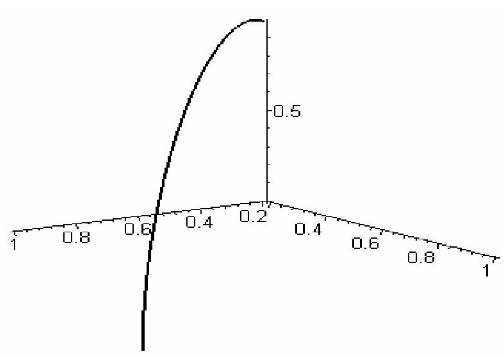
$$\iint\limits_D\left(x^4+y^4\right)d(x,y)=\iint\limits_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right)d(x,y)=\oint\limits_{Fr(D)}p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy.$$

Evaluando la integral de línea por definición, se tiene que

$$\int_0^{2\pi}\left(-a^4\cos^4(t)\,b\sin(t),a\cos(t)\,b^4\sin^4(t)\right)\cdot\left(-a\sin(t),b\cos(t)\right)dt=\frac{\pi}{8}ab\left(a^4+b^4\right)$$

y por lo tanto, $\iint\limits_D\left(x^4+y^4\right)d(x,y)=\dfrac{\pi}{8}ab\left(a^4+b^4\right)$.

2. Un potencial para F es el campo escalar $f(x,y,z)=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}-xyz$.



Considerando la curva orientada hacia abajo, se tiene que $P_i=(0,0,1)$ y $P_f=(1,1,0)$; por tanto, el trabajo realizado es $W=\int\limits_C\nabla f\cdot dr=f\left(P_f\right)-f\left(P_i\right)=\dfrac{1}{3}$.

1. Evaluar la integral triple $\iiint\limits_T xyz\left(x^4 - y^4\right)d\left(x,y,z\right)$**, donde**

$$T = \left\{\left(x,y,z\right) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 - y^2 \le 2, 3 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le z \le 1, x \ge 0, y \ge 0\right\}.$$

2. Calcular $\oint\limits_C \left(x+2y\right)dx + ydy$**, si** C **es la elipse** $x^2 + 4y^2 = 1$**.**

Solución:

1. $1 \le u = x^2 - y^2 \le 2$, $3 \le v = x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le w = z \le 1$,

$$\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(u,v,w\right)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{8xy} \;;\; \iiint\limits_T xyz\left(x^4 - y^4\right)d\left(x,y,z\right) = \frac{1}{8}\int_1^2\int_3^4\int_0^1 w\,u\,v\,dw\,dv\,du = \frac{21}{64}.$$

2. Considerando $p\left(x,y\right) = x + 2y$ y $q\left(x,y\right) = y$ para aplicar el Teorema de Green, se tiene

$$\oint\limits_C \left(x+2y\right)dx + ydy = \iint\limits_R \left(\frac{\partial q}{\partial x}\left(x,y\right) - \frac{\partial p}{\partial y}\left(x,y\right)\right)d\left(x,y\right) = -2\iint\limits_R d\left(x,y\right) = -2\,\acute{A}rea\left(R\right).$$

Donde R es la región encerrada por la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$. Como el área encerrada por una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es $ab\pi$; aquí, se tiene $\oint\limits_C \left(x+2y\right)dx + ydy = -\pi$.

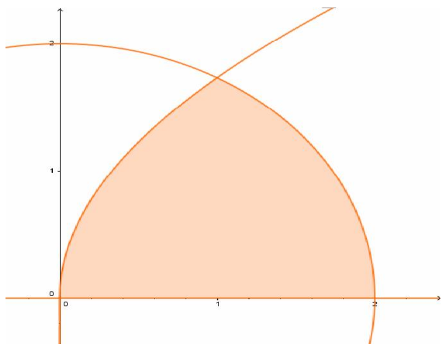
Observación: Puede considerarse $C\left(t\right) = \left(\cos\left(t\right), \frac{1}{2}\sin\left(t\right)\right)$, $t \in \left[0,2\pi\right]$ y no el teorema.

1. **Calcular** $\iint_R (x+y)\,d(x,y)$**, donde** R **es la región del primer cuadrante interior a la circunferencia** $x^2+y^2=4$ **y está acotada por** $y=0$ **e** $y=\sqrt{3x}$**.**

2. **Si** $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\ge 1, 0\le x\le 2y\right\}$**, evaluar** $\iint_S \dfrac{y}{\left(x^2+y^2+1\right)^2\left(x^2+y^2\right)}\,d(x,y)$**.**

Solución:

1.



$$\iint_R (x+y)\,dA=\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\frac{y^2}{3}}^{\sqrt{4-y^2}}(x+y)\,dx\,dy=\frac{7}{5}\sqrt{3}+\frac{19}{12}.$$

2. El conjunto S no es acotado $\mathbb{R}^2$ y f no cambia de signo en S; al considerar

$$S_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le n^2, 0\le x\le 2y\right\},$$

con $n\in\mathbb{N}^*$, se tiene que $S_n\subseteq S_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty}\overset{\circ}{S}_n=\overset{\circ}{S}$. Usando coordenadas polares se tiene

$$\iint_{S_n}\frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^2\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\,d(x,y)=\int_{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^n\frac{r\sin(\theta)}{\left(1+r^2\right)^2}\,dr\,d\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2+1}\right);$$

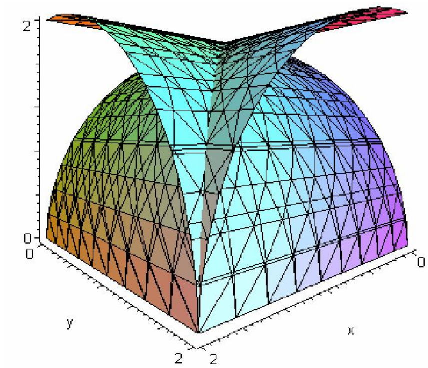
de donde, $\iint_S f(x,y)\,d(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

1. **Calcular el volumen acotado por** $x^2+z^2=4$ **e** $y^2+z^2=4$ **que está sobre el plano** xy**.**

2. **Sea** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 1\}$**. ¿Para qué valores de** $p>0$**,** $\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^p}d(x,y)$ **converge?**

Solución:

1. En el primer octante:



La proyección del volumen en el primer octante sobre el plano yz está dada por el conjunto $D=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq z\leq 2, 0\leq y\leq\sqrt{4-z^2}\}$; de donde, $V=4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}\int_0^{\sqrt{4-z^2}} 1\,dx\,dy\,dz=\frac{64}{3}$.

2. $f(x,y)=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^p}\geq 0$. Para $D_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x^2+y^2\leq n^2\}$, con $n\in\mathbb{N}^*$ puede verse que $D_n\subset D_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{+\infty}\mathring{D}_n=\mathring{D}$, usando coordenadas polares;

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,d(x,y)=\int_0^{2\pi}\int_1^n \frac{r}{(1+r^2)^p}\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left.\frac{(1+r^2)^{1-p}}{2(1-p)}\right|_1^n=\frac{\pi}{1-p}\left[(1+n^2)^{1-p}-2^{1-p}\right].$$

Luego, $\iint_D f(x,y)\,d(x,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{1-p}\left[(1+n^2)^{1-p}-2^{1-p}\right]$, $p\neq 1$.

De lo anterior, si $p<1$ la integral diverge y si $p>1$ $\iint_D f(x,y)\,d(x,y)$ converge.

Si $p=1$, $\iint_D f(x,y)\,d(x,y)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\ln(1+r^2)\right]\Big|_1^n\right\}d\theta=\infty$ (la integral diverge).

1. Calcular el volumen del primer octante que se encuentra acotado por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ y los planos $z = y$, $x = 0$ y $z = 0$.

2. Calcular el volumen de la región del espacio *interior* al cilindro $x^2 + y^2 = 4$ acotada superiormente por el cono $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e inferiormente por el plano xy .

3. Evaluar $\oint\limits_C \left(z\cos\left(xz\right) + y\right)dx + x\,dy + \left(x\cos\left(xz\right)\right)dz$, donde C es la intersección de las superficies $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = -2 + 2x^2 + y^2$.

Solución:

1. $V = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^y 1\,dz\,dy\,dx = 4$.

2. Al utilizar coordenadas cilíndricas, se tiene que $V_{Lápiz} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2} \int\limits_0^{16-r} r\,dz\,dr\,d\theta = \dfrac{176\pi}{3}$.

3. Sea $F(x,y,z) = (z\cos(xz) + y, x, x\cos(xz))$, como $\nabla \times F(x,y,z) = (0,0,0)$ y F es clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ se tiene que F es un campo conservativo en $\mathbb{R}^3$; como C es una curva cerrada se tiene que $\oint\limits_C F \cdot dr = 0$.

1. Sea R la región sólida encerrada por la esfera con centro en el origen y radio $\sqrt{2}$ y sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Considerar la integral triple $\iiint_R xz^2 dV$. Sin evaluar la integral, escribirla como integrales iteradas, usando coordenadas rectangulares y luego coordenadas cilíndricas.

2. Usar el cambio $u = x + y,\ v = x - y$ para calcular $\iint_D (x+y)\cos(x^2 - y^2)\, d(x,y)$, donde D es la región acotada por las rectas $y = -x,\ y = -x + \pi/2,\ y = x,\ y = x + 1$.

3. Si $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \le 1\}$, calcular la integral $\iiint_S \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} d(x,y,z)$.

Solución:

1. Al reemplazar $z = x^2 + y^2$ en $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, se tiene que $z^2 + z - 2 = 0$, ecuación cuya única solución positiva es $z = 1$. Así la curva de intersección entre ambas superficies es la circunferencia de intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = 1$, luego la proyección de R sobre el plano $z = 0$ es $x^2 + y^2 \le 1$.

$$\iiint_R xz^2 dV = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xz^2 dz\, dy\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r^2 z^2 \cos(\theta)\, dz\, dr\, d\theta .$$

2. $$0 \le u = x + y \le \frac{\pi}{2},\ -1 \le v = x - y \le 0\ ;\ \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left\| \begin{matrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{matrix} \right|^{-1} \right| = \frac{1}{2},$$

$$\iint_D (x+y)\cos(x^2 - y^2)\, d(x,y) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^{0} u \cos(uv) dv du = \frac{1}{2}.$$

3. $$\iiint_S \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} dz\, dy\, dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{5}{16}.$$

1. **Evaluar la integral doble $\int_0^1 \int_y^1 \tan\left(x^2\right) dx\, dy$.**

2. **Calcular $\iint_D e^{4x^2+9y^2-36y+36} d\left(x,y\right)$ donde E es la región interior a $4x^2+9y^2=36y$.**

3. **Calcular el volumen de la región *exterior* al cilindro $x^2+y^2=4$ que se encuentra acotada superiormente por el cono $z=16-\sqrt{x^2+y^2}$ e inferiormente por el plano xy .**

<u>Solución</u>:

1. $\int_0^1 \int_y^1 \tan\left(x^2\right) dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x \tan\left(x^2\right) dy\, dx = -\dfrac{\ln\left(\cos\left(1\right)\right)}{2}$.

2. $4x^2+9y^2=36y \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{\left(y-2\right)^2}{4}=1$

Al considerar el cambio dado por $x=3r\sin\left(\theta\right)$, $y=2r\cos\left(\theta\right)+2$, cuyo jacobiano está dado por $\dfrac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\theta\right)}=6r$, la región interior a la elipse se describe como $0\le r\le 1$ y $0\le\theta<2\pi$, y por lo tanto, $\iint_E e^{4x^2+9y^2-36y+36} d\left(x,y\right)=\int_0^{2\pi}\int_0^1 6r\, e^{36r^2} dr d\theta=\dfrac{\pi}{6}\left(e^{36}-1\right)$.

Observación: Una *alternativa* a utilizar coordenadas elipsoidales trasladadas para calcular esta integral es considerar: Primero, la traslación $x=u$ e $y=v+2$; luego el cambio $z=\dfrac{u}{3}$ y $w=\dfrac{v}{2}$ y a continuación coordenadas polares.

3. La proyección del volumen sobre el plano xy, corresponde al anillo

$$\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : 4\le x^2+y^2\le 256\right\}.$$

Dado que el volumen tiene como base al plano $z=0$ y como *techo* al cono, se tiene que $0\le z\le 16-\sqrt{x^2+y^2}$; al utilizar coordenadas cilíndricas, se obtiene

$$V=\int_0^{2\pi}\int_2^{16}\int_0^{16-r} r\, dz\, dr\, d\theta=\frac{3920\pi}{3}.$$

1. **Si $\delta:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la densidad de un objeto ocupa una región D en el espacio, entonces la *masa total* (o simplemente masa) de D está dada por la integral triple**

$$M(D) = \iiint_D \delta(x,y,z)\, d(x,y,z).$$

La región R, se encuentra acotada por los cilindros $x^2 = 4z+4$ e $y^2 = -4z+4$, tiene densidad definida por $\delta(x,y,z) = z^2$, hallar la masa de R.

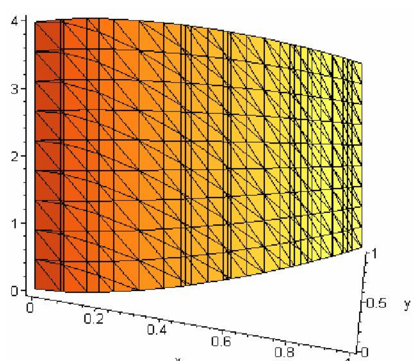
2. **Sea $F(x,y,z) = (yz, x, -z^2)$ y S la superficie definida por $y = x^2$ donde $0 \le x \le 1$ y $0 \le z \le 4$. Calcular $\iint_S F \cdot \hat{n}\, dS$ precisando una orientación para S.**

Solución:

1. $R = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{4} - 1 \le z \le 1 - \dfrac{y^2}{4} \right\}$ (ver gráfico del problema 7 de la página 54). La proyección de R en el plano xy corresponde a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 8\}$; y

$$M(R) = \iiint_R z\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} \int_{\frac{r^2\cos^2(\theta)}{4}-1}^{1-\frac{r^2\sin^2(\theta)}{4}} z^2 r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi .$$

2.



$\phi(x,z) = (x, x^2, z)$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$. Una orientación para S es $\vec{n}(x,y) = (2x, -1, 0)$;

y $\iint_S F \cdot \hat{n}\, dS = \iint_D (x^2 z, x, -z^2) \cdot (2x, -1, 0)\ d(x,y) = 2$.

1. Evaluar la integral doble $\int_1^{10}\int_{\sqrt{y-1}}^{3} 3e^{x^3}\,dx\,dy$**.**

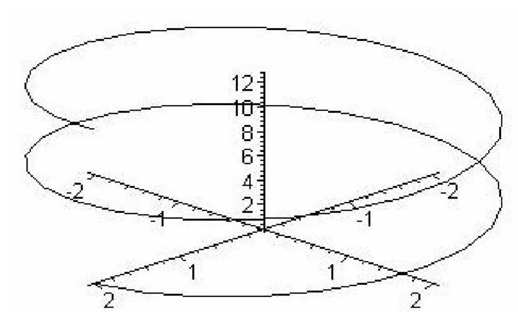
2. Sea $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$**, el campo definido por** $F(x,y,z)=2xy\hat{\imath}+(x^2+1)\hat{\jmath}+6z^2\hat{k}$ **y** C **la curva de ecuación** $C(t)=(2\cos(t),2\sin(t),t)$**, con** $t\in[0,4\pi]$**. Calcular** $\int_C F\cdot dr$**.**

3. Calcular la integral de línea del campo vectorial $F=(p,q)$**, donde** $p(x,y)=xy$ **y** $q(x,y)=x-y$ **sobre la curva que corresponde a la frontera (orientada en sentido antihorario) del dominio** $R=[0,1]\times[1,3]$**.**

Solución:

1. $\int_1^{10}\int_{\sqrt{y-1}}^{3} 3e^{x^3}\,dx\,dy=\int_0^{3}\int_1^{x^2+1} 3e^{x^3}\,dy\,dx=e^{27}-1$.

2.



$P_f=(2,0,4\pi)$, $P_i=(2,0,0)$, $F\in C^1(\mathbb{R}^3)$. Como $\nabla\times F=(0,0,0)$ y existe f tal que $\nabla f=F$.

Un potencial para F es $f(x,y,z)=(x^2+1)y+2z^3$, luego $\int_C F\cdot dr=f(P_f)-f(P_i)=128\pi^3$.

3. Por Teorema de Green, se tiene que

$$\oint_{\partial R} F\cdot dr=\iint_R\left[\frac{\partial q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right]d(x,y)=\int_0^1(1-x)\,dx\cdot\int_1^3 dy=1.$$

1. Sea D un dominio simplemente conexo del plano y f un campo escalar clase C^2 en D tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. Mostrar que $\int_C \frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx=0$ a lo largo de toda curva de Jordan seccionalmente continua suave contenida en D.

2.

a) Utilizar el Teorema de Green probar que el área de la región R interior a una curva de Jordan C seccionalmente suave de clase C^1 está dada por

$$Área(R)=\frac{1}{2}\left[\int_C -ydx+xdy\right].$$

b) Sean $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ y C el segmento orientado $[P_1,P_2]$. Verificar que

$$\int_C -ydx+xdy=x_1y_2-x_2y_1.$$

c) Sean $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$,..., $P_n(x_n,y_n)$ los vértices de un polígono simple. Demostrar que el área encerrada es por él es

$$\frac{1}{2}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\ldots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(x_ny_1-x_1y_n)\right].$$

3. Calcular el área encerrada por la astroide de ecuación $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Solución:

1. Considerando, $p=-\frac{\partial f}{\partial y}$ y $q=\frac{\partial f}{\partial x}$, al aplicar el Teorema de Green se tiene que

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=\iint_D\left[\frac{\partial q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right]d(x,y)$$

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=\iint_D\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right]d(x,y)=0$$

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=0.$$

2.

a) Considerando $p(x,y) = -y$ y $q(x,y) = x$, aplicando el Teorema de Green, se tiene

$$\frac{1}{2}\left[\int_C -ydx + xdy\right] = \frac{1}{2}\iint_R \left[\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right] d(x,y) = \iint_R d(x,y) = \acute{A}rea(R).$$

b) Una parametrización del segmento C es $(x(t), y(t)) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$, $t \in [0,1]$ de donde $dx = (x_2 - x_1)\, dt$ y $dy = (y_2 - y_1)\, dt$, luego,

$$\int_C -ydx + xdy = \int_0^1 [x_1y_2 - x_2y_1]dt = x_1y_2 - x_2y_1.$$

c) El polígono puede describirse como $C_T = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ (donde C_i es el segmento orientado desde P_i hasta P_{i+1} con $i = 1,2,\ldots,n-1$ y C_n corresponde al segmento orientado desde P_n hasta P_1). Si R es la región encerrada por el polígono C_T, de la parte a), se tiene

$$\acute{A}rea(R) = \frac{1}{2}\left[\int_{C_T} -ydx + xdy\right].$$

Además, como $\oint_{C_T} -ydx + xdy = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{C_i} -ydx + xdy\right)$, de la parte b) se tiene que

$$\acute{A}rea(R) = \frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)\right].$$

3. Al considerar la parametrización para la astroide dada por $C(t) = \left(a\cos^3(t), a\sin^3(t)\right)$, donde $t \in [0, 2\pi]$ y el campo vectorial $F(x,y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$ se tiene que

$$\oint_C F \cdot dr = \frac{3}{8}a^2\pi.$$

Del resultado de la parte a) del problema 2, el área encerrada por la astroide es $\frac{3}{8}a^2\pi$.

1. Calcular el volumen acotado por las superficies $y=-1$, $y=x^2+z^2$ y $x^2+z^2=\pi^2$.

2. Calcular, mediante el Teorema de Stokes, la integral curvilínea

$$I=\oint_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz\,,$$

donde C es la intersección entre $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ y los planos coordenados orientada en sentido antihorario, aquí a, b y c son constantes positivas.

3. Dado el campo vectorial $F(x,y,z)=\left(x^2+\sin(z)\right)\hat{i}+\left(xy+\cos(z)\right)\hat{\jmath}+e^y\hat{k}$, utilizar el Teorema de Gauss para evaluar $\iint_S F\cdot\hat{n}dA$, donde S limita al sólido acotado por el plano xy, el cilindro $x^2+y^2=4$ y el plano $x+z=6$ y $\hat{n}$ es la normal exterior a S.

Solución:

1. Considerando las *coordenadas polares* dadas por $x=r\cos(\theta)$ y $z=r\sin(\theta)$, se tiene que

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r\left(r^2+1\right)dr\,d\theta=\frac{1}{2}\left(\pi^2+2\right)\pi^3.$$

2. S puede parametrizarse por $\phi(x,y)=\left(x,y,c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\right)$, donde el dominio de esta es $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right\}$ y el vector normal es $\vec{n}=\left(\frac{c}{a},\frac{c}{b},1\right)$.

El campo vectorial $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definido por $F(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$ es de clase C^1 sobre la superficie suave S y su borde C (también suave), por lo cual es aplicable el Teorema de Stokes; luego,

$$\oint_F F\cdot dr=\iint_S \nabla\times F(x,yz)\cdot\hat{n}dS=-2\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\right)\text{Área}(D)=-(ab+bc+ca).$$

3. S es cerrada y seccionalmente suave y $F(x,y,z)=\left(x^2+\sin(z)\right)\hat{i}+\left(xy+\cos(z)\right)\hat{j}+e^y\hat{k}$ es clase C^1 en S y en el volumen V (encerrado por S); es aplicable el Teorema de Gauss; y

$$\iint_S F\cdot\hat{n}\,dA=\iiint_V \nabla\cdot F(x,y,z)\,d(x,y,z)=\iiint_V 3x\,d(x,y,z)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{6-r\cos(\theta)} 3r^2dz\,dr\,d\theta=-12\pi.$$

1. **Calcular el volumen acotado superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente por $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.**

2. **Considerar el campo vectorial $F(x,y) = \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{y-x}{x^2+y^2} \right)$.**

a) **Calcular la integral de línea $\int_C F \cdot dr$, donde C es la trayectoria:**

i) $C(t) = (1+t^2, 1+t^4),\ 0 \le t \le 1$. **<u>Indicación</u>: Considerar $f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right)$.**

ii) **La circunferencia de radio r y centro en el origen, recorrida sentido antihorario.**

b) **¿Es conservativo el campo F ?**

Solución:

1. $z = 0 \to \rho\cos(\varphi) = 0 \to \varphi = \frac{\pi}{2}$,

$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \to \rho^2 \sin^2(\varphi)\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\varphi)\sin^2(\varphi) + \rho^2\cos^2(\varphi) = 4 \to \rho = 4$,

$z = \sqrt{3x^2+3y^2} \to \rho\cos(\varphi) = \sqrt{3\rho^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta) + 3\rho^2\sin^2(\varphi)\sin^2(\theta)} \to \varphi = \frac{\pi}{6}$,

$$V_{Barquillo} = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \rho^2 \sin(\varphi)\, d\varphi\, d\theta\, d\rho = \frac{64\sqrt{3}\pi}{3}.$$

2.

a)

i) La curva está contenida en el primer cuadrante (región simplemente conexa) y ahí el campo F es conservativo pues $\nabla f = F$; luego,

$$\int_C F \cdot ds = f(2,2) - f(1,1) = \ln(2).$$

ii) Una parametrización de la circunferencia indicada es $(x(t), y(t)) = (r\cos(t), r\sin(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ y al usarla para evaluar la integral se tiene $\int_C F \cdot ds = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$.

b) No, pues existe una curva cerrada cuya integral de línea del campo F es no nula.

PROBLEMAS TIPO CERTAMEN

1. **Sea** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-y} & ,\text{si } y\neq x^2 \\ x & ,\text{si } y=x^2 \end{cases}$

a) **Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de** f **en** $(0,0)$.

b) **Estudiar la diferenciabilidad y continuidad de** f **en el punto** $(1,2)$.

c) **Siendo** S **el gráfico de** f **y** $P_0=(1,2,-1)\in S$ **encontrar la ecuación del plano tangente y un vector normal a** S **en** P_0.

d) **¿En qué dirección crece más rápidamente** f **en** $(1,2)$ **y cuál es esa tasa de crecimiento?**

2. **Sea** $z(x,y)=f(xy)+\sqrt{xy}\,g\left(\dfrac{x}{y}\right)$**, definida para** $x>0$, $y>0$**; con** f **y** g **funciones con segundas derivadas continuas. Decidir si** z **satisface la ecuación en derivadas parciales**

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

3. **Sea la función** $f(x,y,z)=x^2z+y^2z+\dfrac{2}{3}z^3-4x-4y-10z+1$**, indicando la temperatura en cada punto del espacio.**

a) **Determinar y clasificar los puntos críticos de** f.

b) **¿Cuál es el punto de** $D=\left\{(x,y,1)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 9\right\}$ **con la mayor temperatura?**

4. **Considerar todos los triángulos rectángulos de perímetro** P**. Hallar las dimensiones de los lados de manera que se obtenga el triángulo rectángulo de mayor área.**

5. **Dos esferas de radio se intersectan de modo que cada una contiene al centro de la otra. Calcular el volumen de la región acotada por ambas esferas.**

Desarrollo:

1.

a) $(x,y)\in T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2-x^3\right\}\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1\neq f(0,0)=0$;

f no es continua en $(0,0)$ y f no es diferenciable en $(0,0)$.

b) $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x^4-3x^2y}{\left(x^2-y\right)^2}\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^3}{\left(x^2-y\right)^2}\end{array}\right\}\ \text{funciones continuas } \forall(x,y)\in A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq x^2\right\}.$$

f es C^1 $\forall(x,y)\in A$. Como $P=(1,2)\in A$ entonces f es diferenciable y continua en $(1,2)$.

c) Como f es diferenciabla en el punto P, la ecuación del plano tangente a S en el punto en P_0 está dada por $5x-y+z=2$ y un vector normal a S en P_0 es $\vec{n}=(5,-1,1)$.

d) En la dirección de $\nabla f(1,2)=-5\hat{i}+\hat{j}$, la razón es $\sqrt{26}$.

2. $$z=f(xy)+x^{1/2}y^{1/2}g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\,f'(xy)+\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}g\left(\frac{y}{x}\right)-x^{-3/2}y^{3/2}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\,f''(xy)-\frac{1}{4}x^{-3/2}y^{1/2}g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}x^{-5/2}y^{3/2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{3}{2}x^{-5/2}y^{3/2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+x^{-7/2}y^{5/2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x^2y^2\,f''(xy)-\frac{1}{4}x^{1/2}y^{1/2}g\left(\frac{y}{x}\right)-x^{-1/2}y^{3/2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+x^{-3/2}y^{5/2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\,f'(xy)+\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}g\left(\frac{y}{x}\right)+x^{-1/2}y^{1/2}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\,f''(xy)-\frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2}g\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{-1/2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{-1/2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+x^{-3/2}y^{1/2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2y^2\,f''(xy)-\frac{1}{4}x^{1/2}y^{1/2}g\left(\frac{y}{x}\right)+x^{-1/2}y^{3/2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+x^{-3/2}y^{5/2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

De aquí puede verse que $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)=y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)$ y por tanto, z sí satisface la ecuación diferencial parcial dada.

3.

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2xz-4=0 \qquad \Rightarrow \quad x=2/z \qquad (1)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2yz-4=0 \qquad \Rightarrow \quad y=2/z \qquad (2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-10=0 \ \Rightarrow \ x^2+y^2+2z^2=10 \qquad (3)$

(1) y (2) en (3) $\Rightarrow (z^2-1)(z^2-4)=0$; hay 4 puntos $P_1=(1,1,2)=-P_2$, $P_3=(2,2,1)=-P_4$.

Como, $Hf(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 2z & 2y \\ 2x & 2y & 4z \end{pmatrix}$, se tiene

Punto	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Naturaleza
P_1	positivo	positivo	positivo	Mínimo relativo
P_2	negativo	positivo	negativo	Máximo relativo
P_3	positivo	positivo	negativo	Silla
P_4	negativo	positivo	positivo	Silla

b)

- En el conjunto $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<9, z=1\}$ el único punto crítico es el punto P_3.

- Una parametrización de $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=9, z=1\}$ es $x=\cos(t)$, $y=\sin(t)$, $z=1$,

  donde $t\in[0,2\pi]$; la función f puede ser escrita como una función g de una variable:

  $g(t)=\frac{2}{3}-12(\cos(t)+\sin(t))$; $g'(t)=0 \Rightarrow \tan(t)=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$ o $t=\frac{5}{4}\pi$.

  De $t=\frac{\pi}{4}$, se tiene $P_5=\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2},1\right)$, de $t=\frac{5\pi}{4}$ se tiene $P_6=\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2},-\frac{3}{2}\sqrt{2},1\right)$ y de

  $t=0$ se tiene el punto $P_7=(3,0,1)$.

- Evaluando, se tiene que $f(P_5)=\frac{2}{3}-12\sqrt{2}$, $f(P_6)=\frac{2}{3}+12\sqrt{2}$, $f(P_7)=-\frac{34}{3}$, $f(P_3)=-7$; así, la mayor temperatura se alcanza en P_6.

4. Sean x e y las longitudes de los catetos. El área está dada por $A(x,y)=\dfrac{xy}{2}$, esta función debe maximizarze dada la condición $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=P$.

Sea $g(x,y)=x+y+\sqrt{x^2+y^2}-P$. Al usar multiplicadores de Lagrange se tiene el sistema definido por $\nabla f(x,y)=\lambda\,\nabla g(x,y)$ y $g(x,y)=0$.

Hay 3 ecuaciones: $\dfrac{y}{2}=\lambda\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ (1), $\dfrac{x}{2}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ (2) y $g(x,y)=0$. (3)

Al dividir la ecuación (1) por la (2) se llega a $(x-y)\left(1+\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$, de aquí se tiene que $x=y$; reemplazando en la ecuación (3) se tiene $x=y=\dfrac{P}{2+\sqrt{2}}$.

5. Pueden considerarse las esferas $S_1: x^2+y^2+z^2=16$ y $S_2: x^2+y^2+(z-4)^2=16$. Al restar las ecuaciones se obtiene que $z=2$; luego la proyección del volumen sobre el plano xy está dada por $x^2+y^2\le 12$; usando coordinas cilíndricas, se tiene

$$V_{Limón}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{12}}\int_{4-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\frac{80\pi}{3}.$$

Observación: En coordenadas esféricas, $V_{Limón}=2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{2\sec(\varphi)}^{4}\rho^2\sin(\varphi)\,d\rho d\varphi d\theta=\dfrac{80\pi}{3}$.

1. **Sea** $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **la función definida por** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & ,\text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$**.**

a) **Mostrar que** f **es continua en** $\mathbb{R}^2$**.**

b) **Analizar si** f **es diferenciable en** $(0,0)$ **y en** $(1,1)$**.**

2. **Verificar que** $w(x,y)=x^n f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$**, con** $x\neq 0$ **y** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **diferenciable, satisface la ecuación diferencial parcial** $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+2y\dfrac{\partial w}{\partial y}=n\,w$**.**

3. **Hallar** a **y** b **tales que la derivada direccional de** $f(x,y)=ax^2y+bxy^2$ **en** $(1,1)$ **tenga valor máximo** 8 **en la dirección del vector que forma un ángulo de 45º con el eje** x**.**

4. **Sea** $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$**,** $(u,v)\mapsto F(u,v)$ **una función de clase** C^1 **que satisface** $a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}\neq 0$**.**

a) **Verificar que la ecuación** $F(x-az,y-bz)=0$ **define a la variable** z **como función de clase** C^1 **de las variables** x **e** y**.**

b) **Mostrar que las derivadas parciales** $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **y** $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ **satisfacen** $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$**.**

5. **La temperatura** T **sobre la región** $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 49\}$ **está dada por** $T(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-8x-8y-4z+1$**.**

a) **Hallar el único punto crítico en el interior de** D **e indicar su naturaleza.**

b) **Determinar los puntos en donde se alcanzan los extremos absolutos para** T **en** D **e indicar el valor de dichos extremos.**

Desarrollo:

1.

a) $\forall(x_0,y_0)\neq(0,0)$, como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\frac{x_0^2y_0}{x_0^2+y_0^2}=f(x_0,y_0)$, se tiene que f es continua $\forall(x_0,y_0)\neq(0,0)$. Por otra parte, como $|f(x,y)|\leq|y|$, $\forall(x,y)\neq(0,0)$ y $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$, se tiene $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$ y f es continua en $(0,0)$.

De lo anterior, f es continua $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=f(0,0)$, f es diferenciable en $(0,0)$ cuando $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$.

Si $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x>0\}$, se tiene $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0$ y por tanto f no es diferenciable en $(0,0)$.

Para $(x,y)\neq(0,0)$, como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ son funciones continuas $\forall(x,y)\neq(0,0)$, f es clase C^1 y además diferenciable $\forall(x,y)\neq(0,0)$; en particular lo es en el punto $(1,1)$.

2. Como $\frac{\partial w}{\partial x}(x,y)=nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x^2}\right)-2x^{n-3}y\,f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$ y $\frac{\partial w}{\partial y}(x,y)=x^{n-2}f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$, se tiene que

$$x\frac{\partial w}{\partial x}(x,y)+2y\frac{\partial w}{\partial y}(x,y)=nx^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)=n\,w(x,y).$$

3. La derivada direccional es máxima en la dirección de $\nabla f(1,1)=(2a+b,a+2b)$ y dicho valor máximo es $\|\nabla f(1,1)\|$, en este caso entonces $5a^2+5b^2+8ab=64$ (1).

$\nabla f(1,1)$ forma un ángulo de 45º con el eje x si y sólo si $0<2a+b=a+2b$ (2).

De (1) y (2), se obtienen $a=b=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

4.

a) Sean $\phi(x,y,z)=F(x-az,y-bz)$, $u(x,y,z)=x-az$ y $v(x,y,z)=y-bz$. Si $\phi(x,y,z)=0$,

se cumplen las tres condiciones del Teorema de la función implícita,

$$\phi(x,y,z)=0=F(x-az,y-bz),\ \phi \text{ es } C^1 \text{ y } \frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=-a\frac{\partial F}{\partial u}-b\frac{\partial F}{\partial v}\neq 0.$$

Luego, z puede definirse como una función de clase C^1 de las variables x e y.

b) Del corolario, se tiene $\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}=-\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix}=\frac{1}{a\frac{\partial F}{\partial u}+b\frac{\partial F}{\partial v}}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix}$, donde $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial v}$,

luego, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}\dfrac{\partial F}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}\dfrac{\partial F}{\partial v}$.

De lo anterior, $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}\left(a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)=1$.

Observación: En la ecuación $F(x-az,y-bz)=0$ se puede derivar implíctiametente para obtener $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5.

a) $\dfrac{\partial T}{\partial x}(x,y,z)=2x-8=0\Rightarrow x=4$, $\quad \dfrac{\partial T}{\partial y}(x,y,z)=2y-8=0\Rightarrow y=4$

$\dfrac{\partial T}{\partial z}(x,y,z)=2z-4=0\Rightarrow z=4$; $\quad P_0=(4,4,2)$

Como $\left[H\,T(P_0)\right]=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, se tiene que $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$ y $\Delta_3>0$; por lo que, según el criterio de la matriz hessiana, P_0 es un punto de mínimo local estricto.

b) El único punto crítico (y posible extremo absoluto) en el interior de D es P_0.

Para $(x,y,z)\in Fr(D)$, usando Lagrange considerando $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-49$, el sistema de ecuaciones está definido por $\nabla T(x,y,z)=\lambda\,\nabla g(x,y,z)$ y $g(x,y,z)=0$.

Hay 4 ecuaciones:

$$2x-8=2x\lambda \qquad (1) \qquad\qquad 2y-8=2y\lambda \qquad (2)$$

$$2x-4=2\lambda z \qquad (3) \qquad\qquad x^2+y^2+z^2=49 \qquad (4)$$

Despejando x de (1), y de (2) y z de (3), se obtiene

$$x=\frac{4}{1-\lambda}, \qquad y=\frac{4}{1-\lambda} \quad \text{y} \quad z=\frac{2}{1-\lambda}.$$

De la ecuación (4), se tiene $\frac{16}{(\lambda-1)^2}+\frac{16}{(\lambda-1)^2}+\frac{4}{(\lambda-1)^2}=49 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2=\frac{36}{49}$,

de donde $\lambda=1\pm\frac{6}{7}$, es decir, $\lambda=\frac{1}{7}$ o $\lambda=\frac{13}{7}$.

Si $\lambda=\frac{1}{7}$; $x=\frac{14}{3}$, $y=\frac{14}{3}$, $x=\frac{7}{3}$ y se tiene el punto $P_1=\left(\frac{14}{3},\frac{14}{3},\frac{7}{3}\right)$.

Si $\lambda=\frac{1}{7}$; $x=-\frac{14}{3}$, $y=-\frac{14}{3}$, $x=-\frac{7}{3}$ y se tiene el punto $P_2=-P_1$.

Como $T(P_0)=-35$, $T(P_1)=-34$ y $T(P_2)=134$, se tiene que el mínimo absoluto es -35 y el máximo absoluto es 134.

1. **Sea** $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**, definida por** $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$**.**

a) **Determinar el dominio** D_f**.**

b) **Para cada** $\lambda \in \mathbb{R}$**, determinar el conjunto de nivel** $N_\lambda(f)=\{(x,y)\in D_f : f(x,y)=\lambda\}$ **y deducir el recorrido de** f**.**

c) **¿Es posible definir** f **en** $(0,0)$ **de manera que ella resulte continua en ese punto?**

d) **Encontrar la ecuación del plano tangente a la gráfica de** f **en el punto** $\left(2,-1,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$**.**

2. **Si** $w(x,y,z)=x^3 f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$**, verificar que** $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}+z\dfrac{\partial w}{\partial z}=3w$**.**

3. **Suponer que la variables** x**,** y**,** u **y** v**, están relacionadas por el sistema**

$$\begin{aligned} ux^3+v^2y^3 &= 1 \\ 2uv^3+xy^2 &= 0 \end{aligned}$$

y considerar el punto $P_0=(0,1,0,1)$**.**

a) **Probar que este sistema define a** u **y** v **como funciones implícitas diferenciables de** x **e** y **en una vecindad de** P_0**. Determinar el valor de** $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,1)$ **y de** $\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,1)$**.**

b) **Demostrar que** $G(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ **admite una función inversa diferenciable en una vecindad de** $(0,1)$**; además, calcular la matriz jacobiana de** G^{-1} **en** $(0,1)$**.**

4. **Sean** $R=\{(x,y)\in\mathbb{R} : x^2+y^2\le 8\}$ **y** $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$**.**

a) **Encontrar los puntos críticos en el interior de** R **y clasificarlos.**

b) **¿Por qué puede asegurarse que** f **posee extremos absolutos sobre** R**? Encontrarlos.**

5. **Calcular el volumen de la región encerrada por los cilindros** $x^2+y^2=\pi^2$**,** $x^2+y^2=4\pi^2$**, los planos** $y=0$**,** $x-2y=0$**,** $z=0$ **y la superficie** $(x^2+y^2)z=1$**.**

<u>Desarrollo</u>:

1.

a) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (\,y\ge -x \wedge y<x\,)\vee(\,y\le -x \wedge y>x\,)\}$.

b) Para $\lambda < 0$, se tiene $N_\lambda(f) = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = \lambda\} = \phi$.

Para $\lambda \geq 0$, se tiene $f(x,y) = \lambda \Leftrightarrow y = \left(\dfrac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}\right)x$, la curvas de nivel para f forman una familia de rectas que pasan por el origen. Como $N_\lambda(f) \neq \{\ \} \Leftrightarrow \lambda \geq 0$, entonces $R_f = \mathbb{R}_0^+$.

c) Si $x = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \notin \mathbb{R}$. No es posible definir f en $(0,0)$ de modo que continua.

d) $f \in C^1$ cerca de $(2,-1)$ y por tanto es diferenciable ahí; la ecuación del plano pedido es

$$\frac{\sqrt{3}}{9}(2-x) - \frac{2\sqrt{3}}{9}(y+1) + z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Se considera $f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right) := f(u,v)$, donde $u = x^{-1}y$ y $v = x^{-1}z$.

$$x\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 f + x^3\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 3x^2 f(u,v) - xz\frac{\partial f}{\partial u} - xz\frac{\partial f}{\partial v}$$

$\dfrac{\partial w}{\partial y} = x^3\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2\dfrac{\partial f}{\partial u}$; $\dfrac{\partial w}{\partial z} = x^3\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial z} = x^2\dfrac{\partial f}{\partial v}$; se tiene,

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 3x^3 f(u,v) - x^2 z\frac{\partial f}{\partial u} - y^2 z\frac{\partial f}{\partial v} + x^2 y\frac{\partial f}{\partial u} + x^2 z\frac{\partial f}{\partial v} = 3w.$$

3.

a) Sea $F:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ con $F(x,y,u,v) = (f_1(x,y,u,v), f_2(x,y,u,v)) = (ux^3 + v^2y^3 - 1, 2uv^3 + xy^2)$.

Como F es de clase C^1 en P_0, $F(P_0) = (0,0)$ y $\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)} = \left.\begin{vmatrix} x^3 & 2vy^3 \\ 2v^3 & 6uv^2 \end{vmatrix}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$,

por Teorema de la función implícita, se tiene que el sistema dado define, en una vecindad de P_0, a $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ de manera única como funciones de clase C^1.

Además, también por el Teorema de la función implícita, se tiene que

$$\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(0,1)\right) = -\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}(P_0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}(P_0)\right) = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial u}{\partial y}(0,1) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial v}{\partial y}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$; por lo que $\frac{\partial u}{\partial x}(0,1) = -\frac{1}{2}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}(0,1) = 0$.

b) Como G es de clase C^1 en una vecindad de $(0,1)$ y $\frac{\partial G}{\partial X}(0,1) = \frac{3}{4} \neq 0$, por Teorema de la función inversa, G es localmente inversible en una vecindad de $(0,1)$ con inversa única y de clase C^1. Además, $\left(\frac{\partial G^{-1}}{\partial X}(G(0,1))\right) = \left(\frac{\partial G}{\partial X}(0,1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$.

4.

a) Hay dos puntos críticos, $P_1 = (-1,-1)$ y $P_2 = (0,0)$; como $\Delta_1(P_1) < 0$ y $\Delta_2(P_1) > 0$, P_1 es un máximo relativo, como $\Delta_1(P_2) = 0$ y $\Delta_2(P_1) \neq 0$, P_2 es silla.

b) f es continua sobre R y R es compacto, por tanto; según el Teorema de los valores extremos, f alcanza extremos absolutos cuando su dominio se restringe a R.

- En $\overset{\circ}{R}$ los puntos críticos fueron encontrados en la parte a).
- En ∂R, usando Lagrange considerando $g(x,y) = x^2 + y^2 - 8$ se debe resolver el sistema determinado por $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ y $g(x,y) = 0$.

Hay 3 ecuaciones: $3x^2 + 3y = 2x\lambda$ (1), $3y^2 + 3x = 2y\lambda$ (2), $x^2 + y^2 = 8$. (3)

Despejando λ de (1) y (2) e igualando se llega a $(x-y)(x-xy+y) = 0$, de aquí se tiene que $y = x \vee y = \frac{x}{x-1}$. Reemplazando $y = x$ en (3) se tiene que $x = -2 \vee x = 2$; reemplazando $y = \frac{x}{x-1}$ en (3) se tiene que $x = -1-\sqrt{3} \vee x = -1+\sqrt{3}$.
Se tienen entonces los puntos $(-2,-2)$; $(2,2)$; $(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$; $(-1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3})$.

- Como $f(-1,-1)=1$, $f(0,0)=0$, $f(-2,-2)=-4$, $f(2,2)=28$, $f\left(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}\right)=-26$ y $f\left(-1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3}\right)=-26$. El punto $(2,2)$ es punto de máximo absoluto y $\left(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}\right)$; $\left(-1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3}\right)$ son puntos de mínimo absoluto.

5. La proyección sobre el plano $z=0$ es $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \frac{x}{2}, \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\right\}$;

   usando coordenadas cilíndricas, se tiene

   $$V=\int_0^{\mathrm{Arctan}(1/2)}\int_\pi^{2\pi}\int_0^{1/r^2} r\,dz\,dr\,d\theta=\ln(2)\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(2)\right).$$

1. **Sea** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} & ,\text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) **Determinar si** f **es continua en** $(0,0)$ **y si** f **es diferenciable en** $(0,0)$.

b) **Decir por qué** f **es diferenciable en** $(1,1)$ **y encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de** f **en el punto** $\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$.

c) **Si** f **es una función que determina la temperatura en cada punto del plano. ¿En qué dirección disminuye más rápidamente la temperatura en el punto** $(1,1)$ **?**

2. **En la ecuación diferencial parcial**

$$3\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

cambiar las variables x **e** y **por** u **y** v**, donde** $u=2x-3y$, $v=3x+2y$.

3. **Considerar la ecuación** $F(x,y,z)=0$**, con** F **de clase** C^1.

a) **Indicar qué condicion(es) asegura(n) que en una vecindad de un punto** $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ **con** $F(P_0)=0$**, la ecuación** $F(x,y,z)=0$ **define implícitamente las funciones** $z=f(x,y)$, $y=g(x,z)$, $x=h(y,z)$.

b) **En relación a la parte a) deducir la fórmula** $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)=-1$.

4. **Sea** C **la curva de intersección de las superficies** $x^2+y^2=1$ **y** $x+y+z=1$.

a) **Dibujar en un sistema de coordenadas las dos superficies y la curva.**

b) **Encontrar los puntos de máximo y de mínimo absoluto de la función** $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ **sobre la curva** C.

c) **Deducir cuál es el punto de** C **más alejado del origen.**

5. **Una esfera de radio** 2 **se corta mediante un plano que pasa a una unidad de su centro. Sea** D **el casquete esférico más pequeño. Expresar el volumen de** D **utilizando coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas; luego, calcular dicho volumen.**

Desarrollo:

1.

a) Dado que $\left|f(x,y)\right| \leq 3\left\|(x,y)\right\|$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$ y como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left\|(x,y)\right\| = 0$ entonces se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ y entonces f es continua en $(0,0)$.

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$, $f(0,0) = 0$ se tiene que f es diferenciable en el origen cuando $L := \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - 2x + y}{\left\|(x,y)\right\|} = 0$; si $y = x > 0$ se tiene que $L \neq 0$, por lo tanto, f no es diferenciable en el origen.

b) $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + xy^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{4x^2y + 3x^2y^2 + y^4}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$; estas funciones son continuas $\forall (x,y) \neq (0,0)$, por tanto f es C^1 y además diferenciable $\forall (x,y) \neq (0,0)$. El gráfico de f posee plano tangente en $\left(1, 1, \dfrac{1}{2}\right)$ pues f es diferenciable en $(1,1)$ y la ecuación de dicho plano es $z = \dfrac{3}{2}x - 2y$.

c) En la dirección de $-\nabla f(1,1) = -\dfrac{5}{2}\hat{i} + 2\hat{j}$.

2. $\begin{matrix} u = 2x - 3y \\ v = 3x + 2y \end{matrix}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2\dfrac{\partial z}{\partial u} + 3\dfrac{\partial z}{\partial v}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = -3\dfrac{\partial z}{\partial u} + 2\dfrac{\partial z}{\partial v}$

Reemplazando en $3\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, la e.d.p. queda $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$.

3.

a) $F(P_0) = 0$ y F es de clase C^1, por tanto, por el Teorema de la función implícita se define como $z = f(x,y)$ si $\dfrac{\partial F}{\partial z}(P_0) \neq 0$, se define $y = g(x,z)$ si $\dfrac{\partial F}{\partial y}(P_0) \neq 0$ y se define $x = h(y,z)$ si $\dfrac{\partial F}{\partial x}(P_0) \neq 0$.

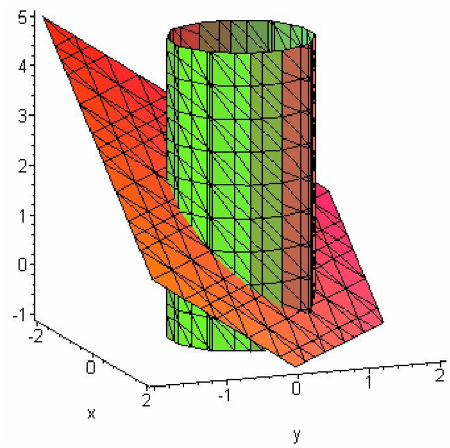
b) Si $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, se tiene $z = f(x,y)$ y al derivar $F(x,y,z) = 0$ con respecto a y se obtiene

$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$, luego $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$. Análogamente $\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial x}$ y $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$.

$\therefore \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)=-1$.

4.

a)



b) Si $g(x,y,z)=x^2+y^2-1$ y $h(x,y,z)=x+y+z-1$; usando Lagrange, el sistema definido por $\nabla f(x,y,z)=\alpha\,\nabla g(x,y,z)+\beta\,\nabla h(x,y,z)$, $g(x,y,z)=0$ y $h(x,y,z)=0$.

Hay 5 ecuaciones; ellas son

$2x=2\alpha\,x+\beta$ (1), $2y=2\alpha\,y+\beta$ (2), $2z=\beta$ (3), $x^2+y^2=1$ (4) y $x+y+z=1$ (5).

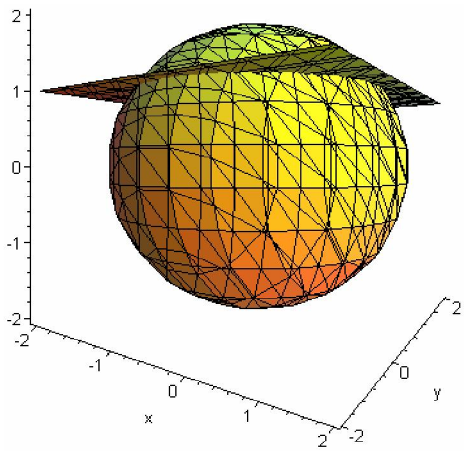
Restando (1) y (2) se tiene $\alpha=1$ o $x=y$: Si $\alpha=1$ entonces por (1) y (3), $\beta=0=z$; si $z=0$ se reemplaza en (5) se tiene que $y=1-x$; por otra parte si $y=1-x$ de (4) se llega a que $x=0$ o $x=1$; se ha llegado entonces a dos puntos $P_1=(0,1,0)$ y $P_2=(1,0,0)$.

Si $x=y$ de (4) se tiene que $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=y$ y de (5) se tiene que $z=1\mp\frac{2}{\sqrt{2}}$; se ha llegado entonces a dos puntos más, ellos son $P_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ y $P_4=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$.

$f(P_3)=4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $f(P_1)=f(P_2)=1$ mínimo absoluto de f sobre C, $f(P_4)=4\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ máximo absoluto de f sobre C.

c) f representa la distancia al cuadrado desde un punto $P(x, y, z)$ del espacio al origen; el punto de C más alejado del origen es $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$.

5.



$$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{1}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1\,dzdydx = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\sqrt{3}} \int_{1}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi/3} \int_{\sec(\varphi)}^{2} \rho^2 \sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \frac{5\pi}{3}.$$

1. **Sea** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+|y|^5} & \text{, si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{, si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) **Decidir si** f **es continua en** $(0,0)$**.**

b) **Analizar la diferenciabilidad de** f **en el origen.**

c) **¿Es** f **de clase** C^1 **en el origen?**

d) **Calcular la derivada direccional de** f **en** $(0,0)$ **en la dirección de** $\vec{v}=\hat{i}+2\hat{j}$**.**

e) **Mostrar que** f **es de clase** C^1 **en el punto** $(2,-1)$**.**

f) **Indicar, utilizando el item anterior, por qué** f **es diferenciable en** $(2,-1)$**; luego, determinar la ecuación del plano tangente al gráfico de** f **en el punto** $\left(2,-1,-\dfrac{4}{5}\right)$**.**

g) **¿En qué dirección es máxima la derivada direccional de** f **en el punto** $(2,-1)$**? ¿Cuál es ese valor máximo?**

2. **Decidir si** $u(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{1}{3}x^2y$**, con** $x\neq 0$ **y donde** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **es una función de clase** C^1 **es solución de la ecuación en derivadas parciales** $x\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=x^2y$**.**

3. **Calcular** $I=\iint\limits_D y^3\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}d(x,y)$**, si** $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1, \dfrac{1}{2}\leq y\leq 1\right\}$**.**

4. **Evaluar la integral** $\iint\limits_R \dfrac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}d(x,y)$**, sabiendo que** $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq x\right\}$**.**

5. **Calcular el trabajo** $W=\int\limits_C F\cdot dr$ **realizado sobre un cuerpo que se desplaza sobre la curva** C **desde el punto** $P(4,0,0)$ **hasta** $Q(0,0,4)$ **en la intersección de las superficies** $z=4-x$**,** $x^2+y^2=4x$**, bajo la influencia del campo de fuerza**

$$F(x,y,z)=\left(\frac{x}{(x-2)^2+y^2},\frac{-y}{(x-2)^2+y^2},z\right).$$

Desarrollo:

1.

a) Como $|f(x,y)| \leq |y|$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$; por tanto f es continua en $(0,0)$.

b) Como $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f(0,0)$, f es diferenciable en $(0,0)$ si y sólo si

$$L := \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

$(x,y) \in T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x > 0\} \Rightarrow L \neq 0$; por tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

c) Como f no es diferenciable en el origen, entonces ella no es de clase C^1 en $(0,0)$.

d) $$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{5}}, \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) - f(0,0)}{t} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

e) Cerca de $(2,-1)$, $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 - y^5}$; así, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy^6}{\left(x^2 - y^5\right)^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4 + 4x^2 y^5}{\left(x^2 - y^5\right)^2}$.

Claramente $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ (cuocientes de polinomios con denominadores no nulos) son funciones continuas en V por lo que f es de clase C^1 en dicho conjunto y en particular lo es en $(2,-1)$.

f) Como f es de clase C^1 en $(2,-1)$, entonces ella es diferenciable en dicho punto.

La ecuación del plano es

$$z = f(2,-1) + \nabla f(2,-1)\cdot(x-2, y+1) \Leftrightarrow z = -\frac{4}{25}(x-2) + 0(y+1) \Leftrightarrow 4x + 25z = -12.$$

g) En la dirección de $\nabla f(2,-1) = -\frac{4}{25}\hat{i} - 0\hat{j} = -\frac{4}{25}\hat{i}$ y el valor máximo es $\|\nabla f(2,-1)\| = \frac{4}{25}$.

2. Como $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -x^{-2}y\,f'\left(x^{-1}y\right) + \dfrac{2}{3}xy$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x^{-1}\,f'(xy) + \dfrac{1}{3}x^2$, entonces

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = -x^{-1}y\,f'\left(x^{-1}y\right) + \frac{2}{3}x^2y + x^{-1}y\,f'(xy) + \frac{1}{3}x^2y = x^2y$$ y u satisface la e.d.p.

3. $$I = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_{\csc(\theta)/2}^{1} r\sin^3(\theta)\,dr\,d\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

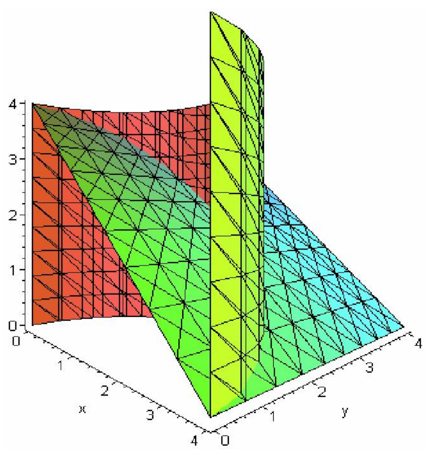
4. Si $f(x,y) = \dfrac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \geq 0$, $f \geq 0$ en R.

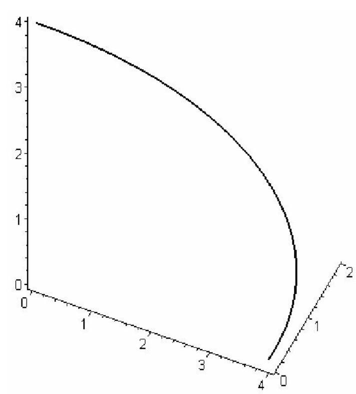
Sea $R_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq n,\ 0 \leq y \leq x, n \in \mathbb{N}\right\}$, se tiene $R_n \subset R_{n+1}$ y $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \overset{\circ}{R}_n = \overset{\circ}{R}$.

Como $\displaystyle\iint_{R_n} f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^{\pi/4}\int_0^n \frac{r}{\left(1+r^2\right)^2}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right)$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \lim_{n\to+\infty} \iint_{R_n} f(x,y)\ d(x,y) = \frac{\pi}{8}.$$

5.





Una parametrización de C es $(x,y,z) = \left(2\cos(t)+2,\ 2\sin(t),\ 2-2\cos(t)\right)$, donde $t \in [0,\pi]$;

$$W = \int_C F\cdot dr = \int_0^{\pi} \left(\frac{2\cos(t)+2}{4}, \frac{-2\sin(t)}{4}, 2-2\cos(t)\right)\cdot\left(-2\sin(t),\ 2\cos(t),\ 2\sin(t)\right)dt = 6.$$

1. **Sean $f(x,y)=e^{y^2-x^2}$ y $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$, como f es continua y D es un conjunto compacto se tiene que f posee extremos absolutos sobre D, calcularlos.**

2.

a) **Intercambiar el orden de integración para $I=\int_0^1\int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$.**

b) **Evaluar $J=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \cos(x^3)dxdy$.**

3. **Calcular $K=\iiint_S e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}d(x,y,z)$, donde $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$.**

4. **Calcular la integral doble $M=\iint_E x^2y^2d(x,y)$, si E es la región del plano situada entre la rectas, $y=x$, $y=4x$ y las hipérbolas $xy=1$ y $xy=2$.**

5. **Usar integrales triples y un cambio de variables adecuado para calcular el volumen del sólido limitado inferiormente $z=x^2+y^2$ y superiormente por $z=4y$.**

<u>Desarrollo</u>:

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\Rightarrow x=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Rightarrow y=0$; el único punto crítico en $\overset{\circ}{D}$ es $P_0=(0,0)$.

En $Fr(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$, al considerar $g(x,y)=x^2+y^2-4$ y multiplicadores de Lagrange, se tiene que $\nabla g(x,y)=\lambda\,\nabla g(x,y)$ y $g(x,y)=0$.

Hay 3 ecuaciones, $-2xe^{y^2-x^2}=2x\lambda$ (1), $2ye^{y^2-x^2}=2y\lambda$, (2) y $x^2+y^2=4$. (3)

Si x e y son no nulos, de la ecuación (1) se tiene que $\lambda=-e^{y^2-x^2}$ y de la ecuación (2) se tiene que $\lambda=e^{y^2-x^2}$ (contradicción). Si $x=0$, reemplazando en la ecuación (3) se tienen los puntos $P_1=(0,2)=-P_2$. Si $y=0$, reemplazando en la ecuación (3) se tienen los puntos $P_3=(2,0)=-P_4$.

Evaluando, como $f(P_0)=1$, $f(P_1)=e^4=f(P_2)$, $f(P_3)=e^{-4}=f(P_4)$ se tiene que el máximo absoluto es e^4 y el mínimo absoluto es e^{-4}.

2.

a) $I=\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$,

b) $J=\int_0^1\int_0^{x^2}\cos\left(x^3\right)dydx=\dfrac{\sin(1)}{3}$.

3. Considerando el cambio $x=a\rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y=b\rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z=c\rho\cos(\varphi)$, donde a, b, c y ρ son positivos, se tiene que $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right|=abc\rho^2\sin(\varphi)$ y

$$K=abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho^2e^{\rho}\sin(\varphi)\ d\rho\ d\varphi\ d\theta=abc\int_0^{2\pi}1d\theta\int_0^{\pi}\sin(\varphi)d\varphi\int_0^{1}\rho^2e^{\rho}d\rho=4abc\pi\ (e-2).$$

4. Considerando la parte de la región E del primer cuadrante, se tiene que

$1\le s=\dfrac{y}{x}\le 4$, $1\le t=xy\le 2$, $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{x}{2y}$; $\dfrac{M}{2}=\dfrac{1}{2}\int_1^4\int_1^2\dfrac{t^2}{s}dsdt=\dfrac{\ln 128}{3}$ y por lo tanto,

$M=\dfrac{2}{3}\ln 128$.

5. En coordenadas cilíndricas, $V=\int_0^{\pi}\int_0^{4\sin(\theta)}\int_{r^2}^{4r\sin(\theta)} r\,dz\,dr\,d\theta=8\pi$.

1. **Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\left|f(X)\right| \le M\left\|X\right\|^2$, probar que f es diferenciable en el origen y luego mostrar que**

$$g(x,y)=\begin{cases} Ax^2\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+By^2\sin\left(\dfrac{1}{y^3}\right) & ,\text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases},$$

es diferenciable en $(0,0)$.

2. **Demostrar que el sistema**

$$\begin{aligned} 2x^2+t+y&=0 \\ 2xz+x-z&=0 \end{aligned}$$

define a x e y como funciones de clase C^1 de z y t en una vecindad del origen. Si estas funciones son $x=g_1(z,t)$, $y=g_2(z,t)$, demostrar que $G=(g_1,g_2)$ es invertible en una vecindad del punto $(0,0)$.

3. **Evaluar la integral $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dx\,dy$ e indicar qué relación tiene su valor con la región acotada inferiormente por $D=\left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : 0\le y\le 8, \sqrt[3]{y}\le x\le 2\right\}$ y superiormente por el gráfico de la superficie $z=e^{x^4}$.**

4. **Hallar el máximo para $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{25}=1$ y $x+y-z=0$ e interpretar geométricamente este resultado.**

5. **Calcular el volumen del primer octante acotado por la superficie de ecuación**

$$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1,$$

utilizando el cambio de variables $u=x/a$, $v=y/b$ y $w=z/c$, donde a, b y c son constantes reales y positivas que deben ser elegidas de manera conveniente.

<u>Desarrollo</u>:

1. Como $\left|f(\theta)\right|\le 0$, entonces $f(\theta)=0$.

Además como $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\theta)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t\hat{e}_i)-f(\theta)}{t}=0$, pues $\left|\dfrac{f(t\hat{e}_i)}{t}\right|\le|t|$;

se tiene que $\dfrac{\left|f(X)-f(\theta)-\nabla f(\theta)\cdot X\right|}{\|X\|}=\dfrac{\left|f(X)\right|}{\|X\|}\le M\|X\|$ y por lo tanto

$\lim\limits_{X\to\theta}\dfrac{f(X)-f(\theta)-\nabla f(\theta)\cdot X}{\|X\|}=0$ y entonces f es diferenciable en θ.

Como $\left|g(x,y)\right|\le|A|x^2+|B|y^2\le\max\{|A|,|B|\}\|(x,y)\|^2$, de lo anterior se tiene que g es diferenciable en $(0,0)$.

2. Sea $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, con $F(x,y,z,t)=\left(f_1(x,y,z,t),f_2(x,y,z,t)\right)$, $f_1(x,y,z,t)=2x^2+t+y$ y $f_2(x,y,z,t)=2xz+x-z$ y sea el punto $P_0=(0,0,0,0)$. Se tiene

i) F es de clase C^1 en vecindades de P_0.

ii) $F(P_0)=(0,0)$.

iii) $\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}(P_0)=-1\ne 0$

Por i), ii) y iii), según el Teorema de la función implícita, el sistema define a x e y como funciones de clase C^1 las variables z y t.

Y además, por el mismo teorema, se tiene que:

$$\left(\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(z,t)}\right)_{(0,0)}=-\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}_{P_0}\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(z,t)}\right)_{P_0}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Ahora por el Teorema de la función inversa, como se cumple que el jacobiano es no nulo y G es de clase C^1; entonces, $G=(g_1,g_2)$ es invertible en una vecindad de $(0,0)$.

3. $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^{x^3} e^{x^4}\,dy\,dx=\dfrac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)$: volumen de la región

4. Si $g(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}-1$ y $x+y-z=0$, utilizando multiplicadores de Lagrange se tiene el sistema definido por $\nabla f(x,y,z)=\lambda_1\ \nabla g(x,y,z)+\lambda_2\nabla h(x,y,z)$, $g(x,y,z)=0$ y $h(x,y,z)=0$.

Hay 5 ecuaciones,

$$2x=\lambda_1\frac{x^2}{2}+\lambda_2 \qquad (1),$$

$$2y=\lambda_1\frac{2y}{5}+\lambda_2 \qquad (2),$$

$$2z=\lambda_1\frac{2z}{25}-\lambda_2 \qquad (3),$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1 \qquad (4),$$

$$x+y-z=0 \qquad (5).$$

Al multiplicar cada una de las tres primeras ecuaciones por x, y y z respectivamente y luego sumar se tiene que $2\left(x^2+y^2+z^2\right)=2\lambda_1\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}-1\right)+\lambda_2\left(x+y-z\right)$; de donde, por la ecuación (4) se obtiene que $f(x,y,z)=\lambda_1$.

De (1) se tiene que $x=\frac{2\lambda_2}{4-\lambda_1}$; de (2), $y=\frac{5\lambda_2}{10-2\lambda_1}$; de (3), $z=\frac{25\lambda_2}{2\lambda_1-50}$.

Reemplazando lo anterior en la ecuación (5), se tiene que

$$\frac{2\lambda_2}{4-\lambda_1}+\frac{5\lambda_2}{10-2\lambda_1}-\frac{25\lambda_2}{2\lambda_1-50}=0,$$

de donde $(\lambda_1-10)(17\lambda_1-75)=0$ y entonces $\lambda_1=10$ o $\lambda_1=\frac{75}{17}$.

El valor máximo pedido es 10. Geométricamente esto quiere decir que los puntos más alejados de la curva de intersección entre elipsoide definido por (1) y el plano definido por (2) están a una distancia de $\sqrt{10}$ unidades de longitud del origen.

5. El volumen corresponde al de la región

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}.$$

Al considerar el cambio $u=x$, $v=y/2$, $w=z/5$ la región D se transforma en

$$D^*=\left\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 : u^2+v^2+w^2\le 1, u\ge 0, v\ge 0, w\ge 0\right\}$$

y dado que $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=10$, se tiene

$$V_{\frac{Sandia}{8}}=\iiint_D 1\,d(x,y,z)=\iiint_{D^*}10\,d(u,v,w)=10\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1\rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\frac{5\pi}{3}.$$

1. **Considerar el espacio vectorial** $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n\}$ **provisto de la norma** $\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ **. Sea** $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **una función bilineal, es decir, existe una función lineal** $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ **tal que** $B(x,y) = \langle L(x), y \rangle$**,** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$**.**

a) **Probar que existe una constante** $C > 0$ **tal que** $|B(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$**.**

b) **Probar que** $B((x,y)+(h,k)) = B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k)$**.**

c) **¿Es** B **es continua** $\forall\ (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ **?**

d) **¿Es** B **diferenciable en** $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ **si** $DB(x_0,y_0)(h,k) = B(h,y_0) + B(x_0,k)$**?**

2. **Sabiendo que** $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{\beta^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{\beta}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$**,** $\beta > 0$**; calcular justificando adecuadamente, la integral** $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{\left(\beta^2 + x^2\right)^2}\,dx$**.**

3. **Usar una integral múltiple y un sistema de coordenadas conveniente para calcular el volumen del sólido que queda tras perforar un orificio cilíndrico de radio** b **por el centro de una esfera de radio** R $(b < R)$**.**

4. **Dado el campo vectorial** $F(x,y) = \left(4y - \dfrac{y}{(x-2)^2 + y^2}, \dfrac{x-2}{(x-2)^2 + y^2}\right)$**, usar el Teorema de Green para evaluar** $\int_C F \cdot dr$ **, donde *C* es la curva de ecuación** $x^2 + y^2 = 9$**.**

5. **Para** $F(x,y,z) = x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z^3\hat{k}$ **y las superficies definidas por**

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ **(semiesfera) y** $S_2 : z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$ **(disco).**

a) **Calcular** $\displaystyle\iint_{S_2} F \cdot \hat{n}\,dS$ **, indicando una orientación para** S_2**.**

b) **Usar el Teorema de la divergencia para deducir el valor de la integral** $\displaystyle\iint_{S_1} F \cdot \hat{n}\,dS$**, indicando la orientación considerada.**

Desarrollo:

1.

a) De la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho que L es lineal (ver problema 1 en la página 98), se tiene que $|B(x,y)| = |\langle L(x), y\rangle| \le \|L(x)\|\|y\| \le C\|x\|\|y\|$, con $C > 0$.

b) Teniendo en cuenta la linealidad de L y la bilinealidad del producto interior

$$\begin{aligned} B((x,y)+(h,k)) &= B(x+h, y+k) \\ &= \langle L(x+h), y+k\rangle \\ &= \langle L(x)+L(h), y+k\rangle \\ &= \langle L(x), y\rangle + \langle L(x), k\rangle + \langle L(h), y\rangle + \langle L(y), k\rangle \\ &= B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k). \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} B(x,y) &= B(x - x_0 + x_0, y - y_0 + y_0) \\ &= B(x-x_0, y-y_0) + B(x-x_0, y_0) + B(x_0, y-y_0) + B(x_0, y_0) \text{ (por parte b)).} \end{aligned}$$

Se tiene, $$\begin{aligned} |B(x,y) - B(x_0,y_0)| &\le |B(x-x_0, y-y_0)| + |B(x-x_0, y_0)| + |B(x_0, y-y_0)| \\ &\le C(\|x-x_0\|\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\|y_0\| + \|x_0\|\|y-y_0\|). \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} C(\|x-x_0\|\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\|y_0\| + \|x_0\|\|y-y_0\|) = 0$, entonces por Teorema del sandwich se tiene $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} B(x,y) = B(x_0,y_0)$ y B es continua en $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

d) B es diferenciable para todo $(x_0, y_0) \in$ si y sólo si

$$\lim_{(h,k)\to(\theta,\theta)} \frac{B((x_0,y_0)+(h,k)) - B(x_0,y_0) - DB(x_0,y_0)(h,k)}{\|(h,k)\|} \text{ vale cero}$$

Teniendo en cuenta la diferencial dada y la parte ii) este límite queda $\tilde{L} = \lim\limits_{(h,k)\to(\theta,\theta)} \dfrac{B(h,k)}{\|(h,k)\|}$.

Suponiendo ahora que este límite es cero, acotando (usando parte a)), se tiene que

$$\left|\frac{B(h,k)}{\|(h,k)\|}\right| \leq \frac{C\|h\|\|k\|}{\|(h,k)\|} \leq C\|(h,k)\|$$

y como $\lim\limits_{(h,k)\to(\theta,\theta)} C\|(h,k)\| = 0$ entonces $\tilde{L} = 0$ y por tanto B es diferenciable en (x_0, y_0).

2. Sea $F(\beta) = \int_0^\alpha \frac{1}{\beta^2 + x^2}dx$, como $u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_1(\beta) = 0$, $u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_2(\beta) = \alpha$ son de clase C^1 y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\frac{\partial f}{\partial \beta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por $f(\beta, x) = \frac{1}{\beta^2 + x^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial \beta}(\beta, x) = -\frac{2\beta}{\beta^2 + x^2}$ son continuas $\forall(\beta, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, se tiene, por la regla de Leibniz que

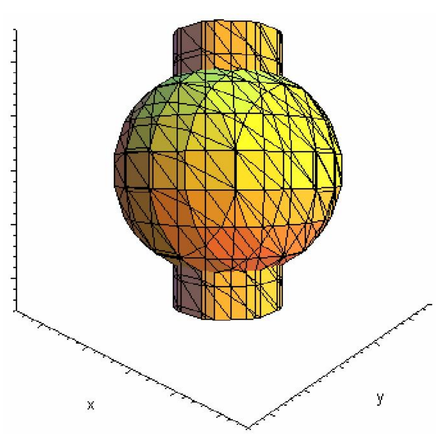
$$F'(\beta) = \int_0^\alpha \frac{\partial f}{\partial \beta}(\beta, x)\,dx.$$

Por otra parte, como $F'(\beta) = \frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\beta}\text{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right) = -\frac{1}{\beta^2}\text{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\beta^2 + x^2}$, se tiene que

$$\int_0^\alpha \frac{1}{\left(\beta^2 + x^2\right)^2}dx = -\frac{F'(\beta)}{2\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta^3}\text{Arctan}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\alpha}{\beta^3}\frac{1}{\beta^2 + x^2}\right).$$

3. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$: esfera de radio R y centro en el origen

$x^2 + y^2 = b^2$: cilindro que tiene como eje al y y de radio b



La proyección en el plano $z=0$ de la región interior a la esfera y exterior al cilindro está dado por $b^2 \le x^2+y^2 \le R^2$; luego, $V=\int_0^{2\pi}\int_b^R\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\frac{4\pi}{3}\left(R^2-b^2\right)^{3/2}$.

4. Para $F=(p,q)$, las curvas C y $C_0:\begin{cases} x=\varepsilon\cos(t)+2 \\ y=\varepsilon\sin(t)\end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$ en sentido antihorario y la región D encerrada por C que es exterior a C_0 para aplicar la segunda versión del Teorema de Green, se tiene

$$\int_C F\cdot dr-\int_{C_0} F\cdot dr=\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right)d(x,y)=-4\,Área\ (D)=4\pi\varepsilon^2-36\pi\ .$$

Al usar la parametrización de C_0, se tiene que $\int_{C_0} F\cdot dr=2\pi-4\pi\varepsilon^2$, de donde

$$\int_C F\cdot dr=-34\pi\ .$$

5.

a) Usando la parametrización para S_2 dada por $\phi_2(x,y)=(x,y,0)$, se tiene que $\vec{n}=-\hat{k}$ y el campo ectorial queda $F\left(\phi_2(x,y)\right)=x^3\hat{i}+y^3\hat{\jmath}\ +0\hat{k}$. Luego, $\iint_{S_2} F\cdot\hat{n}\,dS=0$.

b) Considerando a la primera superficie con vector normal apuntando hacia arriba y al volumen V tal que $\partial V=S_1\cup S_2$, por Teorema de Gauss se tiene

$\iint_{S_1} F\cdot\hat{n}\,dS+\iint_{S_2} F\cdot\hat{n}\,dS=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho^4\sin(\varphi)\,d\rho d\varphi d\theta=\frac{6}{5}\pi a^5$, y por lo tanto se tiene que $\iint_{S_1} F\cdot\hat{n}\,dS=\frac{6}{5}\pi a^5$.

1. **Sea** $f(x,y,z)=x^2+y^2+2\sqrt{5}xy+z^2x+2z$**.**

a) **Determinar, si existen, los puntos de máximo local y de mínimo local para** f **en** $\mathbb{R}^3$**.**

b) **Suponer que** $f(x,y,z)$ **representa la distribución de temperatura del medio ambiente en el cual está sumergida una placa plana, además suponer que dicha placa se encuentra en el plano** xy **y que su borde es** $x^2+y^2=1$**. Determinar el punto de mayor temperatura y el punto de menor temperatura en dicha placa.**

2. **El volumen de cierto sólido está dado por la integral** $V=\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}1\ dz\,dy\,dx$**.**

a) **Describir el sólido exhibiendo las ecuaciones de todas las superficies que forman su frontera.**

b) **Calcular** V**.**

3. **Aplicando el Teorema de Green, hallar** $\oint_C (2xy+3\sinh(x))dx+(3x^2-8y)dy$ **si** $C=\partial R$**, y** R **es la región por el eje** y**,** $y=g(x)$ **e** $y=g(x)+\cos(x)$**, donde** $g:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ **es una función continua y positiva.**

4. **Sea** $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$**, tal que** $F(x,y,z)=(e^x\cos(y)+yz)\hat{i}+(xz-e^x\sin(y))\hat{j}+(xy+z)\hat{k}$**.**

a) **Calcular** $\nabla\times F$**.**

b) **Calcular el trabajo realizado por** F **a lo largo de la curva** C **determinada en el primer octante por la intersección del cilindro** $z=2-y^2$ **y el plano** $y=x$**, recorrida en sentido desde abajo hacia arriba.**

5. **Considerar el campo vectorial en** $\mathbb{R}^3$ **definido por** $F(x,y,z)=(xy,y^2,yz)$ **y la región** D **del espacio limitada por los planos de ecuaciones** $x=0$**,** $y=0$**,** $z=0$ **y** $x+y+z=4$**. Sea** S **la superficie que encierra a** D**, orientada con la normal exterior.**

a) **Calcular, usando el Teorema de la divergencia, el flujo** Φ **del campo** F **a través de la superficie** S**; es decir, calcular** $\Phi=\iint_S F\cdot\hat{n}\,dA$**.**

b) **Calcular la integral** $I=\oint_\Gamma F\cdot dr$ **donde** C **es triángulo cuyos vértices son los puntos** A**,** B**,** C **de intersección del plano** $x+y+z=2$ **con los ejes** X**,** Y**,** Z **respectivamente.**

<u>Desarrollo</u>:

1.

a) Se igualan las derivadas parciales a cero para hallar los puntos críticos, y

$$f_x(x,y,z)=2x+2\sqrt{5}y+z^2=0$$

$$f_y(x,y,z)=2y+2\sqrt{5}x=0$$

$$f_z(x,y,z)=2xz+2=0$$

Hay un solo punto crítico $P_0=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2},-2\right)$ y él es tal que $\Delta_1=2$, $\Delta_2=-16$, $\Delta_3=16$, por tanto, P_0 es un punto de silla. No existen puntos de máximo local ni de mínimo local.

b) Las derivadas parciales no se anulan en el conjunto $A=\left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1\right\}$.

- No hay puntos críticos en A.
- En el conjunto $A_1=\left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\right\}$, que corresponde a una circunferencia, puede usarse la parametrización $x=\cos(t)$, $y=\sin(t)$, $z=0$; donde $t\in[0,2\pi]$.

f puede expresarse ahora como una función de la variable t y $f(t)=1+2\sqrt{5}\sin t\cos t$.

Si $t\in\,]0,2\pi[$: $\qquad f'(t)=0 \Leftrightarrow |\tan(t)|=1 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

Evaluando en f (considerando también los extremos del intervalo), se tiene

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=1+\sqrt{5},\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=1-\sqrt{5},\ f(0)=f(2\pi)=1.$$

- Los puntos de máximo absoluto sobre la placa son los puntos $P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $P_3=-P_1$; los de mínimo absoluto son $P_2=\left(-1/\sqrt{2},\,1/\sqrt{2}\right)$ y $P_4=-P_2$.

2.

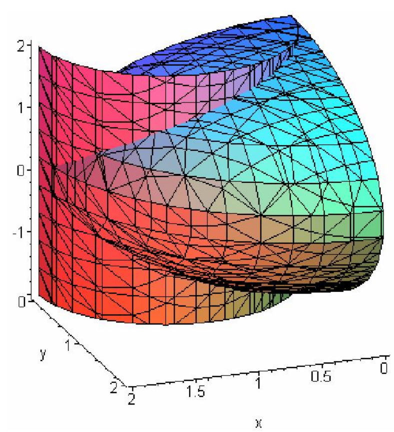
a) $0 \le x \le 2$; $0 \le y \le \sqrt{2x - x^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1$, donde $y \ge 0$.

$-\sqrt{4 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \le 4$.

b) En coordenadas cilíndricas, la expresión $(x-1)^2 + y^2 \le 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 2x$ se escribe

$r \le 2\cos\theta$ y $-\sqrt{4 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ se escribe $-\sqrt{4 - r^2} \le z \le \sqrt{4 - r^2}$.

La parte superior de $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ está en el primer cuadrante, luego $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.



$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\theta)} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}.$$

3. Sean $p(x,y) = 2xy + 3\sinh(x)$ y $q(x,y) = 3x^2 - 8y$, si C está orientada en sentido antihorario y dado que $g(x) = g(x) + \cos(x) \Leftrightarrow x = \pi/2$, se tiene

$$\oint_C p dx + q dy = \iint_R \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) \right) d(x,y)$$

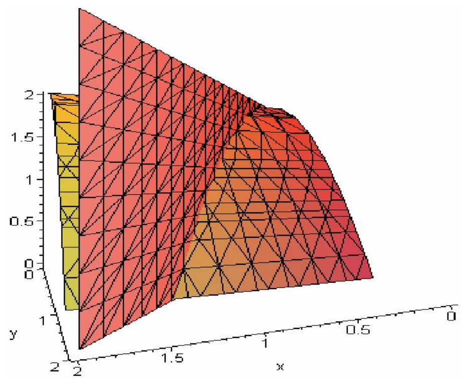
$$\oint_C p dx + q dy = \int_0^{\pi/2} \int_{g(x)}^{g(x)+\cos(x)} 4x \, dy \, dx$$

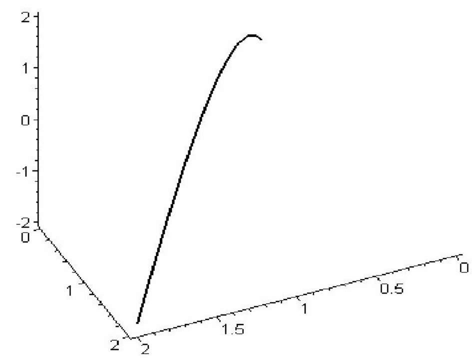
$$\oint_C p dx + q dy = 2(\pi - 2)$$

4.

a) $\nabla \times F = (0,0,0)$.

b) El punto inicial de la curva es $P_i = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$ y el final es $P_f = (0,0,2)$, un potencial para F es $f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \dfrac{z^2}{2}$.





El trabajo realizado es $W = \int_C \nabla f \cdot dr = f(P_f) - f(P_i) = 3 - \sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}$.

5.

a) $\Phi = \iint_S F \cdot \hat{n}\, dA = 4 \int_0^4 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} y\, dz\, dy\, dx = \dfrac{128}{3}$.

b) Considerando Γ antihorario, dado que $\nabla \times F = (z, 0, -x)$, si $\phi(x, y) = (x, y, 2 - x - y)$, y $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 - x\right\}$, se tiene la normal $\vec{n} = (1,\ 1,\ 1)$ y por Stokes:

$I = \iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA = \iint_D (2 - x - y, 0, -x) \cdot (1,1,1)\, d(x, y) = 0$.

1. **Sea** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,\text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

a) **Calcular las derivadas parciales** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **y** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **en todo** $\mathbb{R}^2$**.**

b) **Probar que** f **es de clase** C^1 **en** $\mathbb{R}^2$**.**

c) **Encontrar la buena aproximación afín para** $f(x,y)$ **cerca del punto** $(1,1)$**.**

d) **Encontrar la dirección de máximo crecimiento de** f **en el punto** $(1,1)$**. ¿Cuál es la razón de cambio de** f **en esa dirección?**

e) **Verificar que el punto** $(0,0)$ **es un punto de silla de** f**.**

2. **Considerar la transformación** $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **definida por** $\varphi(x,y)=(u,v)=(2x-y,y)$**.**

a) **Mostrar que** φ **es una biyección.**

b) **Encontrar la imagen** $D=\varphi(R)$ **en el plano** uv**, donde** R **es la región del plano** xy **limitada por las rectas** $y=2x-4$**,** $y=2x$**,** $y=0$**,** $y=2$**.**

c) **Calcular** $\displaystyle\int_0^2\int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\,dx\,dy$**.**

3. **Calcular el volumen de la región del primer octante acotada por el cilindro parabólico** $x=4-y^2$ **y los planos** $z=y$**,** $x=0$**,** $z=0$**.**

4. **Sea** $F(x,y,z)=\left(3xz^2+6y,6x-2yz,3x^2z-y^2\right)$**. Calcular la integral** $I=\displaystyle\int_\Gamma F\cdot dr$ **donde** Γ **es el arco de la curva intersección de las superficies** $x^2+y^2=1$**,** $x+y+z=1$ **que une los puntos** $A=(1,0,0)$ **y** $B=(0,1,0)$ **y que está bajo el plano** $z=0$**.**

5. **Sean** $F(x,y,z)=2x\hat{i}-y\hat{j}+3z\hat{k}$**,** V **la región del primer octante limitada por el cilindro** $z=4-x^2$ **y el plano** $4x+3y=12$ **y sea además** $S=\partial V$ **orientada exteriomente. Hallar utilizando el Teorema de la Divergencia,** $\displaystyle\oiint_S F\cdot\hat{n}\,dA$**.**

<u>Desarrollo</u>:

1.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x^4y+3x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^5}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$.

b) Si $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leq 5\|(x,y)\|^2$, $\forall(x,y)\neq(0,0)$ y entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$,

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leq \|(x,y)\|^2$, $\forall(x,y)\neq(0,0)$ y entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

De lo anterior, las derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, o sea $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

c) $A(x,y)=f(1,1)+\nabla f(1,1)(x-1,y+1)=\sqrt{2}\left(\dfrac{5}{4}x+\dfrac{y}{4}-1\right)$.

d) La dirección es $\nabla f(1,1)=\dfrac{5}{2\sqrt{2}}\hat{i}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\hat{j}$ y la razón de cambio es $\|\nabla f(1,1)\|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

e) Como para $\varepsilon>0$, se tiene que $f(-\varepsilon,-\varepsilon)<f(0,0)=0<f(\varepsilon,\varepsilon)$; el punto $(0,0)$ no es de máximo relativo ni tampoco de mínimo relativo; es punto de silla.

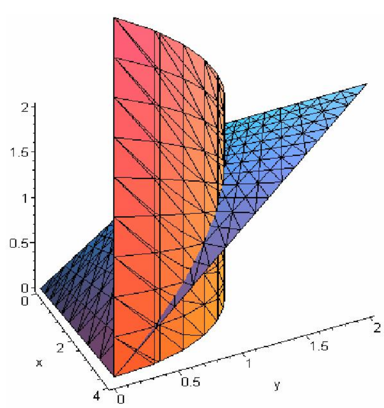
2.

a) φ es lineal con matriz asociada no singular; luego, ella es invertible y es una biyección.

b) La imagen D en el plano uv corresponde al rectángulo $[0,4]\times[0,2]$.

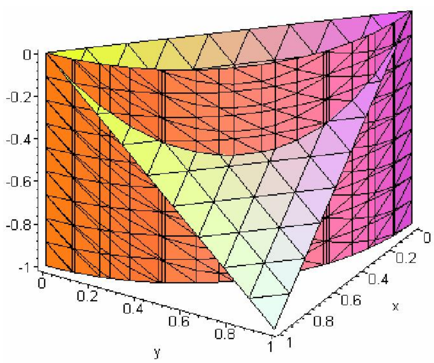
c) $\displaystyle\int_0^2\int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\,dx\,dy=\iint_D y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\,d(x,y)=\frac{1}{2}\iint_D uv^3e^{u^2}\,d(u,v)=e^{16}-1$.

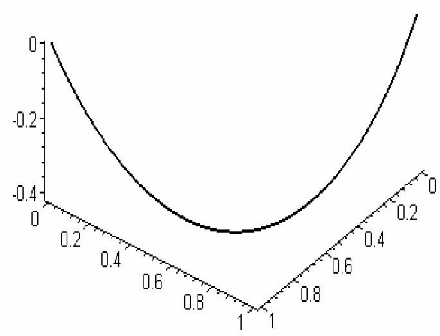
3.



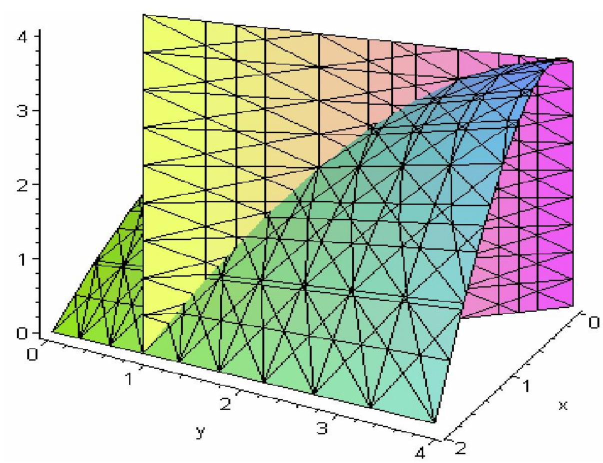
$$V=\int_0^2\int_0^{4-y^2}\int_0^y 1\,dz\,dx\,dy=4\,.$$

4. Un potencial escalar es $f(x,y,z)=\frac{3}{2}x^2z^2+6xy-y^2z$, si se considera el sentido de la línea desde A hasta B se tiene que $I=\int_\Gamma F\cdot dr=\int_A^B \nabla f\cdot dr=f(B)-f(A)=0$.





5.



Claramente F es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (en particular sobre cualquier abierto acotando a V), como S es seccionalmente suave y orientada exteriormente, por Teorema de Gauss, se tiene $\oint\!\!\oint_S F\cdot\hat{n}\,dA=\iiint_D \nabla\cdot F(x,y,z)\,d(x,y,z)=4\int_0^2\int_0^{4-\frac{4}{3}x}\int_0^{4-x^2}1\,dz\,dy\,dx=64$.

1. **Sea la función dada por** $f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2$ si $x \neq 0$ **y** $f(0,y) = 0$.

a) **Calcular** $\frac{\partial f}{\partial x}$ **en cada punto** (x,y)**, donde exista.**

b) **Determinar si** $\frac{\partial f}{\partial x}$ **es continua en** $(0,0)$ **el origen.**

c) **Determinar si** f **es diferenciable en el origen.**

2. **Verificar que la función** $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **definida por** $u(x,y) = f(xy) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$ **donde** f **y** g **son funciones reales de variable real derivables es solución de la ecuación en derivadas parciales**

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3. **Sea** D **la placa circular** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ **y la función** $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**, definida por** $f(x,y) = 3x^2y^2 + 2x^3 + 2y^3$**. Encontrar los valores máximos y mínimos de** f **sobre** D**.**

4. **Sean** Ω **la región del primer octante acotada por los planos coordenados, el cilindro elíptico** $4x^2 + y^2 = 16$ **y por el plano** $x + y = 4$, S **la superficie frontera de** Ω **orientada exteriormente. Si** $F(x,y,z) = 2xz\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} - z^2\hat{k}$**, calcular** $\oiint_S F \cdot \hat{n}\, dS$**.**

5. **Un campo de fuerzas está dado por** $F(x,y,z) = \frac{2x-y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x+2y}{x^2+y^2}\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$**.**

a) **Para la trayectoria** C_1 **correspondiente a la intersección entre el cilindro** $x^2 + z^2 = 1$ **y el plano** $y = 1$**, aplicar el Teorema de Stokes para determinar el trabajo** $\oint_{C_1} F \cdot dr$**.**

b) **Para la trayectoria** C_2 **correspondiente a la intersección entre el cilindro** $x^2 + y^2 = 1$ **y el plano** xy**, calcular** $\oint_{C_2} F \cdot dr$**.**

c) **Si** C_3 **es una curva suave, simple y cerrada, contenida** $z = 3$ **y que da una vuelta en sentido positivo en torno al eje** z**; utilizar el Teorema de Stokes para calcular** $\oint_{C_3} F \cdot dr$**.**

Desarrollo:

1.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x\neq 0$.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)+y^2}{h}$, este límite existe (y vale cero) solo si $y=0$;

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$, no existe para $y\neq 0$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$, como $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

no existe, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=f(0,0)$.

f es diferenciable en el origen si y solo si $L:=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$. Considerando que

$\dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|}\leq\|(x,y)\|$ y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\|(x,y)\|=0$, entonces $L=0$ y f es

diferenciable en el origen.

2. $u(x,y)=f(xy)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)=f(xy)+g\left(x^{-1}y\right)$,

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=y\,f'(xy)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)-x^{-1}y\,g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=y^2\,f''(xy)+x^{-3}y^2\,g''\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=x\,f'(xy)+g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = x^2 f'(xy) + x^{-1} g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$x^2y^2 f''(xy) + x^{-1}y^2 g''\left(\frac{y}{x}\right) - x^2y^2 f'(xy) + x^{-1}y^2 g''\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$

de lo anterior, $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$

3.

- Puntos críticos en $\overset{\circ}{D}$: $f_x(x,y) = 0 \Rightarrow 6xy^2 + 6x^2 = 0$, $f_y(x,y) = 0 \Rightarrow 6x^2y + 6y^2 = 0$.

  Si las variables x e y son no nulas entonces estas dos ecuaciones quedan $y^2 + x = 0$ y

  $x^2 + y = 0$; luego, los puntos críticos son $P_0 = (0,0)$ y $P_1 = (-1,1)$.

- En $Fr(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$: Si $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, utilizando multiplicadores de Lagrange se tiene el sistema

$$\begin{aligned} 6xy^2 + 6x^2 &= 2\lambda x && (1), \\ 6x^2y + 6y^2 &= 2\lambda y && (2), \\ g(x,y) &= 0. && (3) \end{aligned}$$

  Si las variables x e y son no nulas:

  Despejando λ de la primera ecuación se tiene que $\lambda = 3y^2 + 3x$, de la segunda ecuación se tiene que $\lambda = 3x^2 + 3y$; igualando, se tiene $(y+x)(y-x) = y - x$.

  Si $y \neq x$, al reemplazar $y = -x$ en la ecuación (3) se tiene que $x = \pm\sqrt{2}$ y esto a su vez implica que $y = \mp\sqrt{2}$.

  Ahora si se considera que $y = x$, reemplazando en la ecuación (3) se tiene que $x = \pm\sqrt{2}$ y esto a su vez implica que $y = \pm\sqrt{2}$.

  Si $x = 0$ por la ecuación (3) se tiene que $y = \pm 2$.

Si $y=0$ por la ecuación (3) se tiene que $x=\pm 2$

Así, en el conjunto $Fr(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$, se han encontrado los puntos

$P_2=(\sqrt{2},-\sqrt{2})=-P_3$, $P_4=(\sqrt{2},\sqrt{2})=-P_5$, $P_6=(0,2)=-P_7$, $P_8=(2,0)=-P_9$.

- Evaluando, se tiene $f(P_0)=0$, $f(P_1)=-1$, $f(P_2)=f(P_3)=12$, $f(P_4)=12+4\sqrt{2}$,

  $f(P_5)=12-4\sqrt{2}$, $f(P_6)=f(P_8)=16$, $f(P_7)=f(P_9)=-16$.

  Así; el punto P_4 corresponde al punto de máximo absoluto y P_7 y P_9 corresponden a puntos de mínimos absolutos.

4. Claramente F es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (en particular sobre cualquier abierto acotando a Ω), como S es seccionalmente suave y orientada exteriormente, por Teorema de Gauss,

$$\iint_S F\cdot\hat{n}\,dA=\iiint_\Omega \nabla\cdot F(x,y,z)\,d(x,y,z)=\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-4x^2}}\int_0^{4-y} x\,dz\,dy\,dx=\frac{40}{3}.$$

5. $\nabla\times F=(0,0,0)$.

a) Si $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2\le 1, y=1\}$, entonces $\oint_{C_1} F\cdot dr=\iint_{S_1}\nabla\times F\cdot\hat{n}dA=0$.

b) Considerando $C_2(t)=(\cos(t),\sin(t),0)$, con $t\in[0,2\pi]$; se tiene que $\oint_{C_2} F\cdot dr=2\pi$.

c) Si S tiene como borde a C_2 y a $-C_3$, por Teorema de Stokes se tiene que

$\oint_{C_2} F\cdot dr-\oint_{C_3} F\cdot dr=\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\,dA=0$; por lo tanto, $\oint_{C_3} F\cdot dr=2\pi$.

1. **Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \to f(x,y,z)$ una función diferenciable, al introducir las coordenadas cilíndricas (r,θ,z) definidas por $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $z = z$ se obtiene $g(r,\theta,z) := f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$. Hallar una expresión en coordenadas cartesianas (en términos de los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$) para**

$$\frac{\partial g}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{k},$$

donde $\hat{u}_r = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}$ y $\hat{u}_\theta = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}$.

2. **Una caja rectangular sin tapa debe tener un área superficial de $12m^2$. Determinar las dimensiones de la caja de modo que su volumen sea máximo.**

3. **Sean $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = g(x)h(y)$, con g y h funciones reales de variable real continuas y $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \mathrm{c} \le y \le \mathrm{d}\}$.**

   a) Demostrar que $\iint\limits_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b f(t)\,dt \int_c^d g(t)\,dt$.

   b) Calcular la integral doble $\iint_D e^{x^2}\sin\left[(y-1)^3\right]d(x,y)$, donde $D = [0,2\pi]\times[-1,3]$.

4. **Calcular el volumen del primer octante limitado por la superficie de ecuación $z = xy$ y por el plano de ecuación $x + y = 1$.**

5. **Evaluar la integral triple $\iiint\limits_S z\,d(x,y,z)$, donde S es el sólido limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) e inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.**

<u>Desarrollo</u>:

1. Como $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}$, entonces

$$\frac{\partial g}{\partial r}\hat{u}_r = \left(\cos^2(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\right)\hat{i} + \left(\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin^2(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\right)\hat{j} \qquad (1),$$

como $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}$, entonces

$$\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\hat{u}_\theta = \left(\sin^2(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\right)\hat{i} + \left(-\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \cos^2(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\right)\hat{j} \qquad (2),$$

como $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$, entonces $\frac{\partial g}{\partial z}\hat{k} = \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$ (3).

De (1), (2) y (3), al sumar se obtiene

$$\frac{\partial g}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f .$$

2. Se debe maximizar $V(x,y,z) = xyz$, sujeta a la restricción $xy + 2xz + 2yz = 12$ donde $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$. Si $g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz - 12$, utilizando multiplicadores de Lagrange se tiene el sistema definido por $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ y $g(x,y,z) = 0$.

Hay 4 ecuaciones,

$$yz = \lambda(y + 2z) \qquad (1),$$
$$xz = \lambda(x + 2z) \qquad (2),$$
$$xy = \lambda(2x + y) \qquad (3),$$
$$xy + 2xz + 2yz = 12 \qquad (4).$$

Al multiplicar en (1) y (2) por x e y e igualar se obtiene que $2\lambda z(y - x) = 0$; de donde $y = x$; reemplazando $y = x$ en (3), se tiene que $x = 4\lambda$; reemplazando $x = 4\lambda$ en (2), se tiene que $2z = 4\lambda$.

De lo anterior, $x = y = 2z$ y de (4) se tiene $x = y = 2 \Rightarrow z = 1$. Por lo tanto, las dimensiones son ancho y largo iguales $2m$ y alto igual $1m$.

3.

a) $$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_c^d g(x)h(y)\,dy\,dx$$

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b g(x) \int_c^d h(y)\,dy\,dx$$

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d h(y)\,dy \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$$

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b f(t)\,dt \cdot \int_c^d g(t)\,dt\,.$$

b) $$\iint_D e^{x^2} \sin\left[(y-1)^3\right] d(x,y) = \int_0^{2\pi} e^{t^2}\,dt \cdot \int_{-1}^{3} \sin\left[(t-1)^3\right] dt = \int_0^{2\pi} e^{t^2}\,dt \cdot \int_{-2}^{2} \sin\left(z^3\right) dz\,,$$

como $h(y) := \sin\left(y^3\right)$ es función impar, entonces $\int_{-2}^{2} \sin\left(z^3\right) dz = 0$ y por lo tanto,

$$\iint_D e^{x^2} \sin\left[(y-1)^3\right] d(x,y) = 0\,.$$

4. $$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{xy} 1\,dz\,dy\,dx = \frac{1}{24}\,.$$

5. Al reemplazar $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en la ecuación la ecuación de la esfera, la cual se reescribe como $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ se tiene $z = 0$ o $z = a$; por tanto, la intersección antes ambas superficies se da en los planos $z = 0$ y $z = a$.

La proyección del sólido sobre el plano xy es el disco $x^2 + y^2 \le a^2$. Al utilizar coordenadas cilíndricas la ecuación de la esfera queda $z = a \pm \sqrt{a^2 - r^2}$ y la del cono $z = r$, se tiene

$$\iiint_S z\,d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_r^{\sqrt{a^2-r^2}+a} rz\,dz\,dr\,d\theta = \frac{7\pi}{6} a^4\,.$$

Observación: En coordenadas esféricas, se tiene que

$$\iiint_S z\,d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2a\cos(\varphi)} \rho^3 \sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\,.$$

1. **Sea** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} & ,\text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & ,\text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) **Determinar el valor de α de modo que f sea continua en el origen.**

b) **Con el valor de α antes obtenido, calcular las derivadas parciales en el origen.**

c) **Considerando lo de b), decidir si f es diferenciable en $(0,0)$.**

2. **Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es diferenciable en X_0, demostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{v}}(X_0)=\nabla f(X_0)\cdot\hat{v}$.**

3. **Utilizar el cambio de variables dado por $x=u-v$ e $y=u-v$ para calcular la integral $\iint_D e^{-\left(x^2+xy+y^2\right)}d(x,y)$, donde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+xy+y^2\leq 1\right\}$.**

4. **Usar integrales triples para calcular el volumen del sólido acotado por las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=9$ que se encuentra sobre la hoja superior del cono $z^2=3\left(x^2+y^2\right)$.**

5. **Hallar la masa del sólido del primer octante que está bajo el plano $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, con a, b y c positivos sabiendo que la densidad está dada por $\delta(x,y,z)=kx$.**

<u>Desarrollo</u>:

1.

a) Si $x=r\cos(\theta)$ e $y=r\sin(\theta)$, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}=\lim_{r\to 0}\frac{\sin\left(r^2\right)}{1-\cos(r)}=2\,;$$

luego, debe tenerse que $\alpha=2$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) f es diferenciable en el origen ssi $L := \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-2}{\|(x,y)\|} = 0$.

Si se considera, nuevamente el paso a coordenadas polares, se tiene que $L = 0$ y por lo tanto, f es diferenciable en $(0,0)$.

2. Por definición, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(X_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0 + t\hat{v}) - f(X_0)}{t}$.

Si $g(t) := f(X_0 + t\hat{v})$, se tiene que $g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(X_0)$.

Al considerar $C(t) := X_0 + t\hat{v}$; se tiene que $C(0) = X_0$ y que $C'(t) = \hat{v}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

De la regla de la cadena, se tiene que

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left(f(X_0 + t\hat{v})\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt};$$

por lo tanto, $g'(0) = \nabla f(C(0)) \cdot C'(0)$ y entonces se deduce que $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \hat{v}$.

3. Con el cambio de variables indicado, la región D en las coordenadas u y v queda descrita por la región elíptica $D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 3u^2 + v^2 \le 1\}$ y como $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -2$, se tiene

$$\iint_D e^{-(x^2+xy+y^2)} d(x,y) = 2\iint_{D^*} e^{-(3u^2+v^2)} d(u,v).$$

Considerando ahora $u = \frac{1}{\sqrt{3}} r\cos(\theta)$ y $v = r\sin(\theta)$, se tiene que $\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = \frac{r}{\sqrt{3}}$ y

$$\iint_D e^{-(3u^2+v^2)} d(u,v) = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 re^{-r^2} dr\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

De lo anterior, $\iint_D e^{-(x^2+xy+y^2)} d(x,y) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

4. Utilizando coordenadas esféricas, se tiene que

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_1^3 \rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi d\theta=\frac{26\pi}{3}\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Observación: En coordenadas cilíndricas, se tiene

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{3/2}\int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{9-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\frac{26\pi}{3}\left(2-\sqrt{3}\right).$$

5. $$M_{Tetraedro}=\iiint_V \delta(x,y,z)\,d(x,y,z)=\int_0^a\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} kx\,dz\,dy\,dx=\frac{a^2bck}{24}.$$

1. **Sean** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$ **y** $g(x,y)=x^2-y^2$**. Determinar todos los valores para** a **y** b **de modo que las curvas de nivel** $N_a(f)$ **y** $N_b(g)$ **sean ortogonales.**

2. **Hallar los puntos más alejados y los puntos más cercanos al origen sobre la elipse de ecuación** $3x^2+4xy+6y^2=140$**.**

3. **Calcular el volumen de la región del espacio acotada por las superficies** $y=x^2+\frac{1}{4}$**,** $x+y=0$**,** $x-y=0$**,** $x+y+z=1$ **y** $x+y+z=2$**.**

4. **Calcular la masa del sólido comprendido entre las esferas de ecuaciones** $x^2+y^2+z^2=1$ **y** $x^2+y^2+z^2=9$ **sabiendo que** $\delta(x,y,z)=\|(x,y,z)\|$**.**

5. **Determinar el área de la porción del paraboloide hiperbólico de ecuación** $z=y^2-x^2$ **acotada por los cilindros** $x^2+y^2=1$ **y** $x^2+y^2=9$**.**

<u>Desarrollo</u>:

1. $N_a(f)$ y $N_b(g)$ ortogonales $\Rightarrow \nabla f(x,y)\cdot\nabla g(x,y)=0$.

Se tiene $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)\cdot(x,-y)=0$; luego, $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=\frac{b}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=0$ y por lo tanto $b=0$ y por la definición de f debe tenerse que $a>1$.

2. Sea $f(x,y):=x^2+y^2$ (la distancia al cuadrado de un punto cualquiera del plano al origen), al considerar $g(x,y):=3x^2+4xy+6y^2-140$ y utilizar multiplicadores de Lagrange se tiene el sistema definido por $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$ y $g(x,y)=0$.

Hay 3 ecuaciones,

$$2x=\lambda(6x+4y) \quad (1),$$

$$2y=\lambda(4x+12y) \quad (2),$$

$$3x^2+4xy+6y^2=140 \quad (3).$$

Las dos primeras ecuaciones, pueden reescribirse como el sistema lineal y homogéneo (en las variables x e y) dado por $\begin{cases} (3\lambda-1)x+2\lambda y=0 \\ 2\lambda x+(6\lambda-1)y=0 \end{cases}$; como $(0,0)$ no satisface la ecuación de la elipse, entonces deben existir infinitas soluciones para el sistema lineal y por lo tanto el determinante de la matriz asociada debe ser cero; se tiene entonces que $\lambda=\frac{1}{2}$ o $\lambda=\frac{1}{7}$.

Si $\lambda=\frac{1}{2}$, de (1) se tiene $x=-2y$; de (3) se obtiene que $y=\pm\sqrt{14}$ y se tienen los puntos $P_1=\left(2\sqrt{14},-\sqrt{14}\right)=-P_2$.

Si $\lambda=\frac{1}{7}$, de (1) se tiene $y=2x$; de (3) se obtiene que $x=\pm 2$ y se tienen los puntos $P_3=(2,4)=-P_4$.

Como $f(P_1)=f(P_2)=70$ y $f(P_3)=f(P_4)=20$, se tiene que P_1 y P_2 son los puntos de la elipse que están más alejados del origen mientras que P_3 y P_4 son los más cercanos.

3. $V=\int_{-1/2}^{0}\int_{-x}^{x^2+1/4}\int_{1-x-y}^{2-x-y}1\,dz\,dy\,dx+\int_{0}^{1/2}\int_{x}^{x^2+1/4}\int_{1-x-y}^{2-x-y}1\,dz\,dy\,dx=2\int_{0}^{1/2}\int_{x}^{x^2+1/4}1\,dy\,dx=\frac{1}{12}$.

4. $\delta(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{3}k\rho^3\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=80\pi$.

5. Utilizando la fórmula del problema 2 de la página 107, se tiene que el área pedida está dada por

$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,d(x,y),$$

donde $f(x,y)=y^2-x^2$ y $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1\le x^2+y^2\le 4\right\}$.

Utilizando coordenadas polares, se tiene que $A=\int_0^{2\pi}\int_1^{3}r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-5\sqrt{5}\right)$.

1. **Sea** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$**,** $(x,y)\to f(x,y)$**, al considerar** $x=e^s\cos(t)$ **e** $y=e^s\sin(t)$ **se obtiene** $g(s,t):=f\left(e^s\cos(t),e^s\sin(t)\right)$**. Probar que**

$$e^{2s}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

2. **Utilizando multiplicadores de Lagrange, determinar la distancia entre el punto** $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ **y el plano de ecuación** $ax+by+cz+d=0$**.**

3. **Calcular el volumen de la región** R **del primer octante y tal que** $x+y^{1/2}+z^{1/3}\le 1$**.**

4. **Utilizar coordenadas cilíndricas para calcular el volumen de la región acotada por el cilindro** $x^2+y^2=4$**, el paraboloide** $z=4-x^2-y^2$**, la esfera** $x^2+y^2+(z-8)^2=4$ **y tal que** $x+y\le 0$**.**

5. **Un plano corta un casquete de altura** H **en una esfera de radio** R**, con** $0<H<R$**. Usar coordenadas esféricas para calcular el volumen del casquete.**

Desarrollo:

1. De la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}=x\frac{\partial f}{\partial x}+x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\right)+y\frac{\partial f}{\partial y}+y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}=x\frac{\partial f}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\qquad(1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=-x\frac{\partial f}{\partial x}-y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right)-y\frac{\partial f}{\partial y}+x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=-x\frac{\partial f}{\partial x}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}-xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\qquad(2)$$

De (1) y (2), al sumar, se obtiene que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}=\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right);$$

por lo tanto, $e^{2s}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$.

2. Sea $f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$, al considerar $g(x,y,z):=ax+by+cz+d$ y usar multiplicadores de Lagrange para minimizar la distancia desde un punto $P=(x,y,z)$ en el plano indicado hasta P_0 se tiene que $\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)$ y $g(x,y,z)=0$.

Hay 4 ecuaciones,

$$2(x-x_0)=a\lambda \qquad (1),$$

$$2(y-y_0)=b\lambda \qquad (2),$$

$$2(z-z_0)=c\lambda \qquad (3),$$

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (4)$$

Como al menos una de las componentes del vector normal al plano debe ser no nula, puede asumirse que $a\neq 0$ y en tal caso de (1) se tiene $\lambda=\frac{2(x-x_0)}{a}$, de donde por las ecuaciones (2) y (3) se obtiene que $y=\frac{b(x-x_0)}{a}+y_0$ y $z=\frac{c(x-x_0)}{a}+z_0$, respectivamente.

De estas últimas dos igualdades y de (4) se deduce que $x-x_0=-\frac{a(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}$, de donde $y-y_0=-\frac{b(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}$ y $z-z_0=-\frac{c(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}$;

se tiene entonces que el valor mínimo para f es $\frac{(ax_0+by_0+cz_0+d)^2}{a^2+b^2+c^2}$ por lo que la distancia entre P_0 y el plano es $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

3. Al considerar el cambio de variables dado por $x = u$, $y = v^2$ y $z = w^3$, R se transforma en s

$$R^* = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u+v+w \le 1\}$$ y como $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = 6vw^2$, se tiene

$$V(R) = \iiint_R 1\, d(x,y,z) = \iiint_{R^*} 6vw^2 dw\, dv\, du = 6\int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} vw^2 dw\, dv\, du = \frac{1}{60}.$$

4. $$V = \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \int_0^2 \int_{4-r^2}^{8-\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = \frac{28\pi}{5}.$$

5. $$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathrm{Arccos}\left(\frac{R-H}{R}\right)} \int_{(R-H)\sec(\varphi)}^{R} \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \frac{\pi H^2(3R-H)}{3}.$$

Observación: En coordenadas cilíndricas, $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2HR-H^2}} \int_{R-H}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$.

1. **Si $f(x,y)=\dfrac{\cos(x)}{\cos(y)}$, hallar el desarrollo de Taylor de orden 2 para f en torno a $(0,0)$.**

2. **Al calcular el volumen V situado bajo el paraboloide $z=x^2+y^2$ y sobre una cierta región S del plano xy, se ha llegado a la suma de integrales**

$$V=\int_0^1\int_0^y\left(x^2+y^2\right)dx\,dy+\int_1^2\int_0^{2-y}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy.$$

Expresar el volumen V mediante una integral iterada en la que el orden de integración esté invertido y luego calcular V.

3. **Si $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-h)^2+(y-k)^2\le 1\right\}$, hallar los valores de h y k de modo que la integral $\iint\limits_D\left(2x^2+xy+y^2-x-2y+17\right)d(x,y)$ sea mínima.**

4. **Mostrar que la superficie $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, con $z\ge 1$ se puede *llenar* pero no pintar.**

5. **Sean S la superficie definida por $4x^2+9y^2+36z^2=36$, con $z\ge 0$ y el campo vectorial $F(x,y,z)=\left(y,x^2,\left(x^2+y^4\right)^{3/2}\sin\left(e^{\sqrt{xyz}}\right)\right)$; calcular el flujo $\iint\limits_S\nabla\times F\cdot\hat{n}\,dS$.**

<u>Desarrollo</u>:

1. Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{\sin(x)}{\cos(y)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\sin(y)\cos(x)}{\cos^2(y)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{\sin(x)}{\cos(y)}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-\dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\cos^2(y)}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{\cos^2(y)\cos(x)+2\sin^2(y)\cos(x)}{\cos^3(y)}$, se tiene

que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y}(0,0)=1$ y por lo tanto el

desarrollo pedido es $p_2(x,y)=f(0,0)-\dfrac{1}{2}\left(x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}$.

2. $V=\displaystyle\int_0^1\int_{2-x}^{x}\left(x^2+y^2\right)dy\,dx=\frac{4}{3}$.

3. Considerando $f\left(x,y\right)=2x^2+xy+y^2-x-2y+17$, $x=r\cos\left(\theta\right)+h$ e $y=r\sin\left(\theta\right)+k$, el conjunto D se transforma en $D^*=\left\{\left(r,\theta\right)\in\mathbb{R}^2:0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi\right\}$ y

$$\iint_D f\left(x,y\right)d\left(x,y\right)=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,f\left(r,\theta\right)dr\,d\theta=\pi\left(k^2-2k\pi+\frac{71}{4}+2h^2-h+hk\right):=g\left(h,k\right).$$

El único punto crítico para g es $\left(h,k\right)=\left(0,1\right)$ y como para él se tiene que $\Delta_1>0$ y $\Delta_2>0$, entonces por criterio de la matriz hessiana se tiene que él de un mínimo.

4. Sea $D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\le 1\right\}$. Como $\iint_D\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right)d\left(x,y\right)=\pi$, el volumen bajo $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y sobre el plano $z=1$ es π y por lo tanto la superficie se puede *llenar*.

Utilizando la fórmula del problema 2 de la página 107, se llega a la integral

$$I:=\iint_D\sqrt{\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}+1}\,d\left(x,y\right)$$

y usando coordenadas polares, como $\frac{2}{r}\le r\sqrt{\frac{1}{r^4}+1}$ se tiene por criterio de comparación directa para integrales simples que I diverge y por lo tanto la superficie no se puede pintar.

5. El borde de S corresponde a la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ que se encuentra en el plano $z=0$, si ella se considera en sentido antihorario una parametrización es $C\left(t\right)=\left(3\cos\left(t\right),2\sin\left(t\right),0\right)$, con $t\in\left[0,2\pi\right]$. Si S posee vector normal unitario apuntando hacia arriba, entonces por Teorema de Stokes, se tiene

$$\iint_S\nabla\times F\cdot\hat{n}\,dS=\oint_C F\cdot dr=\int_0^{2\pi}F\left(C\left(t\right)\right)\cdot C\left(t\right)dt=-6\pi\,.$$

1. El cambio de variables dado por $x=e^s$ e $y=e^t$ transforma a $f(x,y)$ en $g(s,t)$ siendo $g(s,t)=f(e^s,e^t)$. Sabiendo que f satisface la ecuación en derivadas parciales

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

utilizar la regla de la cadena para demostrar que $\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=0$.

2. Demostrar que cerca del punto $(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,2,1,-1)$ se puede resolver el sistema

$$\begin{aligned} e^{x-u}+yv+3&=0\\ e^{y+v}-xu&=0\end{aligned}$$

para u y v como funciones de las variables x e y y luego calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(1,2)$.

3. Evaluar la integral $\int_1^2\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy\,dx+\int_2^4\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy\,dx$.

4. Sean $D=[0,1]\times[-1,1]$ y $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que $f(1,1)=6$, $f(1,-1)=3$, $f(0,1)=1$ y $f(0,-1)=2$. Calcular $\iint_D\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,d(x,y)$.

5. Calcular el volumen acotado por $x^2+y^2=2$ y $z^2=x^2+y^2-1$.

<u>Desarrollo</u>:

1. Como $\frac{\partial g}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}=x\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}=x\frac{\partial f}{\partial x}+x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}\right)=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}=y\frac{\partial f}{\partial y}$ y

$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=y\frac{\partial f}{\partial y}+y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+y\frac{\partial f}{\partial y}$; se tiene que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

2. Sea $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $(x,y,u,v)\mapsto F(x,y,u,v)=\left(f(x,y,u,v),g(x,y,u,v)\right)$ donde $f(x,y,u,v)=e^{x-u}+yv+3$ y $g(x,y,u,v)=e^{y+v}-xu$; sea además, $P_0=(x_0,y_0,u_0,v_0)$.

Como F es de clase C^1 cerca de P_0, $F(P_0)=(0,0)$ y $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(P_0)=1\neq 0$, por el Teorema de la Función Implícita, el sistema define de manera única a u y v como funciones de clase C^1 (y por tanto diferenciables) en las variables x e y. Derivando las dos ecuaciones del sistema con respecto a x, se tiene que

$$e^{x-u}\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+y\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$e^{y+v}\frac{\partial v}{\partial x}-u-x\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

aquí al evaluar en P_0 y resolver el sistema lineal, se llega a que $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,2)=-3$.

3. $\displaystyle\int_1^2\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy\,dx+\int_2^4\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy\,dx=\int_1^2\int_y^{y^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dx\,dy=\frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$.

4. $$\iint_D\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,d(x,y)=\int_0^1\int_{-1}^1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$\iint_D\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,d(x,y)=\int_0^1\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,1)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,-1)\right)dx$$

$$\iint_D\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,d(x,y)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(x,1)\,dx-\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(x,-1)\,dx$$

$$\iint_D\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,d(x,y)=f(1,1)-f(0,1)-\left(f(1,-1)-f(0,-1)\right)$$

$$\iint_D\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,d(x,y)=4$$

5. Coordenadas cilíndricas: $V=8\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{r^2-1}}r\,dz\,dr\,d\theta=\frac{4\pi}{3}$.

1. **Si $b^2-4ac<0$, $a>0$, $b>0$ calcular el área encerrada por la elipse de centro en el origen y de ecuación $ax^2+bxy+cy^2=1$.**

2. **La Transformada de Laplace para una función $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$, está dada por**

$$L\{f(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt$$

cuando la integral converge, sabiendo que el producto de convolución entre f y g está dado por $(f*g)(t)=\int_0^t f(t-u)g(u)\,du$, probar que $L\{(f*g)(t)\}=L\{f(t)\}L\{g(t)\}$.

3. **La rigidez flexural EI de una viga uniforme es el producto de su módulo de elasticidad de Young E y el momento de inercia I de la sección transversal de la la viga en x, con respecto a la recta horizontal l que pasa por el centro de gravedad de esta sección transversal. Aquí, $I=\iint\limits_R\left[f(x,y)\right]^2 d(x,y)$, $f(x,y)$ es la distancia de (x,y) a l y R es la sección transversal de la viga considerada.**

   a) **Hallar I cuando R es el rectángulo $-1\le x\le 1$, $-2\le y\le 2$ y l es el eje x.**

   b) **Hallar I cuando R es el círculo de radio 4 y centro en el origen y l es el eje x.**

4. **Calcular el volumen de la región limitada por las superficies $y^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$, $x\left(y^2+z^2\right)=1$ y $x=0$, con $0<a<b$.**

5. **Hallar $\oint\limits_L F\cdot dr$, si $F(x,y,z)=(2z,8x-3y,3x+y)$ y L es el borde de la placa triangular ABC orientado positivamente siendo $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$ y $C=(0,0,2)$.**

<u>Desarrollo</u>:

1. Al considerar $f(x,y):=x^2+y^2$ y $g(x,y):=ax^2+bxy+cy^2-1$ procediendo de modo similar a como se hizo con el problema 2 de la página 171 y como el área encerrada por una elipse es igual al producto de la longitud de sus semiejes multiplicado por π, se obtiene que el área pedida es $\dfrac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$.

2. $L\left\{(f*g)(t)\right\}=L\left\{\int_0^t f(t-u)g(u)\,du\right\}$

$$L\left\{(f*g)(t)\right\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}\int_0^t f(t-u)g(u)\,du\,dt$$

$$L\left\{(f*g)(t)\right\}=\int_0^{+\infty}\int_0^t e^{-st}f(t-u)g(u)\,du\,dt$$

$$L\left\{(f*g)(t)\right\}=\int_0^{+\infty}\int_u^{+\infty}e^{-st}f(t-u)g(u)\,dt\,du$$

$$L\left\{(f*g)(t)\right\}=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-s(w+u)}f(w)g(u)\,dw\,du$$

$$L\left\{(f*g)(t)\right\}=\int_0^{+\infty}e^{-su}g(u)\int_0^{+\infty}e^{-sw}f(w)\,dw\,du$$

$$L\left\{(f*g)(t)\right\}=\int_0^{+\infty}e^{-sw}f(w)\,dw\cdot\int_0^{+\infty}e^{-su}g(u)\,du$$

$$L\left\{(f*g)(t)\right\}=L\left\{f(t)\right\}L\left\{g(t)\right\}.$$

3.

a) $I=\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}y^2dy\,dx=\dfrac{32}{3}$,

b) $I=\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^3\sin^2(\theta)\,dr\,d\theta=64\pi$.

4. Para $y=r\cos(\theta)$ y $z=r\sin(\theta)$, se tiene $V=\int_0^{2\pi}\int_a^b\int_0^{1/r^2}r\,dx\,dr\,d\theta=2\pi\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

5. El plano que contiene a los 3 puntos es $2x+2y+z=2$ y una parametrización de él es la dada por $\Phi(x,y)=(x,y,2-2x-2y)$, con $D_\Phi=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\right\}$ y vector normal $\vec{n}=(2,2,1)$; como $\nabla\times F=(1,-1,8)$, por Teorema de Stokes se tiene que

$$\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\,dA=\iint_D 4\,d(x,y)=4\,\acute{A}rea(D)=4.$$

1. **¿Cuáles deben ser las dimensiones de una lata cilíndrica con volumen V fijo y de modo que para su fabricación se utilice la menor cantidad de material?**

2. **Maximizar $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1x_2\ldots x_n)^2$ sobre la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$ y luego verificar que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética.**

3. **De todas las curvas de Jordan orientadas en sentido antihorario, encontrar aquella sobre la cual el trabajo realizado por el campo $F(x,y)=\left(\frac{1}{4}x^2y+\frac{1}{3}y^3,x\right)$ es máximo y luego determinar dicho valor.**

4. **Sean $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ armónica y R un sólido tal que $S=\partial R$ es suave, orientable y con normal unitaria exterior $\hat{n}$. Probar que $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}dA=0$ y $\iint_S f\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}dA=\iiint_R \|\nabla f\|^2 dV$.**

5. **Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función armónica. Para cada $r>0$ considerar la circunferencia $C_r : x^2+y^2=r^2$ recorrida en sentido antihorario y definir $\varphi(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{C_r} f\,dr$.**

a) **Probar que $\lim_{r\to 0}\varphi(r)=f(0,0)$.**

b) **Verificar que $\varphi'(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{C_r} -\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{\partial f}{\partial x}dy$.**

c) **Deducir que φ es constante y que $\varphi(r)=f(0,0)$, $\forall r>0$.**

<u>Desarrollo</u>:

1. Al resolver el problema de minimización de $f(h,r)=hr+r^2$ con la condición $\pi hr^2=V$ utilizando multiplicadores de Lagrange se obtiene que $h=2r=\sqrt[3]{4V/\pi}$.

Observación:

- De la condición dada puede despejarse una variable en función de la otra y luego resolver el problema utilizando una función de una sola variable.

- Al parecer algunas empresas conocen este problema y (al diseñar sus envases consideran) la solución de este;

por ejemplo, en algunos tarros del lujoso Nescafé, se tiene que $h \approx 2r$.

2. Utilizando Lagrange, se tiene el sistema de (n+1) ecuaciones

$x_1 x_2^2 \ldots x_n^2 = \lambda x_1$, $x_1^2 x_2 \ldots x_n^2 = \lambda x_2, \ldots,$ $x_1^2 x_2^2 \ldots x_n = \lambda x_n$ y $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

Como la esfera es un conjunto compacto y f es continua, el Teorema de los valores extremos asegura la existencia de un máximo absoluto y de un mínimo absoluto, este último se alcanza cuando alguna de las componentes de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es cero.

De las n primeras ecuaciones, si $x_i \neq 0$ con $i = \overline{1,n}$ se tiene $\lambda = x_2^2 \ldots x_n^2 = \ldots = x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1}^2$; de donde al reemplazar $x_1^2 = x_2^2 = \ldots = x_n^2$ en la última ecuación se tiene que $x_i = \pm \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y por lo tanto el máximo absoluto es $f\left(\pm \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \pm \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \pm \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) = \dfrac{1}{n^n}$.

De lo anterior, si $a_i > 0$ y $x_i = \sqrt{\dfrac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}}$ como se verifica la ecuación (n+1), se tiene que

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \ldots x_n)^2 = \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_n}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2} \leq \dfrac{1}{n^n}$, de donde $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ lo cual demuestra que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética.

3. Si la curva es $C = \partial R$, por Teorema de Green, se tiene $\oint_C F \cdot dr = \iint_R \left(1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2 \right) d(x, y)$.

Al considerar el paraboloide elíptico $z = f(x, y) := 1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2$, se tiene que el volumen bajo él y sobre el plano $z = 0$ será máximo cuando $D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$; basta tomar entonces a la curva C como la elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Utilizando coordenadas elípticas, se tiene que $\oint_C F\cdot dr=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\left(1-r^2\right)drd\theta=\pi$.

4.

a) Si $F=\nabla f$, entonces $\nabla\cdot F=0$ y por Teorema de Gauss, $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}dA=0$.

b) Como $\nabla\cdot\left(f\,\nabla f\right)=\left(f_x\right)^2+f\,f_{xx}+\left(f_y\right)^2+f\,f_{yy}+\left(f_z\right)^2+f\,f_{zz}=\left\|\nabla f\right\|^2$, por Teorema de Gauss es claro que $\iint_S f\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}dA=\iiint_R \left\|\nabla f\right\|^2 dV$.

5.

a) Con $C_r\left(t\right)=\left(r\cos\left(t\right),r\sin\left(t\right)\right)$ y $t\in\left[0,2\pi\right]$, se tiene que $\varphi\left(r\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(r\cos\left(t\right),r\sin\left(\mathrm{t}\right)\right)dt$ y $\lim\limits_{r\to 0}\varphi\left(r\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(r\cos\left(t\right),r\sin\left(t\right)\right)\,dt=f\left(0,0\right)$.

b) Si $I_{C_r}:=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{C_r}-\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{\partial f}{\partial x}dy$ por definición, de integral de línea, se tiene que

$I_{C_r}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\left(t\right),r\sin\left(t\right)\right)\cos\left(t\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\left(t\right),r\sin\left(t\right)\right)\sin\left(t\right)\right]dt$; de la regla de la cadena, $\varphi'\left(r\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\left(t\right),r\sin\left(t\right)\right)\cos\left(t\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\left(t\right),r\sin\left(t\right)\right)\sin\left(t\right)\right]dt$; por lo tanto, $\varphi'\left(r\right)=I_{C_r}$.

c) Del Teorema de Green, si $C=\partial R$, se tiene que $I_{C_r}=\frac{1}{2\pi r}\iint\limits_D\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]d\left(x,y\right)=0$ y por lo tanto $\varphi'(r)=0$ y φ es constante y dado que el límite de una constante es dicha constante, por la parte a), se deduce que $\varphi(r)=f(0,0)$.

Erratas Recopilación de ejercicios resueltos para Cálculo III (521227)

Texto: Disponible en `http://www2.udec.cl/~egavilan`

- **Página 5, problema 4:** En la definición de f, en la *segunda columna*, debe decir $-y^2$ en lugar de y^2.
- **Página 26, problema 3:** Debe decir del Teorema en lugar de por del Teorema.
- **Página 41:** En la solución del problema 1 debe decir $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \left(\dfrac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$
- **Página 41, problema 9:** En la ecuación de la esfera debe decir 9 en lugar de 18.
- **Página 44, resultado problema 9:** Debe decir 53 y 27 en lugar de 57 y 23.
- **Página 48, problema 7:** En el recubrimiento después del segundo símbolo $\leq$ debe decir 2 en lugar de $2-x$.
- **Página 58:** Debe decir $h(0,2)-h(3,0)$ en lugar de $f(0,2)-f(3,0)$.
- **Página 60, problema 6:** Debe decir si $\hat{n}$ es la normal en lugar de si es la normal.
- **Página 63, problema 8:** En la segunda solución, última integral, debería decir $2r$ en lugar de r.
- **Página 116, problema 1:** En el enunciado debe decir $x = 4 - y^2$ en lugar de $z = 9 - y^2$ y en la integral triple el orden debe ser $dz\,dx\,dy$.
- **Página 125, problema 5:** Debe decir esferas de radio 4.
- **Página 148:** En la ecuación (1) debe decir $\lambda_1 x$ en lugar de $\lambda_1 x^2$.
- **Página 148:** Después de (5) el factor que acompaña a $2\lambda_1$ debe ser $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{25}$.
- **Página 172, problema 4:** En el integrando hay una letra k demás.
- **Página 177, problema 4:** En el lado izquierdo de la desigualdad debería decir $\dfrac{1}{r}$.
- **Página 178, problema 2:** Debería decir $(1,2,1,-2)$ en lugar de $(1,2,1,-1)$.

4 de marzo de 2024
EGG/egg
egavilan@udec.cl

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°1
Cálculo III (521227)

1. Hallar la adherencia, el interior, el conjunto de los puntos de acumulación y la frontera para

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2 + y^2}, 4 \leq z \leq 9\right\}.$$

Además, indicar justificadamente, si A es cerrado, abierto o acotado.

Solución:

$adh(A) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, 4 \leq z \leq 9\right\}$ **(4 puntos)**

$int(A) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2 + y^2}, 4 < z < 9\right\}$ **(4 puntos)**

$A' = adh(A)$ **(3 puntos)**

$Fr(A) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, 4 \leq z \leq 9\right\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 16, z = 4\} \cup$
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 81, z = 9\}$ **(9 puntos)**

A no es cerrado pues $A \neq \overline{A}$ **(3 puntos)**

A no es abierto pues $int(A) \neq A$ **(3 puntos)**

A es acotado pues, por ejemplo, $A \subset B((0, 0, 0); 9\sqrt{2} + 1)$ **(4 puntos)**

2. Calcular, si es posible, los siguientes lḿites:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$,

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,0,1)} \frac{(x-2)^2y(z-1)}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+|z-1|}}$.

Solución:

a) Si $x=0$, se tiene que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4} = 0$. **(5 puntos)**

Si $y^2 = x^3$, se tiene que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4} = \frac{1}{2}$. **(5 puntos)**

De lo anterior, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4} = 0$ no existe. **(5 puntos)**

b) Para $(x,y,z) \neq (2,0,1)$, se tiene que

$$\frac{|(x-2)^2y(z-1)|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+|z-1|}} \leq (x-2)^2|z-1|$$

y como $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,0,1)} (x-2)^2|z-1| = 0$ **(8 puntos)**, por Teorema del sandwich,
$\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,0,1)} \frac{(x-2)^2y(z-1)}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+|z-1|}} = 0$. **(7 puntos)**

GAJ/EBC/EGG/egg
22 de Septiembre de 2016

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°1
Cálculo III (521227)

1. Encontrar el interior, el conjunto de los puntos de acumulación y la frontera para $A = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 \geq 9, -5 \leq x \leq 5\}$. Además, indicar si A es abierto, cerrado o compacto.

   Solución:

   $int(A) = \phi$ **(5 puntos)**,

   $A' = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 \geq 9, -5 \leq x \leq 5\}$ **(5 puntos)**,

   $Fr(A) = A$ **(5 puntos)**,

   A no es abierto pues $int(A) \neq A$ **(5 puntos)**, A es cerrado pues $A = \bar{A}$ **(5 puntos)**. Dado que $A \subseteq B((0, 0, 0), 100)$, se tiene que A es un conjunto acotado; luego, como A es cerrado entonces él es un conjunto compacto. **(5 puntos)**.

2. Calcular, si es posible, los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2 + |y|}$ *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2 + y}$

   Solución:

   a) Para $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene que $\dfrac{y^2}{x^2 + y^2 + |y|} \leq |y|$ **(5 puntos)** y como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ **(5 puntos)**, entonces por Teorema del sandwich, se tiene que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2 + |y|} = 0$. **(5 puntos)**

   b) Si $y = 0$, entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2 + y} = 0$ **(5 puntos)**; en cambio, si $y = -x^2$ entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2 + y} = 1$. **(5 puntos)**

   De lo anterior, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2 + y}$ no existe. **(5 puntos)**

EGG/JRC/CFS/JOF/HPV/egg
23 de Marzo de 2017

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

29/03/2018 JCG/JRC/EGG/JOF/HPV

Pauta Test 1 Cálculo III (521227)

NOMBRE:
MATRÍCULA:
SECCIÓN:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el conjunto $C_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \dfrac{1}{n^2}\right\}$.

   Considerando $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, determine el conjunto de puntos interiores $int(A)$, el conjunto de puntos de acumulación A', el conjunto de puntos de adherencia $\overline{A}$ y el conjunto de puntos frontera $Fr(A)$. **¿Es A un conjunto cerrado?**.

   Solución:

   - $int(A) = \emptyset$
   - $A' = A \bigcup \{(0,0)\}$
   - $\overline{A} = A \bigcup \{(0,0)\}$
   - $Fr(A) = A \bigcup \{(0,0)\}$

   (4 pts) cada una

   ¿Es A un conjunto cerrado?

   Resp1 Por definición un conjunto es cerrado si su complemento es abierto. Luego, si escogemos el punto $(0,0)$ y lo tomamos como centro de una bola abierta, digamos $B((0,0);\varepsilon)$, nos damos cuenta que no existe algún valor para ε tal que dicha bola esté contenida en A^c. Así, A^c no es abierto. Por lo tanto A no es cerrado.

   Resp2 Otra forma de probar que no es cerrado es el hecho de que A no contiene a todos sus puntos de acumulación.($(0,0) \notin A$)

   Resp3 Asimismo se puede probar que A no es cerrado pues no coincide con su adherencia $\overline{A}$.

   (4 pts) cualquiera de las respuestas posibles

2. Calcule, si existen, los siguientes límites. Justifique adecuadamente.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(3y^2)}{2x^2+y^2}$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5\cos(xy^3)}{\sqrt{x^2+y^4}}$

Solución:

a) Si nos acercamos a $(0,0)$ por el camino $B_1 = \{(x,y) : x = 0\}$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\in B_1,(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(3y^2)}{2x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{sen(3y^2)}{y^2} = 3.$$

(8 pts)

Si escogemos otro camino dado por $B_2 = \{(x,y) : y = 0\}$ obtenemos

$$\lim_{(x,y)\in B_2,(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(3y^2)}{2x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$$

(8 pts)

Por lo tanto, el límite no existe.

(4 pts)

b) Tomando el camino dado por $C = \{(x,y) : x = 0\}$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\in C,(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5\cos(xy^3)}{\sqrt{x^2+y^4}} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Luego, el candidato a límite es este valor (0).

(6 pts)

OBS 1: El puntaje anterior se asigna sólo si la respuesta del alumno concluye aquí.

OBS 2: Si el alumno responde lo que a continuación se detalla, también estaría correcto. En este caso el desglose de puntos es como sigue:

Entonces,

$$0 \le \left| \frac{x^5\cos(xy^3)}{\sqrt{x^2+y^4}} - 0 \right| \le \frac{|x|x^4}{|x|} \le x^4 \to 0 \quad \text{cuando } (x,y)\to(0,0)$$

(16 pts)

Así, por el teorema del encaje, el límite es igual a 0.

(4 pts)

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Tiempo de desarrollo: 40 min. **06/10/2015**

Test n^{o}2 - 521227
(Cálculo III)

Problema.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-y} & , \ y \neq x^2 \\ 0 & , \ y = x^2 \end{cases}$$

1. Decida la continuidad de f en $(0,0)$ y en $(1,1)$. (05 ptos c/u)

   Respuesta:

   i) Continuidad de f en $(0,0)$.

   Como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \left(\dfrac{x^2}{x^2-y}\right) = 1$ y $f(0,0) = 0$, entonces f no es continua $(0,0)$.

   ii) Continuidad de f en $(1,1)$.

   Como $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2) = 1$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} x^2 - y = 0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left(\dfrac{x}{x-y^2}\right)$ no existe. Luego f no es continua en $(1,1)$

2. Calcule, si existe, $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)$ en la dirección del vector $\vec{u} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$.

   Respuesta: Como $\|\vec{u}\| = 2$, entonces $\hat{u} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. (02 ptos)

   Asi, si límite existe,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}, t\frac{1}{2}\right) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^2\frac{3}{4}}{t^2\frac{3}{4} - t\frac{1}{2}}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t\frac{3}{4}}{\left(t\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)t} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(08 ptos)

3. Encuentre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en cada punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $y\neq x^2$. (05 pts c/u)

   Respuesta:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-2xy}{(y-x^2)^2}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2}{(y-x^2)^2}$$

4. Calcule, si existen, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. (05 ptos c/u)

   Respuesta: Si límite existe,

   i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}=\infty$. Luego, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no existe en $\mathbb{R}$.

   ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$. Luego, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

5. Decida la diferenciabilidad de f en $(1,1)$. (05 pts)

   Respuesta: Como f no es continua en $(1,1)$, entonces f no es diferenciable en $(1,1)$

6. Pruebe que f es diferenciable en $(1,2)$ y exhiba la buena aproximación afin de f en una vecindad de $(1,2)$.

   Respuesta: Como f es racional en una vecindad de $(1,2)$, entonces es diferenciable en $(1,2)$. (05 pts)

   La buena aproximación afin de f en una vecindad V de $(1,2)$ esta dada por:

$$\begin{aligned} B(x,y) &= f(1,2)+d_{(1,2)}f(x-1,y-2) && \text{((05 pts))}\\ &= f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2) \end{aligned}$$

   en donde: $f(1,2)=-1$, $f_x(1,2)=-4$ y $f_y(1,2)=1$

   Así,

$$\begin{aligned} B(x,y) &= -1-4(x-1)+(y-2) && \text{((05 pts))}\\ &= -4x+y+1 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Test N^o 2 -521227

Nombre : ....
Profesor: ....
Tiempo : 45 minutos
30 puntos cada problema
6/04/2017
JRC

1. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^4}{x^6 + y^8} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

   (a) Estudie la continuidad de f en el punto $(0, 0)$.

   (b) ¿f es diferenciable en el punto $(0, 0)$?.

   (c) ¿f es diferenciable en el punto $(1, 1)$?.

2. Diga si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^3}{x} + 2y & , \quad x \neq 0 \\ y^2 & , \quad x = 0 \end{cases}$ es diferenciable en $(0, 0)$.

Solución.-

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Pauta Test N^o 2 -521227

1. (a) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x^3=y^4}} f(x,y) \overset{(x,y)\neq(0,0)}{\underset{4\text{ pts.}}{=}} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x^3=y^4}} \frac{x^3y^4}{x^6+y^8} \overset{4\text{ pts.}}{=} \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \overset{3\text{ pts.}}{\neq} f(0,0)=0$

   Esto prueba que f no es continua en el punto $(0,0)$. (3 pts.)

   (b) f no es diferenciable en el punto $(0,0)$ ya que f no es continua en ese punto. (6 pts.)

   (c) f es una composición de funciones diferenciables sobre el conjunto abierto $A=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Luego f es diferenciable sobre el conjunto A, en particular f es diferenciable en el punto $(1,1)$. (10 pts.)

2. $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{2\text{ pts.}}{=} \lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \overset{h\neq0}{\underset{2\text{ pts.}}{=}} \lim_{h\to0}\frac{\dfrac{\sinh^3}{h}-0}{h} = \lim_{h\to0} h\frac{\sinh^3}{h^3} = 0\cdot1 \overset{2\text{ pts.}}{=} 0$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{2\text{ pts.}}{=} \lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \overset{x=0}{\underset{2\text{ pts.}}{=}} \lim_{h\to0}\frac{h^2-0}{h} = \lim_{h\to0} h \overset{2\text{ pts.}}{=} 0$$

   $$A(x,y) \overset{3\text{pts.}}{=} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\|(x,y)\|} \overset{3\text{pts.}}{=} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x,x>0}} A(x,y) \overset{3\text{pts.}}{=} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x,x>0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x,x)}{\sqrt{2}x} \overset{x\neq0}{=} \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x^3}{\sqrt{2}x^2}+\sqrt{2}\frac{x}{x}\right) =$$

   $$= \lim_{x\to0}\left(\overbrace{\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{\sin x^3}{x^3}}^{\nearrow 0}+\sqrt{2}\right) \overset{4\text{ pts.}}{=} \sqrt{2} \overset{2\text{ pts.}}{\neq} 0$$

   Esto prueba que f no es diferenciable en $(0,0)$. (3 pts.)

.

31 de Marzo de 2017
JRC

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

12/04/2018. Tiempo: 30 minutos

Nombre: ....

Profesor: ....

Solución Test N° 2.
Cálculo III 521227

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^2 + y|y|$.

1. Analice si f es diferenciable en:

   a) el punto $(0,0)$, b) el punto $(1,0)$

   Solución.-

   a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0} |h| = 0$

   $$A(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 + y|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   $$|A(x,y)| = \frac{|x^2 + y|y||}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\text{D.T.}}{\leq} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

   Por lo tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} A(x,y) = 0$ y f es diferenciable en el punto $(0,0)$.

   (20 puntos)

   b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h}$

   $$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2+h) = 2$$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1,h) - f(1,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0} |h| = 0.$

   $$A(x,y) = \frac{f(x,y) - f(1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\,(x-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\,y}{\|(x,y) - (1,0)\|} =$$

$$= \frac{x^2 + y|y| - 1 - 2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \frac{(x-1)^2 + y|y|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

$$|A(x,y)| = \left| \frac{(x-1)^2 + y|y|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \right| \leq \frac{(x-1)^2 + y^2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \overset{(x,y)\to(1,0)}{\longrightarrow} 0$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} A(x,y) = 0$ y f es diferenciable en el punto $(1,0)$.

(20 puntos)

Alternativa.-

Las derivadas parciales parciales de f se calculan de:

$h(x) = f(x, y_0) = x^2 + y_0|y_0| \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h'(x) = 2x$

$g(y) = f(x_0, y) = x_0 + y|y| = \begin{cases} x_0 + y^2 & \text{si} \quad y \geq 0 \\ x_0 - y^2 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$

para $y > 0$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(y) = 2y$

para $y < 0$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(y) = -2y$

para $y = 0$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = g'(0) = 0$, se calcula por definición (límites laterales)

Lo que determina: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2|y|$.

Se obtiene así que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$, por tanto es diferenciable en todo punto de su dominio.

2. Si existe, determine la ecuación del plano tangente a su gráfica en $(1,0,1)$.

Solución.- Como f es diferenciable en $(1,0)$, la gráfica de f posee plano tangente en $(1,0,1)$, cuya ecuación es

$$\begin{aligned} z &= f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\,y \\ z &= 1 + 2(x-1) \end{aligned}$$

(20 puntos)

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática
GAJ/EBC/EGG/gaj 20-10-2016

Test n°3 Cálculo III(521227

Nombre……………………………………………………………..**Matricula………………………..**

1) Sea $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)sen\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Justificando su respuesta indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) f **es diferenciable en** $(0,0)$ **.Es verdadera** porque

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, ya que para x $x\neq 0,$ e $y\neq 0$ se tiene

$f(x,0)=x^2sen\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$ y $f(x,0)=x^2sen\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$ **:Por lo tanto**

$$\frac{f(x,o)-f(0,0)}{x}\to 0 \text{ cuando } x\to 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}\to 0 \text{ cuando y}\to 0$$

Además

$\left|\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f\bullet(0,0)}{\|(x,y)\|}\right|\leq\|(x,y)\|$ **.Luego**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\bullet(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$$

…………………………………………………………………………………………………12 puntos

b) f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. **Es falsa** basta notar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$,

Porque para $(x,y)\neq(0,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xsen\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ no tiende a 0

cuando $(x,y)\to(0,0)$.

……………………………………………………………………………………………………12 puntos

c) f es diferenciable en todo abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$ tal que $(0,0) \notin A$. **ES verdadera porque f es de clase C^1 en A. ....6 puntos**

d) La buena aproximación afín de f en el punto $(1,2)$, es una función polinómica del tipo $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad T(x,y) = ax + by + c$, donde a,b,c son constantes reales

Es verdadera porque las buenas aproximaciones afines en $\mathbb{R}^2$ de las funciones son siempre funciones polinómicas de grado a lo más uno.

....**6 puntos**

2) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(x,y) = \left(y + e^{xy}, x - e^{xy}\right)$.

a) Comprobar que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y hallar su matriz Jacobiana.

f es diferenciable porque f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$

La matriz jacobiana de f en (x,y) es

$$\left[df(x,y)\right] = \begin{bmatrix} ye^{xy} & 1 + xe^{xy} \\ 1 - ye^{xy} & -xe^{xy} \end{bmatrix}$$

...6 puntos

b) Comprobar que la función compuesta $g = f \circ f$ es diferenciable y calcular su matriz jacobiana en $(0,0)$.

g es diferenciable por ser la compuesta de 2 funciones diferenciables.

Y se tiene.

La Matriz jacobiana de g en $(0,0)$ es:

$$\left[dg(0,0)\right] = \left[d(f \circ f)(0,0)\right] = \left[df(f(0,0)) \circ df(0,0)\right] = \left[df(1,-1)\right]\left[df(0,0)\right]$$

Se obtiene entonces

$$\left[dg(0,0)\right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{e} & 1 + \frac{1}{e} \\ 1 + \frac{1}{e} & -\frac{1}{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{l}{e} & -\frac{1}{e} \\ -\frac{1}{e} & 1 - \frac{1}{e} \end{bmatrix}$$

...18 puntos

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Cálculo III (521227)
Test 3.

`Semestre1-2017`

Nombre:

Sección:

Problema 1. Considerar la función definida por

$$f(x,y) = x^2 + \text{sen }(xy).$$

Determinar todas las direcciones en las que la derivada direccional de f en el punto $(1,0)$ es igual a 0.

Problema 2. Sea $g = g(x,y)$ una función dada, de clase C^2 y armónica en $\mathbb{R}^2$.

Considerar la función definida por

$$h(s,t) = g\left(s\mathrm{e}^t,\, 1 + s\mathrm{e}^{-t}\right).$$

Encontrar

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(1,0).$$

Recordar que el hecho que g sea armónica significa que satisface la igualdad

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

Cada problema vale 30 puntos.

TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN REDACTARSE CONSISTENTEMENTE Y JUSTIFICARSE ADECUADA Y DETALLADAMENTE
Tiempo Máximo: 45 Minutos

Pauta

Solución 1.

Como f es de clase C^1, en cualquier dirección $v=(p,q)$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\nabla f(1,0)\cdot v.$$

(5 pt)

Se tiene, evaluando en cada caso en el punto (1,0), que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y\cos\,(xy)=2,$$

(5pt)

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\cos\,(xy)=1.$$

(5pt)

Luego,

$$\nabla f(1,0)=(2,1).$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial v}=(2,1)\cdot(p,q)=2p+q.$$

(5pt)

Por lo tanto, debe cumplirse

$$2p+q=0 \implies q=-2p \implies v=p(1,-2).$$

Por lo tanto, las direcciones en que la derivada direccional es 0, son

$$v_1=(1/\sqrt{5}\ ,\ -2/\sqrt{5}\ )\ \text{ y }\ v_2=(-1/\sqrt{5}\ ,\ 2/\sqrt{5}\ ).$$

(10pt)

Solución 2. Se tiene:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial g}{\partial x}s\mathrm{e}^{t}-\frac{\partial g}{\partial y}s\mathrm{e}^{-t}=s(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{e}^{t}-\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{e}^{-t}).$$

(10pt)

Y, como las derivadas mixtas son iguales al ser g de clase C^2,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial t}&=\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{e}^{t}-\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{e}^{-t}+s\left((\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{e}^{t}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{t}-(\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}\mathrm{e}^{t}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}\right)\\&=\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{e}^{t}-\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{e}^{-t}+s\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\mathrm{e}^{-2t}\right)\end{aligned}$$

(10pt)

En el punto $(s,t)=(1,0)$, aplicando que g es armónica, se tiene

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial t}=\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}+2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x}(1,2) - \frac{\partial g}{\partial y}(1,2) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,2),$$

pues $(x, y) = (1, 2)$.

(10pt)

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°3
Cálculo III (521227)

1. Hallar la razón de cambio de $f(x,y,z) = xyz$ en una dirección normal a la superficie de ecuación $x^2y + xy^2 + yz^2 = 3$ en el punto $(1,1,1)$.

   Solución: Al considerar $g(x,y,z) = x^2y + xy^2 + yz^2$, se tiene que un vector normal a la superficie en el punto $(1,1,1)$ es
   $$\vec{n} = \nabla g(1,1,1) = (3,4,2). \text{ **(10 puntos)**}$$
   Por otra parte, como f es diferenciable en el punto $(1,1,1)$ **(5 puntos)**, la derivada direccional de f en dicho punto en la dirección de $\vec{n}$ está dada por
   $$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(1,1,1) = \nabla f(1,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(3,4,2) = \frac{9}{\sqrt{29}}. \text{ **(15 puntos)**}$$

2. Las longitudes x, y y z (altura) de una caja rectangular sin tapa varían en el tiempo. Para la superficie total S de la caja:

   a) Utilizar la regla del cadena para expresar la variación $\frac{dS}{dt}$ en términos de las longitudes y de las variaciones $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$.

   b) En un instante t_0 las aristas miden $x = 2$, $y = 3$ y $z = 5$ y además $\frac{dx}{dt}(t_0) = 2$, $\frac{dy}{dt}(t_0) = -3$ y $\frac{dz}{dt}(t_0) = 4$, encontrar la razón de cambio de S en dicho instante.

   Solución:

   a) Como $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$, se tiene que
   $$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial S}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= (y+2z)\frac{dx}{dt} + (x+2z)\frac{dy}{dt} + 2(x+y)\frac{dz}{dt}. \text{ **(15 puntos)**}\end{aligned}$$

   b) $S'(t_0) = 13 \cdot 2 + 12 \cdot -3 + 10 \cdot 4 = 30.$ **(15 puntos)**

JCG/JRC/EGG/JOF/HPV/egg
26 de Abril de 2018

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°4
Cálculo III (521227)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 20x + 20y$. Justificar por qué f posee extremos absolutos sobre el conjunto compacto

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy \leq 12\right\}$$

y luego hallar dichos valores.

Solución:

Dado que f es continua y D es compacto, entonces por el Teorema de los valores extremos, está asegurada la existencia del máximo y mínimo absolutos. **(10 puntos)**

En $int(D)$ no hay puntos críticos. **(10 puntos)**

En $Fr(D)$, utilizando multiplicadores de Lagrange, al considerar $g(x, y) = x^2+y^2+xy-12$, se tiene el sistema determinado por $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$ y $g(x, y) = 0$ **(10 puntos)**, esto es,

$$2x - 4y + 20 = \lambda(2x + y) \quad (1)$$
$$2y - 4x + 20 = \lambda(x + 2y) \quad (2)$$
$$x^2 + xy + y^2 = 12 \quad (3)$$

De (1) y (2), restando, se tiene que $(x - y)(6 - \lambda) = 0$, de donde $y = x$ o $\lambda = 6$.

Si $y = x$, de (3) se tiene que $x = \pm 2$ y se obtienen dos puntos $P_1 = (2, 2) = -P_2$.

Si $\lambda = 6$, de (1) se tiene que $y = 2 - x$; luego, de (3) se tiene que $x = -2$ o $x = 4$ y se obtienen dos puntos más, $P_3 = (-2, 4)$ y $P_4 = (4, -2)$. **(20 puntos)**

Como $f(P_1) = 72$, $f(P_2) = -88$, $f(P_3) = 92$ y $f(P_4) = 92$, se tiene que el mínimo absoluto es -88 y el máximo absoluto es 92. **(10 puntos)**

GAJ/EBC/EGG/egg
3 de Noviembre de 2016

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

EGG/JRC/CFS/JOF/HPV 04 Mayo 2017

Test 4
Cálculo III (521227)

Nombre:

Matrícula: Sección:

1. Calcular, en caso de ser posible, el valor de $\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2}\, dy\, dx$.

Solución.

Notemos primero que f definida por $f(x,y) = e^{-y^2}$ es una función continua sobre el conjunto medible $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2;\ x \leq y \leq 2\}$. Luego, f es integrable en D. - - - (3 puntos)

Ahora, puesto que no es posible calcular directamente la integral $\int e^{-y^2}\, dy$, realizaremos un cambio de orden de integración en la integral doble.

Al cambiar el orden de integración tenemos:

$$\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2}\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^y e^{-y^2}\, dx\, dy - - - (12\ puntos)$$

Luego, como

$$\int_0^y e^{-y^2}\, dx = ye^{-y^2} - - - (7\ puntos)$$

se deduce que

$$\int_0^2 \int_0^y e^{-y^2}\, dx\, dy = \int_0^2 ye^{-y^2}\, dy = \frac{1}{2}(1 - e^{-4})$$

Consecuentemente,

$$\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2}\, dy\, dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-4}) - - - (8\ puntos)$$

2. Encontrar el valor del volumen de la región del primer octante acotada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$.

   Solución.

   Proyectando la región sobre el plano XY tenemos que:

$$D = \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 6;\ 0 \leq y \leq \frac{6-x}{2}\right\}$$

   y luego el volumen pedido es

$$V := \iint_D \left(\frac{6 - x - 2y}{3}\right)\, d(x, y). - - - (15\ puntos)$$

   De este modo,

$$V = \frac{1}{3}\int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} (6 - x - 2y)\ dy\ dx$$

   Ahora, como

$$\int_0^{\frac{6-x}{2}} (6 - x - 2y)\ dy = \frac{(6-x)^2}{2} - \frac{(6-x)^2}{4} = \frac{(6-x)^2}{4} - - - (8\ puntos)$$

   tenemos que

$$V = \frac{1}{3}\int_0^6 \frac{(6-x)^2}{4} = \frac{1}{12}\int_0^6 (6-x)^2\ dx = 6\ unid.^3 - - - (7\ puntos)$$

   * * El volumen de la región pedida puede también ser expresado como: * *

$$V = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} 1\ dz\ dy\ dx = 6\ unid.^3$$

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JCG/JRC/EGG/JOF/HPV 10 de mayo 2018

TEST N°4
Cálculo III (521227)

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + xy^2 + 1$. Justificar la existencia y hallar los extremos absolutos de f sobre el conjunto

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}.$$

Sol.
Como f es función continua en $\mathbb{R}^2$ (f función polinomial) y $\mathcal{K}$ es subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ ($\mathcal{K}$ conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$), por Teorema de valores extremos, f alcanza su valor máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto $\mathcal{K}$. **(10 puntos)**

a) Ptos críticos en $int(\mathcal{K}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 - 2x + y^2 < 3\}$.

Puesto que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2xy$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$, tenemos que el sistema:
$2x + 2xy = 0$
$2xy = 0$
admite como solución todo punto de la forma $(0, y)$. Como $(0, y) \notin int(\mathcal{K})$, f no tiene puntos críticos en $int(\mathcal{K})$. **(10 puntos)**

b) Valores extremos en $Fr(\mathcal{K}) = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ donde:
$F_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 3]\}$
$F_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2]\}$
$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 4, x \in [0, 3]\}$.

Denotemos por g_1 a la función f restringida a F_1. Luego

$$g_1 : [0, 3] \to \mathbb{R},\ g_1(x) = x^2 + 1$$

es continua en $[0, 3]$ y alcanza sus extremos absolutos en $[0, 3]$. Ahora,
$g_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Como $0 \notin (0, 3)$, g_1 no tiene puntos críticos en $(0, 3)$. Así, $g_1(0) = 1$ es mínimo absoluto de g_1 en $[0, 3]$ y $g_1(3) = 10$ es máximo absoluto de g_1 en $[0, 3]$. **(10 puntos)**

Denotemos por g_2 a la función f restringida a F_2. Luego

$$g_2 : [0,2] \to \mathbb{R},\ g_2(y) = 1$$

es continua en $[0,2]$ y alcanza sus extremos absolutos en $[0,2]$. Como $g_2'(y) = 0$ $\forall y \in (0,2)$, todo punto del intervalo $(0,2)$ es punto crítico de g_2 y como $g(y) = 1$ $\forall y \in [0,2]$, todo punto de este intervalo es valor extremo de g_2. **(10 puntos)**

Denotemos por g_3 a la función f restringida a F_3. Puesto que en F_3, $y^2 = 3-x^2+2x$, podemos definir g_3 como sigue:

$$g_3 : [0,3] \to \mathbb{R},\ g_3(x) = 3x^2 + 3x - x^3 + 1.$$

Luego, g_3 es continua en $[0,3]$ y alcanza sus extremos absolutos en $[0,3]$. Ahora, $g_3'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$
Como $1 - \sqrt{2} \notin (0,3)$, g_3 tiene un único punto crítico en $(0,3)$, $x = 1+\sqrt{2}$. Ahora, como $g_3(0) = 1$, $g_3(1+\sqrt{2}) = 6+4\sqrt{2}$ y $g_3(3) = 10$, tenemos que $g_3(0)$ es mínimo absoluto de g_3 en $[0,3]$ y $g_3(1+\sqrt{2})$ es máximo absoluto de g_3 en $[0,3]$. **(10 puntos)**

Considerando lo anterior tenemos que:
$g_1(0) = 1 = g_3(0) \Rightarrow f(0,0) = 1$
$g_1(3) = 10 \Rightarrow f(3,0) = 10$
$g_2(y) = 1 \forall y \in [0,2] \Rightarrow f(0,y) = 1\ \forall y \in [0,2]$
$g_3(1+\sqrt{2}) = 6+4\sqrt{2} \Rightarrow f(1+\sqrt{2},\sqrt{2}) = 6+4\sqrt{2}$ **(8 puntos)**

Así, f alcanza su mínimo absoluto es todo punto del intervalo $[0,2]$ y su máximo absoluto en el punto $(1+\sqrt{2},\sqrt{2})$. **(2 puntos)**

◇◇

Si se hace uso del método multiplicadores de Lagrange, podemos considerar la función

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy^2 + 1 - \lambda h(x,y)$$

para construir el sistema correspondiente.

(a) Para $h(x,y) = y$ tenemos:

$2x + y^2 = 0$
$2xy - \lambda = 0$
$y = 0$
Luego, la única solución del sistema es $(0,0,0)$. **(10 puntos)**

(b) Para $h(x, y) = x$ tenemos:

$2x + y^2 - \lambda = 0$
$2xy = 0$
$x = 0$
Luego, toda solución del sistema es de la forma $(0, y, y^2)$ con $y \in [0, 2]$. **(10 puntos)**

(c) Para $h(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 3$ tenemos:

$2x + y^2 - 2x\lambda + 2\lambda = 0$
$2xy - 2y\lambda = 0$
$x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$
Luego, considerando las condiciones de frontera de $\mathcal{K}$, si $y = 0$ entonces el punto $(3, 0, \frac{3}{2})$ es solución del sistema, y si $\lambda = x$ entonces el punto $(1+\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es también solución del sistema. **(10 puntos)**

Como $f(3, 0) = 10, f(0, y) = 1\ \forall y \in [0, 2]$ y $f(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$, se deduce que f alcanza su mínimo absoluto es todo punto del intervalo $[0, 2]$ y su máximo absoluto en el punto $(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$. **(10 puntos)**

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Tiempo de desarrollo: 40 min. **17/11/2016**

Test n^{o}5- 521227
(Cálculo III)

1. **Problema**.- Sean $S_1 = \left\{(x,y)\ /\ 0 \le x \le 2y - y^2\right\}$, $S_2 = \ \{(x,y)\ /\ 0 \le y \le 2x,\ 0 \le x \le 1\}$, $S_3 = \ \left\{(x,y)\ /\ 0 \le y \le \dfrac{2}{x},\ 1 \le x \le 2\right\}$, y sea f la función definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$, con $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

   (a) Calcule contenido de la intersección $S_1 \cap S_2$ y el contenido de la intersección $S_2 \cap S_3$.

   (b) Justificando adecuadamente sus respuestas, decida la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones:

   1. Si $S = S_1 \cup S_2$, $\displaystyle\int_S f(x,y)\, d(x,y) = \int_{S_1} f(x,y)\, d(x,y) + \int_{S_2} f(x,y)\, d(x,y)$.
   2. Si $S = S_2 \cup S_3$, $\displaystyle\int_S f(x,y)\, d(x,y) = \int_{S_2} f(x,y)\, d(x,y) + \int_{S_3} f(x,y)\, d(x,y)$

   En caso de respuesta afirmativa, calcule $\displaystyle\int_S f(x,y)\, d(x,y)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua, pruebe que:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\, dy\ dx\ + \int_1^3 \int_0^{(3-x)/2} f(x,y)\, dy\ dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\, dx\ dy$$

Respuestas
Problema 1.
1-a-1. Medida de $S_1 \cap S_2 :\ m(S_1 \cap S_2)$.
$S_1 \cap S_2 = \left\{(x,y)\ /\ y/2 \le x \le 2y - y^2,\ 0 \le y \le 3/2\right\}$

$$\begin{aligned} m(S_1 \cap S_2) &= \int_0^{3/2} \int_{y/2}^{2y-y^2} dx\ dy = \int_0^{3/2} \left(\frac{3}{2}y - y^2\right) dy \qquad \textbf{(15 ptos)} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

1-a-2. Medida de $S_2 \cap S_3 :\ m(S_2 \cap S_3)$.
$S_2 \cap S_3 = \{(x,y)\ /\ 0 \le y \le 2,\ x = 1\}$ (segmento de recta en $\mathbb{R}^2$)
Como $S_2 \cap S_3$ es un segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ entonces

$$m(S_2 \cap S_3) = 0 \qquad \textbf{(15 ptos)}$$

NO EVALUAR 1-b

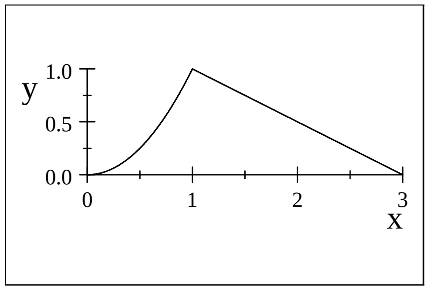
Problema 2. Sea S la región acotada del plano tal que

$$\int_S f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\ dx\ + \int_1^3 \int_0^{(3-x)/2} f(x,y)\,dy\ dx \qquad (1)$$

Es claro que la región de integración S es

$$S = \{(x,y)\ /\ 0 \le y \le x^2,\ 0 \le x \le 1\} \cup \{(x,y)\ /\ 0 \le y \le (3-x)/2,\ 1 \le x \le 3 \qquad (\mathbf{10\ ptos})$$

Esto es, S es la región del plano limitada por la parábola $C: y = x^2$,la recta $L: y = (3-x)/2$ y el eje OX



Así, S tambien puede describirse mediante

$$S = \{(x,y)\ /\ \sqrt{y} \le x \le 3-2y,\ 0 \le y \le 1\} \qquad (10\text{ ptos})$$

entonces,

$$\int_S f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx\ dy$$

Luego, de (1) y (2)

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\ dx\ + \int_1^3 \int_0^{(3-x)/2} f(x,y)\,dy\ dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx\ dy \qquad (10\text{ ptos})$$

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

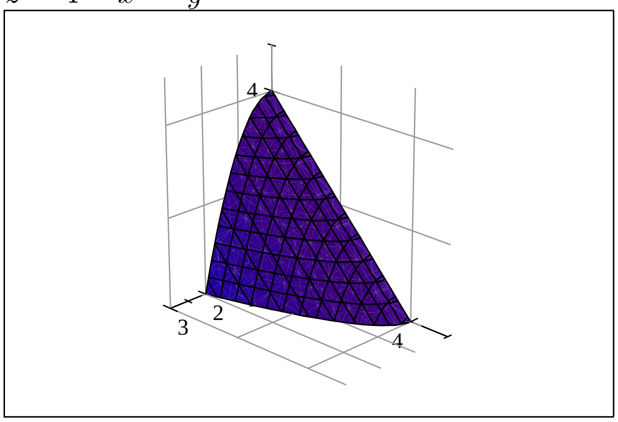
18/05/2017.

Test N° 5.
Cálculo III 521227

Sea D la región del primer octante limitada por la superficie: $z = 4 - x^2 - y$

1. Representa gráficamente la región D.

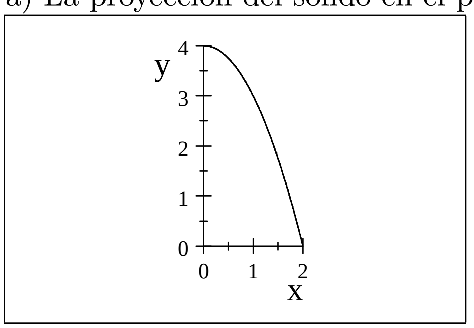
   $z = 4 - x^2 - y$



(12 puntos)

2. Escriba las integrales iteradas que permiten calcular el volumen del sólido, considerando los órdenes: a) $dzdydx$ y b) $dxdzdy$

   a) La proyección del sólido en el plano xy es $y = 4 - x^2$



que se describe: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4 - x^2$.

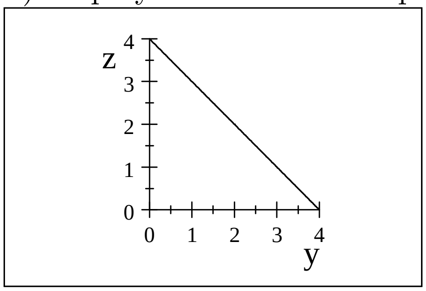
Por tanto, el sólido D se describe

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2 \\ 0 &\leq y \leq 4 - x^2 \\ 0 &\leq z \leq 4 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

y su volumen está dado por

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{4-x^2-y^2} dzdydx \qquad \text{(16 puntos)}$$

b) La proyección de D en el plano yz es



que se describe $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 4 - y$

Por lo tanto, el sólido se describe

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 4 \\ 0 &\leq z \leq 4 - y \\ 0 &\leq x \leq \sqrt{4 - y - z} \end{aligned}$$

y su volumen está dado por

$$\int_0^4 \int_0^{4-y} \int_0^{\sqrt{4-y-z}} dxdzdy \qquad \text{(16 puntos)}$$

3. Calcule el volumen de D

$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{4-x^2-y} dzdydx =$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \left(4 - x^2 - y\right) dydx = \int_0^2 \frac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)^2 dx = \frac{128}{15} \qquad \text{(16 puntos)}$$

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

JCG/JRC/EGG/JOF/HPV. 24/05/2018.

Solución Test N° 5.
Cálculo III 521227

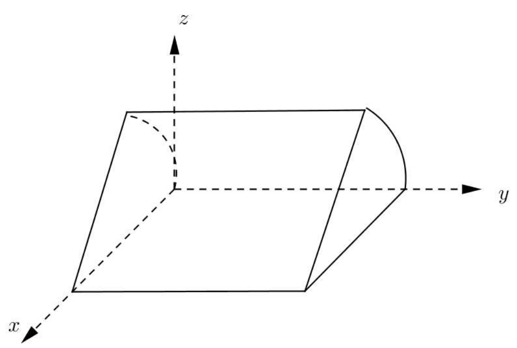
Sea D la región del primer octante limitada inferiormente por el plano $z = 0$, superiormente por la superficie $z = \sqrt{x}$ y el plano $x + z = 2$, y lateralmente por los planos $y = 0$ e $y = 3$.

1. Representa gráficamente la región D.

2. Mediante integral doble o triple, calcule el volumen de D.

Solución.-

1.



(20 puntos)

2. La proyección en el plano xz es $A : 0 \leq z \leq 1 \quad \wedge \quad z^2 \leq x \leq 2 - z$

   Por lo tanto la región se describe por

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq 1 \\ z^2 &\leq x \leq 2 - z \\ 0 &\leq y \leq 3 \end{aligned}$$

   El volumen de D se puede calcular a partir de la integral triple

$$V(D) = \int\int\int_D 1 d(x, y, z)$$

o bien de la integral doble

$$V(D) = \int\int_A 3d(x,z)$$

Para el primer caso la integral triple se calcula a través de las integrales iteradas:

$$\int_0^1 \int_{z^2}^{2-z} \int_0^3 dydxdz \qquad \text{(20 puntos)}$$

lo que determina el valor:

$$V(D) = \int_0^1 \int_{z^2}^{2-z} \int_0^3 dydxdz = \frac{7}{2} \qquad \text{(20 puntos)}$$

Obs.- Se debe considerar otro posible orden de integración, tal como

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} dzdxdy + \int_0^3 \int_1^2 \int_0^{2-x} dzdxdy$$

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática
GAJ/EBC/EGG/gaj 01-12-2016

Test N°6 (Cálculo III)

Nombre: ____ Matrícula: ______________

Problema 1: Calcular el volumen del cuerpo K del espacio que se encuentra dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=100$ y dentro del cono $x^2+y^2=z^2, z\geq 0$.

Problema 2: Calcular, mediante el cambio de variables dado por $x=a\sqrt{u}$, $y=b\sqrt{v}$, $z=c\sqrt{w}$ la integral $I=\int_D xyzd(x,y,z)$, con $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\right\}$.

Desarrollo:

Problema 1

$Vol(K)=\int_K 1d(x,y,z)$ ....**5 puntos**

Pasando a coordenadas esféricas

Se tiene $Vol(K)=\int_{K^*}\rho^2 sen(\varphi)d(\rho,\theta,\varphi)$

donde $K^*=\left\{(\rho,\theta,\varphi):0\leq\rho\leq 10, 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}\right\}$ ....**15 puntos**

Luego $Vol(K)=\int_0^{10}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\rho^2 sen(\varphi)\right)d\varphi\right)d\theta\right)d\vartheta$ ....**5 puntos**

Por lo tanto $\boxed{Vol(K)=\frac{1000\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)}$ ....**5 puntos**

$\boxed{\text{30 puntos}}$

Problema 2

La función $g:D^*\to\mathbb{R}^2$ **definida por** $g(u,v,w)=(x,y,z)$, **donde** $x=a\sqrt{u}, y=b\sqrt{v}, z=c\sqrt{w}$, **de dominio** $D^*=\left\{(u,v,w):u+v+w\leq 1, u\geq 0, v\geq 0, w\geq 0\right\}$ **es**

de clase C^1 **sobre el interior** A^* **de** $D*$**, inyectiva, con Jacobiano** $\dfrac{abc}{8\sqrt{uvw}}$ **distinto de cero en en** $A^* = \{(u,v,w): u+v+w<1, u>0, v>0, w>0\}$ **y** $g(D^*) = D$ **................................15 puntos**

Luego por el teorema del cambio de variables aplicado al subconjunto $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} < 1, x>0, y>0, z>0\right\}$ **de** D **y a la función continua** f **dada por** $f(x,y,x) = xyz$ **que es integrable sobre** D **y sobre A y además** $\int\limits_D f(x,y,z)d(x,y,z) = \int\limits_A f(x,y,z)d(x,y,z)$**.**

Se tiene

$$I = \int\limits_{A^*} (abc)\sqrt{uvw}\,\frac{abc}{8\sqrt{uvw}} d(uvw) = \int\limits_{D^*} \frac{(abc)^2}{8} d(uvw) = \frac{(abc)^2}{8} (\int\limits_{D^*} 1d(u,v,w))$$ **......15 puntos**

$\boxed{I = \dfrac{(abc)^2}{48}}$ **..15 puntos**

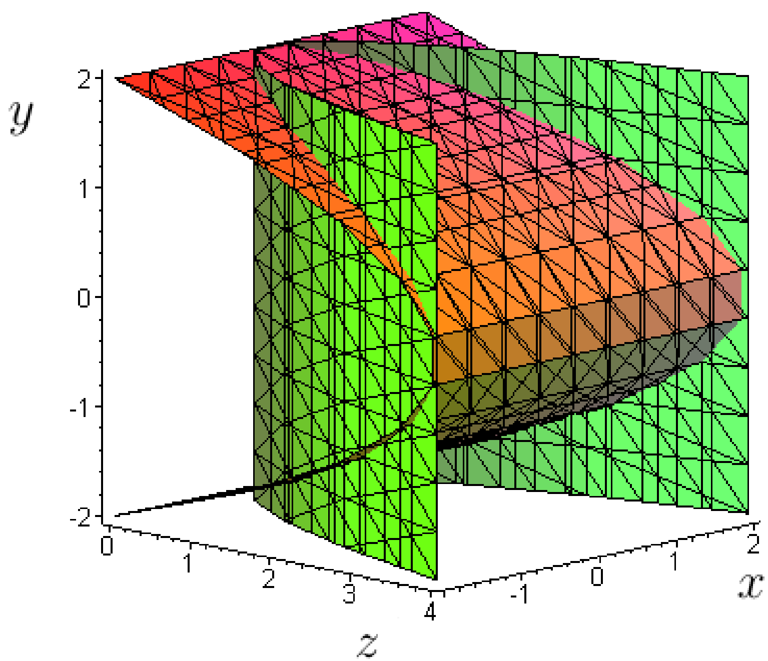
$\boxed{\text{30 puntos}}$

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°6
Cálculo III (521227)

1. Utilizar coordenadas cilíndricas para calcular el volumen del sólido acotado por los cilindros parabólicos de ecuaciones $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

   Solución: La proyección del sólido en el plano xy corresponde al disco $x^2 + y^2 \leq 4$ y al usar coordenadas cilíndricas se tiene que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 2$. **(10 puntos)**



   Como la cota inferior para el sólido está dada por $z = x^2$ y la superior por $z = 4-y^2$, el volumen es

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2 \cos^2\theta}^{4 - r^2 \sin^2\theta} r \, dz \, dr \, d\theta \quad \textbf{(10 puntos)} \\
&= 8\pi. \quad \textbf{(10 puntos)}
\end{aligned}
$$

2. Calcular la integral de línea

$$\int_C 3xy\,dx + x^2dy,$$

donde C es la curva frontera del conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 2x - 1\}$ recorrida una vez en sentido antihorario.

Solución 1: Al considerar como C_1 el segmento orientado desde $(1, 1)$ hasta $(3, 1)$, él puede parametrizarse por $C_1(t) = (2t + 1, 1)$, donde $0 \leq t \leq 1$ y por lo tanto

$$\int_{C_1} 3xy\,dx + x^2dy = \int_0^1 6(2t + 1)\,dt = 12. \text{ **(8 puntos)**}$$

Al considerar como C_2 el segmento desde $(3, 1)$ hasta $(3, 5)$, él puede parametrizarse por $C_2(t) = (3, 4t + 1)$, donde $0 \leq t \leq 1$ y por lo tanto

$$\int_{C_2} 3xy\,dx + x^2dy = \int_0^1 36\,dt = 36. \text{ **(8 puntos)**}$$

Al considerar como C_3 el segmento desde $(3, 5)$ hasta $(1, 1)$, él puede parametrizarse por $C_3(t) = (3 - 2t, 5 - 4t)$, donde $0 \leq t \leq 1$ y por lo tanto

$$\int_{C_3} 3xy\,dx + x^2dy = \int_0^1 \left(-6(3 - 2t)(5 - 4t) - 4(3 - 2t)^2\right) dt = -\frac{172}{3}. \text{ **(8 puntos)**}$$

De lo anterior, como $C = C_1 + C_2 + C_3$, se tiene que

$$\int_C 3xy\,dx + x^2dy = 12 + 36 - \frac{172}{3} = -\frac{28}{3}. \text{ **(6 puntos)**}$$

Solución 2: Al considerar el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por

$$F(x, y) = (p(x, y), q(x, y)) = \left(3xy, x^2\right),$$

se tiene que él es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ y en particular, es de clase C^1 sobre un abierto que contiene a D. Por Teorema de Green, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_C 3xy\,dx + x^2dy &= \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x, y)\right) d(x, y) \text{ **(10 puntos)**} \\
&= \int_1^3 \int_1^{2x-1} -x\,dy\,dx \text{ **(10 puntos)**} \\
&= -\frac{28}{3}. \text{ **(10 puntos)**}
\end{aligned}$$

EGG/JAG/CFS/JOF/HPV/egg
8 de Junio de 2017

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

07/06/2018 JCG/JRC/EGG/JOF/HPV

Pauta Test 6 Cálculo III (521227)

NOMBRE:
MATRÍCULA:
SECCIÓN:

Sea la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$, donde

$$\Omega = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z^2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0\} \text{ e } I = \int\int\int_\Omega f(x, y, z)d(x, y, z)$$

(a) Exprese I como integral iterada, usando coordenadas cartesianas (sin realizar los cálculos)

(b) Calcule la integral anterior utilizando un adecuado cambio de variable

Solución:

(a) Notar que de $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ y $x^2+y^2 \leq z^2$ tenemos que $x^2+y^2 \leq 2$ que corresponde a la proyección sobre el plano XY.

Es decir,

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\} \subset XY$$

(7 pts)

Equivalentemente,

$$D = \{(x, y) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, -\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\}$$

(7 pts)

Por otra parte, de estas mismas expresiones y considerando que $z \geq 0$, obtenemos $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

(7 pts)

Luego, la región Ω se puede describir como

$$\Omega = \{(x,y,z) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \ -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}, \ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$$

De este modo la integral triple puede adoptar la forma siguiente:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dzdydx$$

(4 pts)

(b) Consideramos el cambio a coordenadas esféricas dado por

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = \rho\cos(\phi) \end{cases}$$

Reemplazando en $0 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$ obtenemos $0 \leq \rho \leq 2$.

De $x^2+y^2 \leq z^2$ se obtiene $\rho^2\sin^2(\phi) \leq \rho^2\cos^2(\phi)$ que equivale a $0 \leq \tan(\phi) \leq 1$ y así $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$.

Por otra parte, de $x^2+y^2 \leq 2$ obtenemos $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Luego, la representación de Ω en coordenadas esféricas es

$$\Omega^* = \left\{(\rho,\theta,\phi) : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

(15 pts)

Luego,

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{\rho\cos(\phi)}{\rho^2} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| d\rho d\theta d\phi$$

donde $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = -\rho^2\sin(\phi)$

(10 pts)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} \frac{\rho\cos(\phi)}{\rho^2}\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} \frac{\rho\cos(\phi)}{\rho^2}\rho^2\sin(\phi) d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} \rho\cos(\phi)\sin(\phi) d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi/4}\cos(\phi)\sin(\phi)d\phi\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{2} \rho d\rho \\
&= \frac{1}{2}\sin^2(\phi)|_0^{\pi/4}\cdot 2\pi\cdot\frac{\rho^2}{2}|_0^2 = \pi
\end{aligned}
$$

(10 pts)

OBS: Si se considera el cambio a coordenadas cilíndricas la integral queda expresada por

$$
I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} \frac{z}{r^2+z^2}\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dzdrd\theta
$$

donde $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°7
Cálculo III (521227)

1. Considerar $F(x,y,z) = (3x^2y^2 + 6xz)\hat{\imath} + (2x^3y + 2z^2)\hat{\jmath} + (3x^2 + 4yz)\hat{k}$.

   a) Indicar justificadamente, si el campo vectorial F es conservativo.

   b) Sea C la curva que se encuentra en el primer octante como intersección entre los cilindros $x^2 + z^2 = 4$ e $y^2 + z^2 = 4$. Indicando una orientación para C, calcular el trabajo $W = \int_C F \cdot dr$.

   Solución:

   a) El campo F es conservativo pues $\nabla \times F = (0,0,0)$. **(10 puntos)**

   b) Al considerar $f(x,y,z) = x^3y^2 + 3x^2z + 2yz^2$, como $\nabla f = F$; se tiene que f es un potencial para F. Considerando como punto inicial de C a $P_i = (0,0,2)$ y como punto final a $P_f = (2,2,0)$, se tiene

   $$W = \int_C F \cdot dr = f(P_f) - f(P_i) = 32. \ \textbf{(25 puntos)}$$

   Observación: En la parte *a*) también se puede exhibir un potencial para mostrar que F es conservativo.

2. Calcular la integral de línea $\oint_\Gamma (e^x + 3x^2y^2)\,dx + (4x + 2x^3y)\,dy$, donde Γ es la curva simple y cerrada cuya traza es el cuadrilátero de vértices $A(1,1)$, $B(3,0)$, $C(2,2)$ y $D(0,3)$ recorrida en sentido antihorario.

   Solución: Al considerar $p(x,y) = e^x + 3x^2y^2$, $q(x,y) = 4x + 2x^3y$ y la región encerrada por Γ como R, aplicando el Teorema de Green **(10 puntos)**, se tiene que

   $$\oint_\Gamma p\,dx + q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right) d(x,y) = 4\,\text{Área}(R) = 12. \ \textbf{(15 puntos)}$$

GAJ/EBC/EGG/egg
15 de Diciembre de 2016

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Cálculo III (521227)
Test 7.

`Semestre1-2017`

Nombre:

Sección:

Problema. Sea $\mathcal{S}$ la parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que está limitada por el plano $z = 0$ y por el paraboloide $z = x^2 + (y - 1)^2$.

Parte I. Determinar el área de $\mathcal{S}$.

Parte II. Determinar el valor de

$$\iint_{\mathcal{S}} F \cdot \mathrm{dS},$$

donde F es el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x \ , \ y + 1 \ , \ z + 2),$$

y la orientación de $\mathcal{S}$ es la que considera como vector normal al que apunta hacia el exterior de la región encerrada por el cilindro.

Cada parte vale 30 puntos.

TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN REDACTARSE CONSISTENTEMENTE Y JUSTIFICARSE ADECUADA Y DETALLADAMENTE
Tiempo Máximo: 45 Minutos

Pauta

Parte I.

Una parametrización de $\mathcal{S}$ es

$$\beta(\theta, z) = (\cos\theta\ ,\ \text{sen}\ \theta\ ,\ z),\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,\quad 0 \leq z \leq 2 - 2\text{sen}\ \theta.$$

(10pt)

La medida del área de la superficie está dada por

$$A = \iint_{\mathcal{S}} \text{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2-2\,sen\theta} \left|\left|\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \times \frac{\partial \beta}{\partial z}\right|\right| \text{ dz d}\theta.$$

(10pt)

Calculamos

$$\frac{\partial \beta}{\partial \theta} = (-\text{sen}\ \theta\ ,\ \cos\theta\ ,\ 0)\quad ,\quad \frac{\partial \beta}{\partial z} = (0, 0, 1),$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \times \frac{\partial \beta}{\partial z} = (\cos\theta\ ,\ \text{sen}\ \theta\ ,\ 0).$$

Luego,

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{2-2\,sen\theta} \text{dz d}\theta = \int_0^{2\pi} (2 - 2\text{sen}\theta)\, d\theta = 4\pi.$$

(10pt)

Parte II. Se aplica la definición de integral de superficie de un campo vectorial. Una parametrización de $\mathcal{S}$ es

$$\beta(\theta, z) = (\cos\theta\ ,\ \text{sen}\ \theta\ ,\ z),\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,\quad 0 \leq z \leq 2 - 2\text{sen}\ \theta.$$

(10pt)

El vector normal asociado es

$$\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \times \frac{\partial \beta}{\partial z} = (\cos\theta\ ,\ \text{sen}\ \theta\ ,\ 0).$$

el cual apunta en la dirección positiva dada.

(10pt)

Por lo tanto, tenemos que

$$\iint_{\mathcal{S}} F \cdot \text{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2-2\,sen\theta} (\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta + \text{sen}\theta + 0) \text{ dz d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 - 2\text{sen}^2\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta = 2\pi.$$

(10pt)

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°7
Cálculo III (521227)

1. Para $F(x,y) = (4x+2y, 5x+y)$, calcular $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, donde C es la unión del segmento de recta que va desde $(2,0)$ a $(1,1)$ y el arco de parábola de ecuación $y = x^2$ que va desde $(1,1)$ a $(2,4)$.

   Solución:

   Una parametrización del segmento que va desde $(0,2)$ hasta $(1,1)$ está dada por $C_1(t) = (2-t, t)$, donde $t \in [0,1]$ y por lo tanto

   $$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^1 (2-2t)\ dt = 1. \ \textbf{(10 puntos)}$$

   Una parametrización del arco de parábola que va desde $(1,1)$ hasta $(2,4)$ está dada por $C_2(t) = (t, t^2)$, donde $t \in [1,2]$ y por lo tanto

   $$\int_{C_2} F \cdot dr = \int_1^2 \left(2t^3 + 12t^2 + 4t\right)\ dt = \frac{83}{2}. \ \textbf{(10 puntos)}$$

   De lo anterior, $\displaystyle\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr = \frac{85}{2}.$ **(10 puntos)**

2. Aplicando el Teorema de Green, calcular la integral de línea

$$\oint_C (2xy + 3\sinh(x))\, dx + (3x^2 - 8y)\, dy$$

si $C = Fr(D)$ y D es la región acotada por el eje y, $y = g(x)$ e $y = g(x) + \cos(x)$, donde $g : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ es una función positiva y de clase C^1.

Solución:

Al considerar el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por

$$F(x, y) = (p(x, y), q(x, y)) = \left(2xy + 3\sinh(x), 3x^2 - 8y\right),$$

se tiene que él es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ y en particular, es de clase C^1 sobre un abierto que contiene a D. Por Teorema de Green, se tiene

$$\begin{aligned}
\oint_C p\, dx + q\, dy &= \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x, y)\right) d(x, y) \ \textbf{(10 puntos)} \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_{g(x)}^{g(x)+\cos(x)} 4x\, dy\, dx \ \textbf{(10 puntos)} \\
&= 2(\pi - 2). \ \textbf{(10 puntos)}
\end{aligned}$$

JCG/JRC/EGG/JOF/HPV/egg
21 de Junio de 2018

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación 1
Cálculo III (2025)

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+|y|} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) ¿Es f continua en el origen?

   b) Justificar la diferenciabilidad de f en $(2,-4)$ y luego determinar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(2,-4,3)$.

   c) Determinar el valor mínimo, si existe, de la derivada direccional de f en el punto $(2,-4)$.

Solución:

a) Como para $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leq |x| + |y|$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x| + |y|) = 0$, por Teorema del sandwich se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ y por lo tanto f es continua en $(0,0)$ ya que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. **(4 puntos)**

b) En una vecindad abierta de V de $(2,-4)$, se tiene $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^2}{x^2-y}$, de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 - 3x^2y - 2xy^2}{(x^2-y)^2} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 + 2x^2y - y^2}{(x^2-y)^2}.$$

Como las derivadas parciales de f son funciones continuas (cuocientes de polinomios con denominador no nulo) en V entonces f es de clase C^1 en V y por tanto ella es diferenciable en $(2,-4)$. **(4 puntos)**. Dado que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-4) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-4) = -\dfrac{5}{8}$, la ecuación pedida es

$$z = f(2,-4) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,-4)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-4)(y+4)$$

y el plano está determinado entonces por $5y + 8z = 4$. **(4 puntos)**

c) De la parte anterior como f es diferenciable en $(2,-4)$, la derivada direccional de f en el punto $(2,-4)$ existe en cualquier dirección $\vec{v}$, su valor es

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(2,-4) = \nabla f(2,-4) \cdot \hat{v} \text{ } \textbf{(2 puntos)}$$

y en este caso el valor mínimo, se alcanza en la dirección de $-\nabla f(2,-4)$. Dicho valor mínimo es $-\|\nabla f(2,-4)\| = -\dfrac{5}{8}$. **(4 puntos)**

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^8)}{x^2 + y^8} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de Schwarz, mostrar que f no es de clase C^2 en una vecindad del origen.

Solución: Si f fuese de clase C^2 en una vecindad V del origen, entonces por el Teorema de Schwarz, para cada $(x,y) \in V$, se tendría que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Dado que para cada $y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = -y,$$

entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = -1.$ **(4 puntos)**

De manera análoga, dado que para cada $y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = x$$

y entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1.$ **(4 puntos)**

De lo anterior, como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, se tiene que f no es de clase C^2 en una vecindad del origen. **(4 puntos)**

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ y sea $w(x,y,z) = y^3 f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$. Decidir, de manera justificada, si se satisface la relación

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 3w.$$

Solución: De la regla de la cadena, como f es diferenciable, al considerar $u = \frac{x}{y}$ y $v = \frac{z}{y}$ se tiene que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y^3\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = y^2\frac{\partial f}{\partial u} \textbf{ (2 puntos)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = y^3\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = y^2\frac{\partial f}{\partial v}. \textbf{ (2 puntos)}$$

Por otra parte, de la regla del producto y nuevamente la regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2 f(u,v) + y^3\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 3y^2 f(u,v) - xy\frac{\partial f}{\partial u} - yz\frac{\partial f}{\partial v}. \textbf{ (4 puntos)}$$

De lo anterior,

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} &= xy^2\frac{\partial f}{\partial u} + 3y^3 f(u,v) - xy^2\frac{\partial f}{\partial u} - y^2 z\frac{\partial f}{\partial v} + y^2 z\frac{\partial f}{\partial v} \\
&= 3y^3 f(u,v) \\
&= 3w
\end{aligned}$$

y por lo tanto, la relación indicada sí se satisface. **(4 puntos)**

4. Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2+2y^2-2x-4y$ y el conjunto

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\leq 5,\, x\geq 0,\, y\geq 0\right\}.$$

a) Justificar adecuadamente el hecho de que f posee extremos absolutos sobre D.

b) Utilizando el criterio de la matriz hessiana, determinar la naturaleza del único punto crítico de f en el interior de D.

c) Determinar los valores extremos absolutos de f sobre D.

Solución:

a) Dado que f es continua y D es compacto, entonces por el Teorema de los valores extremos, f posee extremos absolutos sobre D. **(4 puntos)**

b) El único punto crítico de f en el interior de D es $P_1=(1,1)$. Dado que $H(f(P_1))=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, se tiene que $\triangle_1>0$ y $\triangle_2>0$, por lo tanto P_1 es un punto de mínimo relativo. **(4 puntos)**

c) De la parte anterior, el punto $P_1=(1,1)$ es candidato a extremo absoluto para f en D.

Para el lado horizontal del triángulo, con $x\in\,]0,5[$, $f(x,0)=x^2-2x$ tiene como único punto crítico a $x=1$, por lo que se considera el punto $P_2=(1,0)$.

Para el lado oblicuo del triángulo, con $x\in\,]0,5[$, $f(x,5-x)=3x^2-18x+30$ tiene como único punto crítico a $x=3$, por lo que se considera el punto $P_3=(3,2)$.

Para el lado vertical del triángulo, con $y\in\,]0,5[$, $f(0,y)=2y^2-4y$ tiene como único punto crítico a $y=1$, por lo que se considera el punto $P_4=(0,1)$.

Dado que los extremos absolutos podrían alcanzarse en los vértices del triángulo, entonces también se consideran los puntos $P_5=(0,0)$, $P_6=(5,0)$ y $P_7=(0,5)$. **(7 puntos)**

Evaluando en f, se tiene que $f(P_1)=-3$, $f(P_2)=-1$, $f(P_3)=3$, $f(P_4)=-2$, $f(P_5)=0$, $f(P_6)=15$ y $f(P_7)=30$, por lo tanto el mínimo absoluto es -3 y el máximo absoluto es 30. **(3 puntos)**

14 de Enero de 2019
EGG/egg

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°1
Cálculo III (521227)

1. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{|x|^5 + y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Determinar:

   a) Si f es continua en el origen.

   b) Si f es diferenciable en el origen.

   c) El valor mínimo, si existe, de la derivada direccional de f en el punto $(-1,2)$.

   Solución:

   a) Como para $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene que $|f(x,y)| \leq |x|$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, por Teorema del sandwich se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ y por lo tanto f es continua en $(0,0)$, pues $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. **(5 puntos)**

   b) Como $f(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, se tiene que f es diferenciable en el origen si y sólo si

   $$L := \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

   Si $y = x > 0$, se tiene que $L = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ y por lo tanto f no es diferenciable en el origen. **(5 puntos)**

   c) En una vecindad V de $(-1,2)$, se tiene que $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{y^2 - x^5}$ por lo que

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^5y^2 + y^4}{(y^2 - x^5)^2} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x^6y}{(y^2 - x^5)^2};$$

   como estas derivadas parciales corresponden a funciones continuas (cuocientes de polinomios con denominador no nulo) en V entonces f es una función de clase C^1 en V y por lo tanto, f es diferenciable en $(-1,2)$.

   De lo anterior, el valor mínimo pedido se da en la dirección de $-\nabla f(-1,2)$ y él está dado por $-\|\nabla f(-1,2)\| = -\dfrac{4}{25}$. **(5 puntos)**

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ una función diferenciable, al introducir las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) definidas por $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y $z = z$ se obtiene $g(r, \theta, z) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$. Hallar una expresión en coordenadas cartesianas (en términos de los vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$) para

$$\frac{\partial g}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{k},$$

donde $\hat{u}_r = \cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}$ y $\hat{u}_\theta = -\sin(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath}$.

Solución:

De la regla de la cadena,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \text{ y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial z}; \textbf{ (5 puntos)}$$

de donde,

$$\frac{\partial g}{\partial r}\hat{u}_r = \left(\cos^2(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}, \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin^2(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}, 0\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\hat{u}_\theta = \left(\sin^2(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}, -\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \cos^2(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}, 0\right) \text{ y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}\hat{k} = \left(0, 0, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \textbf{ (5 puntos)}$$

De las últimas tres igualdades, sumando

$$\frac{\partial g}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f. \textbf{ (5 puntos)}$$

3. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(x,y) = (u,v)$ siendo $u = -3x + y^3$ y $v = -3y + x^2$.

   a) Mostrar que F admite una inversa local, $G : V \to U$, $(u,v) \mapsto (x,y)$ de clase C^1, donde U y V son vecindades de $(x_0, y_0) = (1,0)$ y $(u_0, v_0) = (-3,1) = F(1,0)$.

   b) Si $G = (g_1, g_2)$, encontrar la aproximación afín de la primera componente g_1 en el punto $(-3,1)$.

Solución:

a) Como las funciones u y v (polinomiales) son de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$, en particular lo son en U y por lo tanto F es de clase C^1 en U; además, como

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,0) = \begin{vmatrix} -3 & 3y^2 \\ 2x & -3 \end{vmatrix}_{(1,0)} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

entonces por el Teorema de la función inversa, se tiene que existe $G : V \to U$ de clase C^1 en V. **(5 puntos)**

b) Del Teorema de la función inversa, se tiene que

$$\left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u,v)}(-3,1) \right) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ -2/9 & -1/3 \end{pmatrix} \textbf{ (5 puntos)}$$

Como $G = (g_1, g_2)$ es de clase C^1 en V, entonces, su primera componente g_1, es diferenciable en el punto $(-3,1)$ y la aproximación pedida está dada por

$$\begin{aligned} A(u,v) &= g_1(-3,1) + \nabla g_1(-3,1) \cdot (u+3, v-1) \\ &= 1 + (-1/3, 0) \cdot (u+3, v-1) \\ &= -\frac{u}{3} \textbf{ (5 puntos)} \end{aligned}$$

4. Hallar todos los puntos críticos para $f(x,y,z) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y} - z^2$ e identificarlos según su naturaleza. Además, determinar si f posee mínimo absoluto.

Solución:

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 8xe^y - 8x^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4x^2e^y - 4e^4y$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2z$, se tiene que los puntos críticos de f son tales que

$$\begin{aligned} x(e^y - x^2) &= 0 \\ x^2 - e^{3y} &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones se tiene que $e^y = x^2$ y $x^2 = e^{3y}$, de donde $x = \pm 1$ e $y = 0$; de la tercera ecuación, se tiene que $z = 0$. Hay dos puntos críticos, ellos son $P_1 = (-1,0,0)$ y $P_2 = (1,0,0)$. **(5 puntos)**

Como

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8e^y - 24x^2 & 8xe^y & 0 \\ 8xe^y & 4x^2e^y - 16e^{4y} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

para los dos puntos P_1 y P_2, se tiene que $\triangle_1 < 0$, $\triangle_2 > 0$ y $\triangle_3 < 0$. Luego, del criterio de la matriz hessiana, P_1 y P_2 son puntos de máximo relativo. **(5 puntos)**

Además, como $\lim\limits_{z\to+\infty} f(0,0,z) = -\infty$, f no posee mínimo absoluto. **(5 puntos)**

Otra justificación de lo anterior es que como todos los puntos críticos son máximos relativos y dado que el dominio de f (que es $\mathbb{R}^3$) es abierto, si hubiese un punto de mínimo absoluto él debería ser también de mínimo relativo.

24 de Octubre de 2016
GAJ/EBC/EGG/egg

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°1
Cálculo III (521227)

1. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^3}{|x|+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) ¿Es f continua en el origen?

   b) ¿Es f diferenciable en el origen?

   c) Justificar la diferenciabilidad de f en $(-4,2)$ y luego determinar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(-4,2,3)$.

Solución:

a) Como para $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leq |x| + |y|$ y $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = 0$, por Teorema del sandwich se tiene que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ y por lo tanto f es continua en $(0,0)$ ya que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. **(6 puntos)**

b) Como $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$ no existe, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no está definida y por lo tanto f no es diferenciable en el origen. **(6 puntos)**

c) En una vecindad abierta de V de $(-4,2)$, se tiene $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{y^2-x}$, de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2+2xy^2+y^3}{(y^2-x)^2} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x^2y-3xy^2+y^4}{(y^2-x)^2}.$$

Como las derivadas parciales de f corresponden a funciones continuas (cuocientes de polinomios con denominador no nulo) en V entonces f es de clase C^1 en V y por tanto ella es diferenciable en $(-4,2)$. **(4 puntos)**

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-4,2) = -\dfrac{5}{8}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-4,2) = 0$, la ecuación pedida es

$$z = f(-4,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(-4,2)(x+4) + \frac{\partial f}{\partial y}(-4,2)(y-2)$$

y el plano está determinado por $5x + 8z = 4$. **(4 puntos)**

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que para $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(tx, ty) = t^5 f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Considerar el cambio de variables $u = tx$ y $v = ty$ para:

a) Mostrar que f satisface la relación $5f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot (x, y)$.

b) Decidir si es válida la igualdad

$$20t^3 f(x, y) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v).$$

Solución:

a) Al derivar con respecto a t a ambos lados de la relación indicada se tiene

$$5t^4 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}x + \frac{\partial f}{\partial v}y = \nabla f(tx, ty) \cdot (x, y),$$

de donde, al evaluar en $t = 1$ se obtiene que

$$5f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot (x, y).$$ **(10 puntos)**

b) Dado que

$$5t^4 f(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v},$$

derivando nuevamente con respecto a t, se tiene que

$$20t^3 f(x, y) = x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial t} + y\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial t},$$

y como f es de clase C^2, entonces

$$20t^3 f(x, y) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v)$$

por lo que la igualdad indicada sí es válida. **(10 puntos)**

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 2y$. Justificar por qué f posee extremos absolutos sobre el conjunto compacto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 12\right\}$$

y luego hallar dichos valores.

Solución: Como f es continua y D es compacto, el Teorema de los valores extremos, asegura la existencia del máximo y mínimo absolutos. **(4 puntos)**

Al igualar las derivadas parciales a cero se tiene que

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 2 &= 0 \\ 2y - 4x + 2 &= 0, \end{aligned}$$

de donde $x = 1$ e $y = 1$ y por lo tanto en $int(D)$ hay un único punto crítico, $P_0 = (1,1)$. **(4 puntos)**

En $Fr(D)$, utilizando multiplicadores de Lagrange, si $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 12$, se tiene el sistema determinado por $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ y $g(x,y) = 0$, esto es,

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 2 &= \lambda(2x + y) && (1) \\ 2y - 4x + 2 &= \lambda(x + 2y) && (2) \\ x^2 + xy + y^2 &= 12 && (3) \end{aligned}$$ **(4 puntos)**

De (1) y (2), restando, se tiene que $(x - y)(\lambda - 6) = 0$, de donde $y = x$ o $\lambda = 6$.

Si $y = x$, de (3) se tiene que $x = \pm 2$ y se obtienen dos puntos $P_1 = (2,2) = -P_2$.

Si $\lambda = 6$, de (1) se tiene $y = \frac{1}{5} - x$; luego, de (3) se tiene que $25x^2 - 5x - 299 = 0$, de donde $x = \frac{1 \pm 3\sqrt{133}}{10}$ y se obtienen dos puntos más, $P_3 = \left(\frac{1 - 3\sqrt{133}}{10}, \frac{1 + 3\sqrt{133}}{10}\right)$ y $P_4 = \left(\frac{1 + 3\sqrt{133}}{10}, \frac{1 - 3\sqrt{133}}{10}\right)$. **(4 puntos)**

Dado que $f(P_0) = 2$, $f(P_1) = 0$, $f(P_2) = -16$ y $f(P_3) = f(P_4) = \frac{361}{5}$, se tiene que el mínimo absoluto es -16 y el máximo absoluto es $\frac{361}{5}$. **(4 puntos)**

25 de Abril de 2017
EGG/JRC/CFS/JOF/HPV/egg

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Certamen N° 1 - 521227

1. Sea. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-1)}{x^2+(y-1)^4} & , \quad (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,1) \end{cases}$.

   (a) ¿Es f continua en $(0,1)$?

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,1)$ donde $\hat{v} = (a,b)$.

   (c) ¿Es f diferenciable en $(0,1)$?

   (d) Encuentre, si existe, la diferencial de f en el punto $(0,0)$.

   (5 pts. c/p)

2. Sea $w = f(u,v)$ con $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Considerando $u = x+y, v = x-y$.

   (a) Decida si w verifica la relación

   $$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$ (13 pts.)

   (b) Para $f(u,v) = v\cos(uv) - u$ decida si la ecuación $f(u,v) = 0$ define implícitamente a $v = h(u)$ en una vecindad del punto $(0,0)$. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto $(0,0)$.

   (12 pts.)

3. Determine la naturaleza de los puntos críticos de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 - 2y^2 + 4y - 2z^2 + 6z + 2$$

   (15 pts.)

Tiempo: 90 minutos
JCG/JRC/EGG/JOF/HPV
7 Mayo de 2018

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°1
Cálculo III (521227)

1. *a*) Para $(x,y) \neq (0,1)$, como $|f(x,y)| \leq |y-1|$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} |y-1| = 0$, por Teorema del sandwich, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0$. **(3 puntos)**

   Esto muestra que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0 = f(0,1)$ y por lo tanto, f es continua en $(0,1)$. **(2 puntos)**

   b) Como $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f\left((0,1)+t\,(a,b)\right) - f(0,1)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(at, bt+1)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{a^2 b}{a^2 + b^4 t^2}$; si $a \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,1) = b$ **(4 puntos)** y si $a = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,1) = 0$. **(1 punto)**

   c) De la parte anterior, se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$. Al considerar

$$A(x,y) := \frac{f(x,y) - f(0,1) - \nabla f(0,1)\cdot(x, y-1)}{\|(x,y)-(0,1)\|} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}},$$

   (2 puntos) si $y = x+1$ (con $x > 0$), entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} A(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ y por lo tanto, f no es diferenciable en el punto $(0,1)$. **(3 puntos)**

   d) Para $(x,y) \neq (0,1)$, como las derivadas parciales de f están definidas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(y-1)^5}{\left(x^2+(y-1)^4\right)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2\left(x^2 - 3\,(y-1)^4\right)}{\left(x^2+(y-1)^4\right)^2},$$

   se tiene que ellas son funciones continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$ (cuocientes de polinomios con denominador no nulo), por lo que f es de clase C^1 en una vecindad abierta del origen y entonces, f es diferenciable en $(0,0)$. **(2 puntos)**

   La diferencial de f en $(0,0)$, es la aplicación lineal $Df(0,0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde

$$(h,k) \to \left(Df(0,0)\right)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k = 0. \text{ \textbf{(3 puntos)}}$$

2. *a*) De la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}. \text{ **(5 puntos)**}$$

Por otra parte, como $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$, al aplicar nuevamente la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

y como f es una función de clase C^2, por Teorema de Schwarz, se tiene que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$, de donde resulta

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

y entonces, la relación indicada sí es válida. **(8 puntos)**

b) Como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(u, v) = v\cos(uv) - v$, es de clase C^1 en una vecindad del origen (pues lo es en todo $\mathbb{R}^2$), $f(0, 0) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 1 \neq 0$, entonces por el Teorema de la función implícita, la ecuación $f(u, v) = 0$ define implícitamente a $v = h(u)$ en una vecindad de $(0, 0)$. **(4 puntos)**

Además, por el mismo teorema, $h'(0) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)} = 1$ **(4 puntos)** y por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto $(0, 0)$ está dada por

$$v - 0 = h'(0)(u - 0) \Leftrightarrow v = u. \text{ **(4 puntos)**}$$

3. Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + 6x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -4y + 4$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -4z + 6$, se tiene que los puntos críticos de f son tales que

$$\begin{aligned} x(x+2) &= 0 \\ -4y + 4 &= 0 \\ -4z + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Del sistema de ecuaciones, se obtienen dos puntos críticos, ellos son $P_1 = (0, 1, 3/2)$ y $P_2 = (-2, 1, 3/2)$. **(5 puntos)**

Como

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x+6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$ **(4 puntos)**

para P_1, se tiene que $\triangle_1 > 0$, $\triangle_2 < 0$ y $\triangle_3 > 0$ y por el criterio de la matriz hessiana, se tiene que él es un punto de silla. **(3 puntos)**

Para P_2, como $\triangle_1 < 0$, $\triangle_2 > 0$ y $\triangle_3 < 0$, también por el criterio de la matriz hessiana, se tiene que él es un punto de máximo local estricto. **(3 puntos)**

7 de Mayo de 2018
JCG/JRC/EGG/JOF/HPV/egg

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación 2
Cálculo III (2025)

1. Determinar el valor de la integral doble

$$\int_0^2 \int_{x^2/4}^1 xe^{y^2}\,dy\,dx$$

mediante un cambio en el orden de integración.

Solución: Dado que la región de integración puede describirse por

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 2\sqrt{y} \end{cases}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{x^2/4}^1 xe^{y^2}\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{y}} xe^{y^2}\,dx\,dy \ \textbf{(6 puntos)} \\ &= e - 1. \ \textbf{(6 puntos)} \end{aligned}$$

2. Calcular el volumen del sólido D que se encuentra acotado superiormente por el cilindro parabólico de ecuación $z = 4 - y^2$, inferiormente por el plano xy y que está entre los planos verticales de ecuaciones $x + y = 2$ y $x + y = 6$.

Solución: La proyección de D en el plano xy está determinada por

$$\begin{cases} -2 \le y \le 2 \\ 2 - y \le x \le 6 - y \end{cases}$$

y por lo tanto, el volumen es

$$\begin{aligned} V(D) &= \int_{-2}^2 \int_{2-y}^{6-y} (4 - y^2)\,dx\,dy \ \textbf{(8 puntos)} \\ &= \frac{128}{3}. \ \textbf{(8 puntos)} \end{aligned}$$

3. Determinar el valor de la integral triple

$$\iiint_R xyz\, d(x,y,z),$$

donde R es la región del primer octante acotada por los cilindros hiperbólicos de ecuaciones $xy = 1$, $xy = 3$, $xz = 2$, $xz = 6$, $yz = 3$ e $yz = 12$.

Solución: Considerando $1 \leq u := xy \leq 3$, $2 \leq v := xz \leq 6$ y $3 \leq w := yz \leq 12$, como $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -\dfrac{1}{2xyz}$ **(3 puntos)**, del Teorema del cambio de variables,

$$\begin{aligned} \iiint_R xyz\, d(x,y,z) &= \frac{1}{2}\int_1^3 \int_2^6 \int_3^{12} 1\, dw\, dv\, du \ \textbf{(6 puntos)} \\ &= 36. \ \textbf{(3 puntos)} \end{aligned}$$

4. Calcular, por medio de una integral triple y un cambio de variables adecuado, el volumen del sólido S acotado superiormente por el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ e inferiormente por la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$.

Solución: De las ecuaciones del cono y de la esfera se tiene que $z = 3$ y que $x^2 + y^2 = 9$, de donde, la proyección de S en el plano xy corresponde al círculo determinado por $x^2 + y^2 \leq 9$. **(5 puntos)**

Utilizando coordenadas cilíndricas, dado que la ecuación del cono es $z = r$ y la de la parte inferior de la esfera es $z = 3 - \sqrt{9 - r^2}$, se tiene que el volumen de S está dado por

$$\begin{aligned} V(S) &= \iiint_S 1\, d(x,y,z) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{3-\sqrt{9-r^2}}^{r} r\, dz\, dr\, d\theta \ \textbf{(10 puntos)} \\ &= 9\pi. \ \textbf{(5 puntos)} \end{aligned}$$

Observación: Utilizando coordenadas esféricas, dado que la ecuación del cono es $\phi = \pi/4$ y la de la esfera es $\rho = 6\cos(\phi)$, se tiene que el volumen es

$$V(S) = \iiint_S 1\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{6\cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 9\pi.$$

21 de Enero de 2019
EGG/egg

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°2
Cálculo III (521227)

1. *a*) Calcular la integral $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, d(x,y)$, donde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y \geq 0,\, 2 \leq x+y \leq 4\right\}.$$

b) Calcular el volumen del sólido S acotado superiormente por el cono $z^2 = x^2+y^2$ e inferiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4z$.

Solución:

a) Al considerar $u = x+y$ y $v = y-x$, la región de integración se transforma en $R = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq u \leq 4, -u \leq v \leq u\}$ y como $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2}$, **(6 puntos)** se tiene que

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, d(x,y) = \frac{1}{2}\iint_R e^{v/u}\, d(u,v) = 3(e - e^{-1}). \text{ } \textbf{(6 puntos)}$$

b) Utilizando coordenadas esféricas, la ecuación de la hoja superior de cono queda $\phi = \pi/4$ y la de la esfera queda $\rho = 4\cos(\phi)$ **(6 puntos)**; el volumen es

$$\iiint_S 1\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{4\cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi)\; d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{8\pi}{3}. \text{ } \textbf{(7 puntos)}$$

<u>Observación</u>: Utilizando coordenadas cilíndricas, la ecuación de la hoja superior del cono queda $z = r$, la de la esfera queda $z = 2 \pm \sqrt{4-r^2}$ y

$$V(S) = \iiint_S 1\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{r} r\, dz\, dr\, d\theta = \frac{8\pi}{3}.$$

2. Un campo de fuerzas F se define por

$$F(x,y,z) = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} - yz\hat{k}, \text{ con } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Decidir si F es o no conservativo en $\mathbb{R}^3$.

   b) Calcular el trabajo $W = \displaystyle\int F \cdot dr$ efectuado al mover una partícula desde el punto $(2, 0, \sqrt{5})$ hasta el punto $(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{5})$, con $y \geq 0$, a lo largo de la curva de intersección C entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el plano $z = \sqrt{5}$ bajo la influencia del campo F.

Solución:

a) Como $\nabla \times F \neq \theta$ en $\mathbb{R}^3$, F no es un campo conservativo. **(5 puntos)**

b) La curva C corresponde al arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano $z = \sqrt{5}$ desde $(2, 0, \sqrt{5})$ hasta $(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{5})$ (con $y \geq 0$) y una parametrización para ella es $C(t) = \big(2\cos(t), 2\sin(t), \sqrt{5}\big)$, donde $t \in [0, 5\pi/6]$. **(6 puntos)**

De lo anterior, como

$$\int F \cdot dr = \int_0^{5\pi/6} \Big(2\sin(t), \sqrt{5}, -2\sqrt{5}\sin(t)\Big) \cdot (-2\sin(t), 2\cos(t), 0)\, dt$$

se tiene que $W = \sqrt{5} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5\pi}{3}$. **(6 puntos)**

3. Sea S la parte de paraboloide $z = x^2 + y^2 - 1$ por debajo del plano $z = 8$, con orientación $\hat{n}$ tal que $\hat{n} \cdot \hat{k} > 0$ y sea F el campo el campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (x^2 - y - 4, xy, 2x + z^2)$.

   a) Calcular el área de S.

   b) Utilizando el Teorema de Stokes, calcular $\displaystyle\oint_{\partial S} F \cdot dr$.

Solución:

a) Una parametrización para S es $\phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 - 1)$, cuyo dominio es $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ **(3 puntos)**, luego

$$A(S) = \iint_S 1\, dS = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, d(x, y). \quad \textbf{(2 puntos)}$$

Utilizando coordenadas polares, se tiene que

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r\sqrt{4r^2 + 1}\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right). \quad \textbf{(3 puntos)}$$

b) Como S es suave y orientable, con borde ∂S una curva cerrada simple y F es de clase C^1 en un abierto que contiene a S, entonces por Teorema de Stokes se tiene que

$$\oint_{\partial S} F \cdot dr = \iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dS, \quad \textbf{(3 puntos)}$$

donde $\hat{n}$ orienta a S de modo que $\hat{n} \cdot \hat{k} > 0$.

Utilizando la parametrización de a), se tiene,

$$\oint_{\partial S} F \cdot dr = \iint_D (0, -2, y + 1) \cdot (-2x, -2y, 1)\, d(x, y) = 9\pi. \quad \textbf{(7 puntos)}$$

19 de Diciembre de 2016
GAJ/EBC/EGG/egg

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°2
Cálculo III (521227)

1. Calcular la integral de línea

$$I_1 = \int_C (y + e^x)\, dx + \left(2x + \cos y^2\right) dy,$$

donde C es la curva que limita la región encerrada por las parábolas $x = y^2$ e $y = x^2$, orientada en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Solución: El campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por

$$F(x, y) = (p(x, y), q(x, y)) = \left(y + e^x, 2x + \cos y^2\right),$$

es de clase C^1 sobre un abierto que contiene a $D := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

Como $C = Fr(D)$ es una curva cerrada, simple, seccionalmente suave y tiene orientación positiva, por Teorema de Green **(10 puntos)**, se tiene que

$$I_1 = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x, y)\right) d(x, y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1\, dy\, dx = \frac{1}{3}. \textbf{ (10 puntos)}$$

2. Sea Ω el sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 0$. Determinar el volumen de Ω.

Solución: Utilizando coordenadas cilíndricas, el sólido Ω se describe por $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq 2\sin\theta$ y $0 \leq z \leq r$.

Luego, el volumen pedido es

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} \int_0^r r\, dz\, dr\, d\theta \textbf{ (10 puntos)} \\ &= \frac{8}{3}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \\ &= \frac{32}{9}. \textbf{ (10 puntos)} \end{aligned}$$

3. Calcular la integral de superficie

$$I_2 = \iint_S \left(xy^2 + \frac{1}{4+z^2}, yz^2 + \frac{1}{4+x^2}, zx^2 + \frac{1}{4+y^2} \right) \cdot \hat{n}\, dS,$$

donde $S = S_1 \cup S_2$ es la unión de las superficies esféricas $S_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 4\}$. La orientación de S_1 considera el vector normal que apunta hacia el origen y la orientación de S_2 considera el vector normal que apunta en la dirección contraria al origen.

Solución: El campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$F(x,y,z) = \left(xy^2 + \frac{1}{4+z^2}, yz^2 + \frac{1}{4+x^2}, zx^2 + \frac{1}{4+y^2} \right)$$

es de clase C^1 sobre un abierto que contiene a $V := \{(x,y,z) : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

Como la superficie S correspondiente a la frontera del sólido V es suave, cerrada y está orientada exteriormente, dado que

$$\nabla \cdot F(x,y,z) = y^2 + z^2 + x^2,$$

por Teorema de Gauss, se tiene que

$$I_2 = \iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right) d(x,y,z). \textbf{ (10 puntos)}$$

Utilizando coordenadas esféricas, el sólido V se describe por $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $1 \leq \rho \leq 2$, por lo tanto

$$I_2 = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho^4 \sin\phi \; d\rho \; d\theta \; d\phi = \frac{124\pi}{5}. \textbf{ (10 puntos)}$$

23 de Junio de 2017
EGG/JRC/CFS/JOF/HPV/egg

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°2
Cálculo III (521227)

1. Calcular el volumen de la región R, en el primer octante, acotada por el cilindro parabólico de ecuación $z = 9 - y^2$ y el plano de ecuación $y = 3x$.

   Solución: Una descripción de la proyección del volumen en el plano xy es

   $$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3,\, 0 \leq x \leq y/3\right\},$$

   de donde, el volumen de R está dado por

   $$\begin{aligned} V(R) &= \int_0^3 \int_0^{y/3} \int_0^{9-y^2} 1\, dz\, dx\, dy \text{ } \textbf{(10 puntos)} \\ &= \frac{27}{4}. \text{ } \textbf{(5 puntos)} \end{aligned}$$

2. Determinar el valor de la integral doble

   $$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, d(x, y)$$

   donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4y\}$.

   Solución: Utilizando coordenadas polares, el conjunto D, se describe como

   $$0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{y} \quad 0 \leq r \leq 4 \sin\theta.$$

   Luego, la integral doble es

   $$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, d(x, y) &= \int_0^\pi \int_0^{4\sin\theta} r^2\, dr\, d\theta \text{ } \textbf{(7 puntos)} \\ &= \frac{64}{3} \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \\ &= \frac{256}{9}. \text{ } \textbf{(5 puntos)} \end{aligned}$$

3. Sea F el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, definido por

$$F(x,y) = \left(x + \frac{y}{x^2+y^2}, y - \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

a) Usando la definición, calcular la integral de línea de F a lo largo de la circunferencia C de ecuación $x^2+y^2=a^2$ orientada en sentido antihorario.

b) Usando el Teorema de Green, calcular la integral de línea de F a lo largo de la curva correspondiente a la unión de los segmentos de recta C_1 y C_2, donde C_1 va desde $(-1,-1)$ a $(0,1)$ y C_2 va desde $(0,1)$ a $(1,-1)$.

Solución:

a) Al considerar $C(t) = (a\cos t, a\sin t)$, donde $t \in [0, 2\pi]$, se tiene

$$\int_C F \cdot dr = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi. \textbf{ (6 puntos)}$$

b) Sea C_3 el segmento orientado desde $(1,-1)$ a $(-1,-1)$ y con parametrización $C_3(t) = (-t,-1)$, donde $t \in [-1,1]$, por definición de integral de línea, se tiene

$$\int_{C_3} F \cdot dr = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t^2+1} + t \right) dt = \frac{\pi}{2}. \textbf{ (4 puntos)}$$

Sean $p(x,y) = x + \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $q(x,y) = y - \dfrac{x}{x^2+y^2}$ y C_T el triángulo orientado en sentido horario correspondiente a la unión de los segmentos C_1, C_2 y C_3.

Sea además D la región encerrada por la curva C del ítem anterior (con $a > \sqrt{2}$) y exterior a C_T, como p y q son de clase C^1 sobre un conjunto abierto que contiene a D, por Teorema de Green (segunda versión) se tiene que

$$\int_C F \cdot dr + \int_{C_T} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) \right) d(x,y). \textbf{ (6 puntos)}$$

Como $\dfrac{\partial q}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial p}{\partial y}(x,y)$, de la igualdad anterior y del hecho que

$$\int_{C_T} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr,$$

se obtiene que

$$\int_{C_1+C_2} F \cdot dr = -\int_C F \cdot dr - \int_{C_3} F \cdot dr = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}. \textbf{ (4 puntos)}$$

4. Sean F el campo vectorial definido por $F(x,y,z) = x^3\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath} + z^3\hat{k}$ y S el tronco de cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$, con $1 \leq z \leq 4$; orientado según el vector $\hat{n}$ tal que $\hat{n} \cdot \hat{k} < 0$ (S orientada hacia abajo).

   a) Parametrizar la superficie S.

   b) Usar la parametrización anterior para expresar la integral de superficie

$$\iint_S F \cdot \hat{n}\, dA$$

   como una integral doble.

Solución 1:

a) Una parametrización para S, es

$$\begin{array}{rcl} \Phi : D & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & \Phi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right), \end{array}$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. **(6 puntos)**

b) Del ítem anterior, dado que $\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y) = \left(-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$, se tiene que la orientación para S está dada por

$$\vec{n}\,(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$$

Como $F\,(\Phi(x,y)) \cdot \vec{n}\,(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x^2+y^2)^{3/2}$, por definición de integral de superficie, se tiene que

$$\iint_S F \cdot \hat{n}\, dA = \iint_D \left(\frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right)^{3/2}\right) d(x,y),$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. **(7 puntos)**

Solución 2:

a) Una parametrización para S, es

$$\begin{array}{rcl} \Phi : D & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) & \mapsto & \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)\,, \end{array}$$

donde $D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 4,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. **(6 puntos)**

b) Del ítem anterior, dado que

$$\Phi_r(r,\theta) \times \Phi_\theta(r,\theta) = (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r)\,,$$

se tiene que la orientación para S está dada por

$$\vec{n}\,(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, -r)$$

Como $F\,(\Phi(r,\theta)) \cdot \vec{n}\,(r,\theta) = r^4\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta - 1\right)$, por definición de integral de superficie, se tiene que

$$\iint_S F \cdot \hat{n}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_1^4 r^4\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta - 1\right) dr d\theta. \textbf{ (7 puntos)}$$

25 de Junio de 2018
JCG/JRC/EGG/JOF/HPV/egg

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación 3
Cálculo III (2025)

1. Sean $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $F(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\hat{\imath} + (x^3z - 3x)\hat{\jmath} + (x^3y + 2z)\hat{k}$ y la curva Γ de ecuaciones paramétricas $x(t) = t$, $y(t) = t^3 + t^2 - 1$, $z(t) = t + 3$, donde $t \in [-1, 1]$. Determinar el valor de la integral de línea $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot dr$.

   Solución: Un potencial escalar para F es $f(x, y, z) = x^3yz - 3xy + z^2$ **(5 puntos)** y como F es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$, entonces F es un campo conservativo. **(5 puntos)**

   Por otra parte, como el punto extremo inicial de Γ es $A := (-1, -1, 2)$ y el punto extremo final es $B := (1, 1, 4)$, **(5 puntos)** se tiene que

$$\int_\Gamma F \cdot dr = f(B) - f(A) = 14. \ \textbf{(5 puntos)}$$

2. Calcular la integral $\oint_C F \cdot dr$, donde $F(x,y) = \left(2y - \frac{y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\right)$ y C es la elipse de ecuación $4x^2+9y^2 = 36$ recorrida una vez en sentido antihorario.

Solución: Sean $p(x,y) := 2y - \frac{y}{(x+1)^2+y^2}$, $q(x,y) := \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$ y C_0 la circunferencia de radio 1 con centro en $(-1,0)$ orientada en sentido antihorario.

Sea D la región entre las curvas C y C_0, como $F = (p,q)$ es de clase C^1 sobre un abierto A tal que $D \subset A$ y las curvas C y C_0 son suaves, simples y cerradas, entonces por la segunda versión del Teorema de Green, se tiene que

$$\oint_C p\,dx + q\,dy - \oint_{C_0} p\,dx + q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)(x,y)\,d(x,y). \text{ **(6 puntos)**}$$

Como $\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = -2$, entonces

$$\iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)(x,y)\,d(x,y) = -2\,\text{Área}(D) = -10\pi. \text{ **(6 puntos)**}$$

Por otra parte, dado que una representación de C_0 es la dada por las ecuaciones paramétricas $x = \cos(t) - 1$ e $y = \sin(t)$, donde $t \in [0, 2\pi]$, por definición de integral de línea, se tiene que

$$\oint_{C_0} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\,dt = 0 \text{ **(6 puntos)**}$$

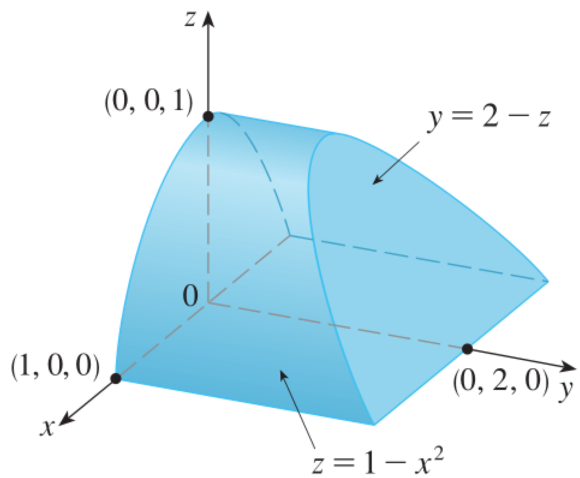
y por lo tanto, de lo anterior, $\oint_C F \cdot dr = -10\pi$. **(2 puntos)**

3. Sea R la región acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$. Sean S la frontera de R orientada exteriormente y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, el campo definido por $F(x, y, z) = 2xz\hat{\imath} + 3yz\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$. Indicar, de manera justificada, si puede aplicarse el Teorema de Gauss para calcular

$$\iint\limits_S F \cdot \hat{n}\, dA$$

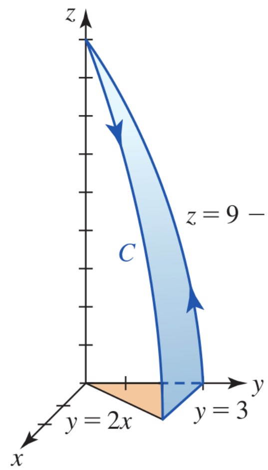
y luego determinar el valor de dicha integral.

Solución: Como S es seccionalmente suave, cerrada y orientada exteriomente y F es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$, entonces es aplicable el Teorema de Gauss **(6 puntos)** y



$$\begin{aligned}
\oiint\limits_S F \cdot \hat{n}\, dA &= \iiint\limits_R \nabla \cdot F\,(x, y, z)\ d(x, y, z) \\
&= 7 \iiint\limits_R z\, d(x, y, z) \ \textbf{(7 puntos)} \\
&= 7 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int^{2-z} z\, dy\, dz\, dx \\
&= \frac{16}{3}. \ \textbf{(7 puntos)}
\end{aligned}$$

4. Sean $F(x,y,z) = x^2y\hat{\imath} + (x+y^2)\hat{\jmath} + y^2z\hat{k}$ y C el borde de la superficie que se muestra en la figura



Utilizar el Teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\oint_C F \cdot dr$.

Solución: Como F es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$, del Teorema de Stokes, la integral de línea puede calcularse como sigue

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA,$$

donde S es la parte del cilindro parabólico que tiene como borde a la curva seccionalmente suave C y cuya proyección en el plano xy es el conjunto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3/2,\ 2x \le y \le 3\right\}. \ \textbf{(6 puntos)}$$

Una parametrización para S, es

$$\begin{aligned} \Phi : D &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto \Phi(x,y) = \left(x, y, 9 - y^2\right), \end{aligned}$$

de donde $\vec{n}(x,y) = \Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y) = (0, 2y, 1)$. **(7 puntos)**

De lo anterior,

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr &= \iint_D \left(18y - 2y^3, 0, 1 - x^2\right) \cdot (0, 2y, 1)\, d(x,y) \\ &= \int_0^{3/2} \int_{2x}^{3} (1 - x^2)\, dy\, dx \\ &= \frac{45}{32}. \ \textbf{(7 puntos)} \end{aligned}$$

30 de Enero de 2019
EGG/egg

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación de Recuperación
Cálculo III (521227)

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) Mostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

   c) ¿Es f de clase C^2 en una vecindad abierta del origen? Justificar.

Solución:

a) Para $(x,y) \neq (0,0)$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Además, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. **(7 puntos)**

b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1,$$

de lo anterior, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. **(7 puntos)**

c) Si f fuese de clase C^2 en una vecindad abierta del origen, por Teorema de Schwarz, se tendría que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$; por lo tanto, de la parte anterior, f no es de clase C^2 cerca de $(0,0)$. **(6 puntos)**

2. Sea C la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $y + z = 1$, orientada de manera que la curva C_1, proyección de C sobre el plano xy, esté en sentido antihorario.

   a) Encontrar una representación paramétrica de C.

   b) Calcular la integral $\oint_C y\,dx + z\,dy + 4\,dz$.

Solución:

a) De la ecuación del plano se tiene que $z = 1 - y$ y reemplazando en la ecuación de la esfera se tiene que

$$\frac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{(1/2)^2} = 1,$$

de donde $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)$ e $y = \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}$; luego, una representación paramétrica para C está dada por

$$C(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(t)\right),$$

donde $t \in [0, 2\pi]$. **(10 puntos)**

b) Al considerar $F(x, y, z) = (y, z, 4)$ y la parte anterior, se tiene que la integral pedida está dada por

$$\oint_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(C(t)) \cdot C'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\pi.$$ **(10 puntos)**

3. Sean $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función positiva de clase C^1 y S la superficie del espacio xyz que se obtiene al rotar en torno al eje x la curva $y = g(x)$ con $x \in [a, b]$. Notar que S admite por representación paramétrica suave $\phi : [0, 2\pi] \times [a, b] \to \mathbb{R}^3$, dada por $\phi(\theta, x) = (x, y, z)$, donde $x = x$, $y = g(x)\cos(\theta)$ y $z = g(x)\sin(\theta)$.

   a) Calcular el vector normal principal $n(\theta, x)$ a S en el punto $\phi(\theta, x)$.

   b) Encontrar el borde ∂S de la superficie S.

   c) Para $F(x, y, z) = (y, z, x)$ y S orientada *exteriormente*, determinar el valor de la integral $\displaystyle\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA$:

      i) Usando el Teorema de Stokes.

      ii) Usando el Teorema de Gauss.

Solución:

a) $n(\theta, x) = (-g'(x)g(x), g(x)\cos(\theta), g(x)\sin(\theta))$. **(5 puntos)**

b) El borde de la superficie S está definido por $\partial S = C_1 \cup C_2$, donde C_1 es la circunferencia en el plano $x = a$ de centro en $(a, 0, 0)$ y radio $g(a)$ y C_2 es la circunferencia en el plano $x = b$ de centro en $(b, 0, 0)$ y radio $g(b)$. **(5 puntos)**

c) *i*) Del Teorema de Stokes, como S es una superficie orientada suave y F es de clase C^1 en un abierto que contiene a S, se tiene que

$$\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA = \oint_{C_1} F \cdot dr - \oint_{C_2} F \cdot dr.$$

Como una parametrización para C_1 es

$$C_1(t) = (a, g(a)\cos(t), g(a)\sin(t))$$

y una para C_2 es

$$C_2(t) = (b, g(b)\cos(t), g(b)\sin(t))$$

donde $t \in [0, 2\pi]$ en ambos casos, al calcular las integrales de línea por definición, se obtiene que

$$\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA = \pi(g^2(b) - g^2(a)).$$ **(5 puntos)**

ii) Sean S_1 y S_2 los discos en los planos $x = a$ y $x = b$ cuyos bordes son C_1 y C_2 respectivamente, S_1 orientada según el vector $-\hat{\imath}$ y S_2 orientada según el vector $\hat{\imath}$.

Sean además $S_t = S + S_1 + S_2$ y R el volumen acotado por S_t.

Como S_t es suave y está orientada exteriormente y $\nabla \times F = (-1, -1, -1)$ es de clase C^1 en un abierto que contiene a R; del Teorema de Gauss, dado que $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$, se tiene que

$$\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA + \iint_{S_1} \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA + \iint_{S_2} \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA = 0,$$

de donde

$$\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA = -\iint_{S_1} \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA - \iint_{S_2} \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA.$$

Del Teorema de Stokes, se tiene

$$\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA = \oint_{C_1} F \cdot dr - \oint_{C_2} F \cdot dr$$

y de lo obtenido en la parte i), se obtiene que

$$\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA = \pi(g^2(b) - g^2(a)).$$ **(5 puntos)**

3 de Enero de 2017
GAJ/EBC/EGG/egg

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

EGG/JAG/CFS/JOF/HPV

Solución Evaluación Recuperación.
Cálculo III.

1. Determine el volumen máximo de una caja rectangular inscrita en una esfera de radio r. (20 puntos)

   Solución.- Una esfera de radio r se representa por $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

   Tomando un vértice $(x, y, z) \in S$, el volumen de la caja inscrita, con ese vértice, está dado por $V = 8xyz$.

   Por lo tanto el problema se resuelve determinando el máximo absoluto de

   $$V(x, y, z) = 8xyz$$
   $$\text{sujeto a } g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \qquad \text{(6 puntos)}$$

   Este máximo absoluto existe porque V es una función continua sobre el compacto S. Además, por simetría podemos considerar que este punto está en el primer octante $(x > 0, y > 0, z > 0)$ y como V y g son de clase C^1 y $\nabla g \neq \theta$ en S, se puede usar el método de multiplicadores de Lagrange y se resuelve el sistema

   $$\begin{aligned} 8yz &= \lambda 2x \\ 8xz &= \lambda 2y \\ 8xy &= \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \end{aligned} \qquad \text{(7 puntos)}$$

   Considerando que todas las variables son positivas, se divide la primera por la segunda y la segunda por la tercera, para obtener

   $$\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \wedge \frac{z}{y} = \frac{y}{z}$$

   Así, $x^2 = y^2 = z^2$ y por tanto, $x = y = z$ y reemplazando en la cuarta

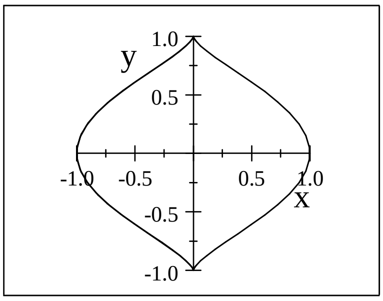
   $$3x^2 = r^2 \text{ y } x = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

   Por tanto, $x = y = z = \frac{r}{\sqrt{3}}$ y $\lambda = \frac{4r}{\sqrt{3}}$.

   El volumen máximo es $V = 8\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8}{9}\sqrt{3}r^3$

   (7 puntos)

2. Haciendo uso del Teorema de Green, determine el área de la región limitada por la curva C parametrizada por $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\vec{r}(t) = \cos^3 t \cdot \hat{\imath} + \sin t \cdot \hat{\jmath}$



(15 puntos)

Solución.- La curva es simple y cerrada, suave por tramos. Por tanto, para un campo $F(x, y) = P(x, y)\,\hat{\imath} + Q(x, y)\,\hat{\jmath}$ de clase C^1 en un abierto que contenga a $C \cup D$

$$\int_C P dx + Q dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) \qquad \text{(5 puntos)}$$

Si se toma el campo $\vec{F}(x, y) = 0\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ se obtiene $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

$$\begin{aligned} A(D) &= \int\int_D 1 d(x, y) \\ &= \int_C x dy \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^3 t \cos t dt && \text{(5 puntos)} \\ &= \frac{3}{4}\pi && \text{(5 puntos)} \end{aligned}$$

3. Sea S la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = y + 3$, y sean C_1 y C_2 las dos curvas que conforman el borde de S.

a) Haga la representación geométrica (gráfico) de S y de su borde.

b) Encuentre representaciones paramétricas de la superficie S y de las curvas C_1 y C_2.

c) Para el campo $\vec{F}(x, y, z) = z \cdot \hat{\imath} + x \cdot j + y \cdot \hat{k}$, calcule su rotacional y escriba claramente la fórmula integral entregada por el Teorema de Stokes para $\vec{F}$ y la superficie con borde considerada, indicando las orientaciones correspondientes.

d) Calcule la integral de superficie $\int\int_S \left(\nabla \times \vec{F} \right) \cdot \hat{n}\, dS$.

(25 puntos)

Solución.-

a)

. (4 puntos)

b) Parametrización de S.- De las coordenadas cilíndricas:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(\theta, z) & = & (\cos\theta, \sin\theta, z) \text{ , definida en} \\ D & : & 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ , } 0 \leq z \leq 3 + \sin\theta \end{array}$$

Parametrización de C_1: curva en el plano xy

$$x(t) = \cos t \text{ , } y(t) = \sin t \text{ , } z(t) = 0 \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Parametrización de C_2: curva en el plano $z = 3 + y$

$$x(t) = \cos t \text{ , } y(t) = \sin t \text{ , } z(t) = 3 + \sin t \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi \qquad \text{(8 puntos)}$$

c) $\nabla \times [z, x, y] = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ (constante)

Para aplicar el teorema de Stokes, se orienta la superficie S por el campo $\vec{n}$ que apunta hacia afuera del cilindro y las curvas C_1 y C_2 como se indica en las parametrizaciones anteriores, para tener

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n} \, dS \qquad \text{(6 puntos)}$$

d) Para calcular $\int_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n} \, dS$ usamos la parametrización indicada obteniendo

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_S \nabla \times \vec{F} \, dS & = & \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{3+\sin\theta} \left[\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right] \cdot \left[\cos\theta \cdot \hat{\imath} + \sin\theta \cdot \hat{\jmath} + 0 \cdot \hat{k}\right] dz d\theta \\ & = & \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{3+\sin\theta} (\cos\theta + \sin\theta) \, dz d\theta \\ & = & \pi \end{array} \qquad \text{(7 puntos)}$$

$\int_0^{3+\sin\theta} (\cos\theta + \sin\theta) \, dz = (\sin\theta + 3)(\cos\theta + \sin\theta)$

$\int_0^{2\pi} (\sin\theta + 3)(\cos\theta + \sin\theta) \, d\theta = \pi$

07/07/17

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación de Recuperación
Cálculo III (521227)

1. La función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de clase C^2, determina la relación $w = f(x, y, z)$. La transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$\begin{cases} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{cases}$$

permite expresar w en términos de las coordenadas esféricas ρ, θ y ϕ. Aplicar la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales $\dfrac{\partial w}{\partial \rho}$ y $\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial\rho}$.

Solución: De la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} \\ &= \sin\phi\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\phi\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\phi\,\frac{\partial f}{\partial z} \quad \textbf{(5 puntos)} \end{aligned}$$

Nuevamente, de la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial\rho} &= -\sin\phi\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\phi\cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \sin\phi\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \\ &\quad \sin\phi\sin\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \cos\phi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right), \end{aligned}$$

donde $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\sin\phi\sin\theta$ y $\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\sin\phi\cos\theta$. **(10 puntos)**

2. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = xy + x - y$ y el conjunto

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\right\},$$

calcular los valores extremos de f sobre K.

Solución: Los valores extremos para f podrían alcanzarse en $int(K)$ o en $Fr(K)$.

En $int(K)$ no hay puntos críticos. **(3 puntos)**

En $Fr(K)$, usando multiplicadores de Lagrange, al considerar $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$, se tiene el sistema determinado por $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$ y $g(x, y) = 0$, esto es,

$$\begin{aligned} y + 1 &= 2\lambda x \quad (1) \\ x - 1 &= 2\lambda y \quad (2) \\ x^2 + y^2 &= 2 \qquad (3) \end{aligned} \quad \textbf{(4 puntos)}$$

De (1) y (2), sumando, se tiene que

$$x + y = 2\lambda(x + y) = 0,$$

de donde $y = -x$ o $\lambda = 1/2$.

Si $y = -x$, se obtienen dos puntos $P_1 = (-1, 1)$ y $P_2 = (1, -1)$.

Si $\lambda = 1/2$, de (2) se tiene que $y = x - 1$; luego, de (3) se tiene que

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

y se obtienen dos puntos más, $P_3 = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$ y $P_4 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, -\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)$.

Como $f(P_1) = -3$, $f(P_2) = 1$ y $f(P_3) = 3/2 = f(P_4)$, se tiene que el mínimo absoluto es -3 y el máximo absoluto es $3/2$. **(8 puntos)**

3. Calcular la integral doble

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, d(x,y),$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2 \leq x+y \leq 4\}$.

Solución: Al considerar el cambio de variables dado por

$$u = x + y \quad \text{y} \quad v = y - x,$$

la región de integración se transforma en

$$R = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq u \leq 4, -u \leq v \leq u\right\} \textbf{ (6 puntos)}$$

y como $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2}$, **(3 puntos)** la integral doble es

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, d(x,y) = \frac{1}{2}\iint_R e^{v/u}\, d(u,v) = 3(e - e^{-1}). \textbf{ (6 puntos)}$$

4. Sea C la curva de intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ con el plano $y+z=1$, orientada de manera que la curva C_1, proyección de C sobre el plano xy, esté en sentido antihorario. Utilizar el Teorema de Stokes para calcular

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + 4\,dz.$$

Solución: De la ecuación del plano se tiene que $z = 1-y$ y reemplazando en la ecuación de la esfera se obtiene que

$$\frac{x^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2} + \frac{(y-1/2)^2}{(1/2)^2} = 1. \textbf{ (5 puntos)}$$

Sea S la parte del plano que está encerrada por C. Una parametrización para S es

$$\begin{array}{rcl} \Phi : D & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & \Phi(x,y) = (x,y,1-y)\,, \end{array}$$

donde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{(y-1/2)^2}{(1/2)^2} \leq 1 \right\}$ y $\vec{n} = (0,1,1)$.

Definiendo $F(x,y,z) = (y,z,4)$, como S es suave y F es de clase C^1, entonces por el Teorema de Stokes

$$\oint_C F\cdot dr \iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\,dA. \textbf{ (5 puntos)}$$

De la igualdad anterior, como $\nabla\times F = (-1,0,-1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_C F\cdot dr &= \iint_D (-1,0,-1)\cdot(0,1,1)\,d(x,y) \\ &= -\,\text{Área}(D) \\ &= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \textbf{ (5 puntos)} \end{aligned}$$

9 de Julio de 2018
JCG/JRC/EGG/JOF/HPV/egg