Lugar Geométrico de las Raíces

M.Sc. Javier A. Muñoz V.
Ingeniero Civil Electrónico
javiermunoz@udec.cl

Eduardo E. Espinosa N.
Ingeniero Civil Electrónico
eespinosa@udec.cl

Contenido del Capitulo

Régimen Transiente en Sistemas Realimentados.

I. Introducción

II. El Método del LGR.

III. Reglas Adicionales para la Construcción del L.G.R.

IV. Análisis de Sistemas y Ejemplos de Sintonización

- **El L.G.R. con Parámetros distintos a k.**
- **El L.G.R. para k Negativos.**
- **Variación de Parámetros Múltiples (Sintonización).**
- **Sistemas Continuos en Variables de Estados.**
- **Sistemas Continuos con Retardos.**
- **Sistemas Discretos con Retardos.**

Introducción

La ubicación de los polos en sistemas lineales contiene mucha de la información relevante de éste. En efecto, a partir de ésta se puede concluir de su estabilidad y características dinámicas y estáticas. En este capítulo se revisa el concepto de Lugar Geométrico de las Raíces como el gráfico de la ubicación de los polos de un sistema lineal.

En particular, se revisan técnicas para bosquejar esta ubicación a partir de la F. de T. en L.D. de sistemas continuos, discretos e híbridos como función de un parámetro del sistema. Normalmente, este parámetro corresponde a la ganancia del controlador.

Introducción

Sea la planta tiempo continuo en L.C. como se muestra en la Fig.5.1(a). La F. de T. en L.D. es,

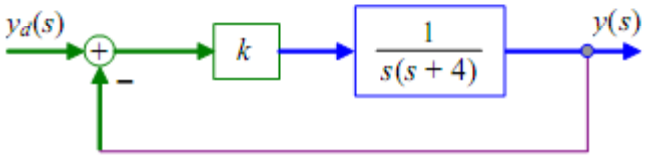
$$l(s) = \frac{k}{s(s+4)}$$

Y por lo tanto las raíces en L.A. son $s_{1,2}$=0 y -4. La F.de T. en L.C. es,

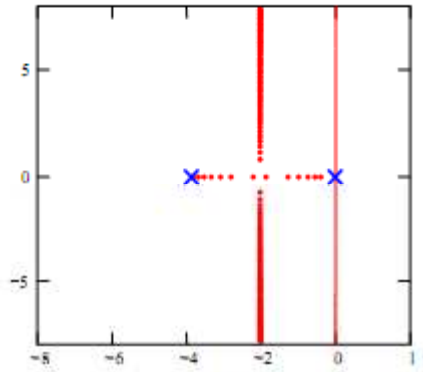
$$\frac{y(s)}{y_d(s)} = \frac{k \cdot g(s)}{1 + k \cdot g(s) \cdot r(s)} = \frac{k}{s(s+4)+k} = \frac{k}{s^2 + 4s + k}$$

Y por lo tanto las raíces en L.C. son $s_{1,2} = \left(-4 \pm \sqrt{16 - 4k}\right) \Big/ 2 = -2 \pm \sqrt{4-k}$, las cuales dependen de k. Algunos valores se muestran en la tabla.

k	s_1	s_2
0	-4	0
2	$-2+\sqrt{2}$	$-2-\sqrt{2}$
4	-2	-2
6	$-2+j\sqrt{2}$	$-2-j\sqrt{2}$
8	$-2+j2$	$-2-j2$



(a)



(b)

Fig. 5.1 Sistema en L.C. y su L.G.R. en función de k;(a) diagrama,(b) L.G.R.

Introducción

Se observa que,

- Para k = 0 se tiene que las raíces en L.C. son las raíces en L.D.,

- A medida que k aumenta, las raíces del polinomio en L.C. se mueven por ramas, por lo que hay un número de ramas que es igual al número de raíces, el cual a su vez es igual al orden del polinomio característico.

Si ahora - por ejemplo - la F. de T. en L.D. de un sistema discreto (con r(z) = 1) es,

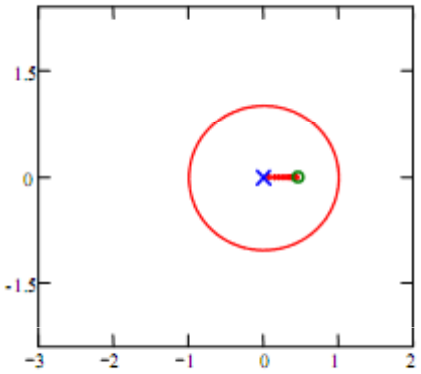
$$l(z) = k\frac{z-0.5}{z}$$

Hay un polo en 0 y además hay un cero en 0.5. La F.de T. en L.C. sería,

$$\frac{y(z)}{y_d(z)} = \frac{k\cdot g(z)}{1+k\cdot g(z)\cdot r(z)} = \frac{k(z-0.5)}{z+k(z-0.5)} = \frac{k(z-0.5)}{z(1+k)-0.5k}$$

Por lo que el polinomio característico es el denominador de la F. de T.

$$z_1 = \frac{0.5k}{k+1}$$



Introducción

De la expresión anterior se concluye que,

- Para k = 0 se tiene que el polo en L.C. es el polo en L.D..
- El polo viaja al cero a medida que k aumenta.

En un caso más complicado, como por ejemplo, la F. de T. en L.D. dada por,

$$l(s) = k\frac{(s+4+3j)\cdot(s+4-3j)}{s(s+2)(s+6)(s+5+6j)\cdot(s+5-6j)}$$

la cual genera una F. de T. en L.C. dada por,

$$\frac{y(s)}{y_d(s)} = k\frac{s^2+8s+25}{s^5+18^4+135s^3+(608+k)s^2+(732+8k)s+25k}$$

En donde queda claro que no es posible determinar la ubicación de los polos de esta función por inspección. El resultado exacto se encuentra en la Figura 5.2

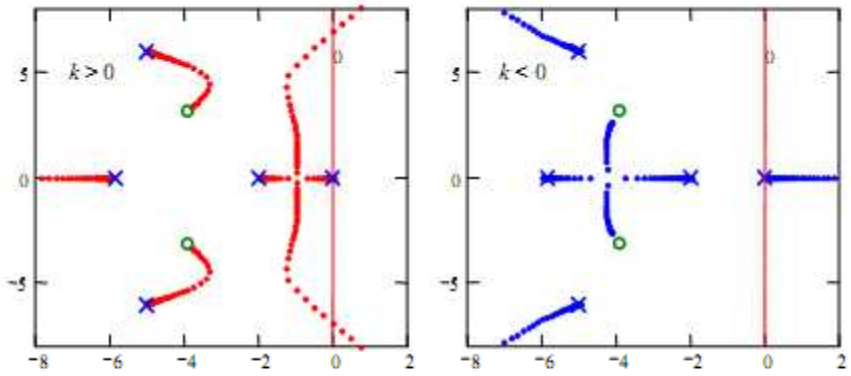


Fig. 5.2 L.G.R. sistema en L.C.

Introducción

El método del L.G.R. es una técnica gráfica para determinar los polos de la F. de T. en L.C. h(s) o h(z) a partir de la F. de T. en L.D. l(s) o l(z), respectivamente, conforme varía uno de los parámetros del sistema. Este método proporciona un gráfico que permite estudiar,

- estabilidad → polos en el S.P.I./S.P.D..
- dinámica → ubicación de polos en el diagrama (complejos: oscilaciones).
- estado estacionario → error en estado estacionario en el diagrama (polos en el origen).
- sensibilidad → variación del L.G.R. en función de algún parámetro.
- diseño → ubicación de los polos.

El Método del L.G.R.

Es un conjunto de reglas que permiten encontrar la ubicación de los polos en L.C. del sistema general dado por la Fig. 5.3 sin resolver la ecuación característica. Los polos en L.C. están dados por las raíces de la ecuación,

$$1+l(s)=1+kgr(s)=0, \text{ o bien } 1+l(z)=1+kgr(z)=0$$

por lo que todo punto s o z en el plano complejo que cumpla con la ecuación anterior, es un polo del sistema en L.C.. Las expresiones anteriores pueden ser escritas como,

$$gr(s)=-\frac{1}{k}=\frac{1}{k}e^{j\pi}=\frac{1}{k}e^{j(\pi+2n\pi)}=\frac{1}{k}e^{j\pi(1+2n)}, \text{ o bien } gr(z)=-\frac{1}{k}=\frac{1}{k}e^{j\pi}=\frac{1}{k}e^{j(\pi+2n\pi)}=\frac{1}{k}e^{j\pi(1+2n)}$$

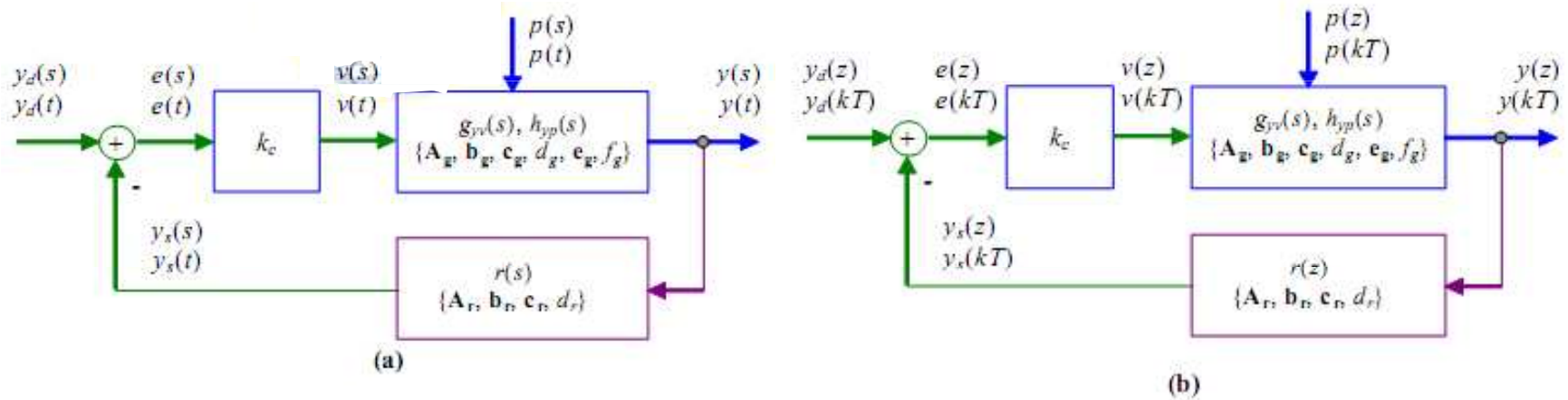


Fig. 5.3 Sistema generalizado en L.C. para análisis con el L:G.R., (a) Sistemas Continuos (b) Sistemas Discretos

Por lo tanto, se debe cumplir que,

$$\left|gr(s)\right| = -\frac{1}{k} \text{ y } arg\left(gr(s)\right) = \pi(1+2n), \text{ o bien } \left|gr(z)\right| = -\frac{1}{k} \text{ y } arg\left(gr(z)\right) = \pi(1+2n)$$

las cuales se conocen como la condición de magnitud y ángulo, respectivamente. En general, un punto en el plano complejo debe cumplir con la condición de ángulo para que corresponda a un polo del sistema en L.C.. La ecuación de magnitud puede ser posteriormente utilizada para determinar la ganancia k necesaria para tener el punto en L.C. como polo.

Ejemplo 17,

Supongamos que $kgr(s) = \frac{k}{s(s+4)}$. Determine si -6 y -1 pertenecen al L.G.R.

Sea s_1= -1 un punto del lugar geométrico, entonces, arg(gr(s_1))=arg(1/(-1(-1+4)))=180º, por lo tanto s_1 si pertenece al L.G.R.; además |gr(s_1)|=1/k=|gr(s_1)|=|1/(-1)(-1+4)|=1/3, por lo que k=3.

Por otro lado, sea s_2 =-6 un punto del L.G.R., como arg(gr(s_2))=arg(1/(-6(-6+4)))=0º, entonces s_2 no pertenece al L.G.R.. Esto se corrobora en la figura 5.1

A continuación se exponen las reglas para construir el L.G.R.. Si bien se hace mención sólo al caso continuo, éstas son utilizables sin modificaciones en sistemas discretos. Las reglas son,

El Método del L.G.R.

Regla Nº1: Número de Ramas.

El número total de ramas es igual al número de polos de la F.de T. en L.D. l(s). Dem: En L.C. hay igual número de polos que en l(s)

Regla Nº2: Puntos de Inicio (k→0)

Las ramas del L.G.R. comienzan en los polos de la F.de T. en L.D. l(s). Dem:

$$1+kgr(s)=1+k\frac{\prod(s+z_i)}{\prod(s+p_j)}=0,\ \therefore \prod(s+p_j)+k\prod(s+z_i)=0,\ \text{con k=0 se tiene que}$$

$\prod(s+p_j)=0$ Por lo tanto, los valores de s que satisfacen esta ecuación son los ***polos*** del sistema

Regla Nº3: Puntos finales (k→∞)

Si l(s) tiene η_p polos y η_z ceros, entonces η_z ramas terminan en los η_z ceros y las $\eta_p - \eta_z$ ramas restantes terminan en el infinito.

$$1+kgr(s)=1+k\frac{\prod(s+z_i)}{\prod(s+p_j)}=0,\ \therefore \prod(s+p_j)+k\prod(s+z_i)=0,\ \text{o también}$$

$$\frac{1}{k}\prod(s+p_j)+\prod(s+z_i)=0\ \ \text{con}\ \ k\to\infty,\ \prod(s+z_i)=0$$

Por lo tanto, los valores de s que satisfacen esta ecuación son los ***ceros*** del sistema.

Regla Nº4: Comportamiento a lo largo del eje real s=σ

Un punto en el eje real es un punto del L.G.R. si la suma del número de polos y ceros que se encuentran a la derecha del punto es impar.

Dem.: Utilizando el criterio de los ángulos. El aporte neto de ángulo por un número par de ceros y/o polos es cero. Por lo tanto, el número debe ser impar.

Regla Nº5: Determinación de la ganancia

La ganancia en un punto arbitrario s_1 que pertenece al L.G.R. se calcula como

$$k = \left. \frac{1}{\left| gr(s) \right|} \right|_{s=s_1}$$

Dem: |gr(s)|=1/k, por definición de punto que pertenece al L.G.R.

Ejemplo 18

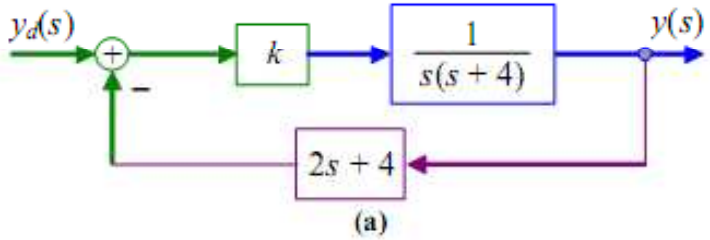
Sea el sistema de la figura 5.5 (a) Determine su L.G.R.

La ecuación característica es,. $1+kgr(s)=1+k\dfrac{2(s+2)}{s(s+4)}=0$

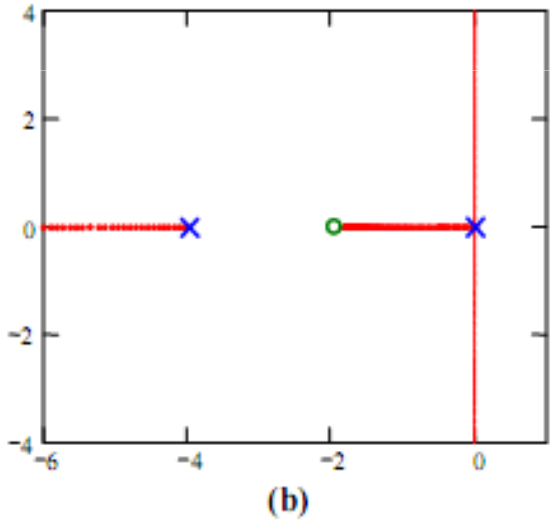
R1= Polos en L.D. = 2, por lo tanto hay 2 ramas.

R2= Los puntos de inicio son los polos de L.D. $s_1=0$ y $s_2=4$

R3=$n_p=2$ $n_z=1$, luego $n_p-n_z=1$ ramas terminan en el infinito.



(a)



(b)

Fig. 5.5 Sistema en L.C. del ejemplo 18., (a) Diagrama (b) L.G.R.

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R. PLEV 2010

Regla Nº6: Simetría del L.G.R.

El diagrama del L.G.R. es siempre simétrico respecto del eje real. Dem.: Los polos complejos siempre aparecen como complejos conjugados. Notar que éstos pueden originarse no sólo cuando l(s) tiene polos complejos.

Regla Nº7: Puntos de salida (llegada) sobre el eje real.

Un punto de salida (llegada) del (al) eje real sucede en un máximo (mínimo) relativo de la ganancia. Éstos se pueden se pueden encontrar resolviendo $\left.\frac{dk}{ds}\right|_{s=\sigma} = 0$

Dem.: En cualquier punto del L.G.R. se tiene que 1 + kgr(s) =0 , lo que se puede asumir como

$1 + k\frac{n(s)}{d(s)} = 0 \; o \; como \; d(s) + k \cdot n(s) = 0$ En el eje real se cumple que s = σ, por lo que

$d(\sigma) + k \cdot n(\sigma) = 0$ .Para un pequeño incremento de k se tiene $d(\sigma) + (k + \Delta k) \cdot n(\sigma) = 0$

$d(\sigma) + k \cdot n(\sigma) + \Delta k \cdot n(\sigma) = 0$ o también $1 + \Delta k \frac{n(\sigma)}{d(\sigma) + k \cdot n(\sigma)} = 0$

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R. PLEV 2010

Si se asume k de manera de estar en el punto de partida (llegada) entonces hay polos múltiples y por lo tanto $d(\sigma)+k\cdot n(\sigma)=0$ se puede escribir como $(\sigma- \sigma_o)^n \psi'(\sigma)$, con n la multiplicidad del polo y σ_o el punto exacto en el eje real del punto de partida (llegada). Por lo tanto se puede escribir,

$$1+\Delta k\frac{n(\sigma)}{(\sigma-\sigma_o)^n\psi'(\sigma)}=0,\ 1+\Delta k\frac{\psi(\sigma)}{\Delta\sigma^n}=0,\ 1+\frac{\Delta k}{\Delta\sigma}\frac{\psi(\sigma)}{\Delta\sigma^{n-1}}=0,\ \frac{\Delta k}{\Delta\sigma}=-\frac{\Delta\sigma^{n-1}}{\psi(\sigma)},$$

Por lo que si $\Delta\sigma\rightarrow 0$, entonces $\Delta k/\Delta\sigma \rightarrow 0$

Ejemplo 19

Determine el punto de partida/ llegada de . $kgr(s) = \dfrac{k}{s(s+4)}$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{d}{ds}\left\{-\frac{1}{gr(s)}\right\} = \frac{d}{ds}\left(-s(s+4)\right) = 0$$

Al tomar,

$$\frac{dk}{d\sigma} = \left.\frac{dk}{ds}\right|_{s=\sigma} = \frac{d}{d\sigma}\left(-\sigma^2 - 4\sigma\right) = -2\sigma - 4 = 0, \text{ entonces, } \sigma = -2$$

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R. PLEV 2010

Regla Nº8: Ángulo de salida (llegada) del (al) eje real.

Las líneas que entran (salen) del (al) L.G.R. están separadas por un ángulo dado por 180º/α en el punto de entrada (salida), donde α es el número de ramas que se cruzan.

Dem.: El número de ramas que se cruzan es siempre múltiplo de dos y además se tiene,

$1+\Delta k\dfrac{n(\sigma)}{d(\sigma)+k\cdot n(\sigma)}=0$ Cerca del polo múltiple en L.C. que es s_o se puede escribir,

$$\Delta k\frac{\psi(s)}{(s-s_o)^n}=-1,\ \Delta k\frac{\psi(s_o+\Delta\sigma+\Delta j\omega)}{(\Delta\sigma+\Delta j\omega)^n}=-1,$$

$$(\Delta\sigma+\Delta j\omega)^n=-\Delta k\cdot\psi(s_o+\Delta\sigma+\Delta j\omega)$$

$$(\Delta\sigma+\Delta j\omega)=\sqrt[n]{-1}\cdot\Delta k\cdot\psi(s_o+\Delta\sigma+\Delta j\omega)$$

De donde $arg(\Delta\sigma+\Delta j\omega)=arg\sqrt[n]{-1}+arg\sqrt[n]{\Delta k\cdot\psi(s_o+\Delta\sigma+\Delta j\omega)}$

El tomar $\Delta\sigma+\Delta j\omega\to 0$ implica que $\Delta k\to 0,$

asi $\lim\limits_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ \Delta\omega\to 0}}\arg(\Delta\sigma+\Delta j\omega)=arg\sqrt[n]{-1}+\lim\limits_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ \Delta\omega\to 0}}arg\sqrt[n]{\Delta k\cdot\psi(s_o+\Delta\sigma+\Delta j\omega)}=arg\sqrt[n]{-1}$

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R. PLEV 2010

Regla Nº8: Ángulo de salida (llegada) del (al) eje real.

Puesto que el argumento de la raíz es siempre positivo, Así para n=2,

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ \Delta\omega\to 0}} \arg\left(\Delta\sigma + \Delta j\omega\right) = arg\left(j\right), arg\left(-j\right) = 90^o, -90^o$$

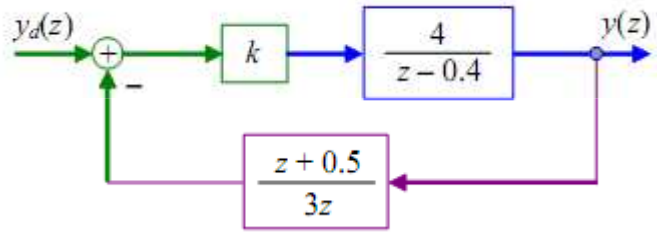
Para n=4

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ \Delta\omega\to 0}} \arg\left(\Delta\sigma + \Delta j\omega\right) = \begin{cases} arg\left(\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2\right) = 45^o \\ arg\left(-\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2\right) = 135^o \\ arg\left(-\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2\right) = 225^o \\ arg\left(\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2\right) = 315^o \end{cases}$$

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R. PLEV 2010

Ejemplo 20

Dibuje el L.G.R. para el diagrama en bloques de la figura a la derecha



$$kgr(z) = k\frac{4}{3}\frac{z+0.5}{z(z-0.4)}$$

R1= Polos en L.D. = 2, por lo tanto hay 2 ramas.

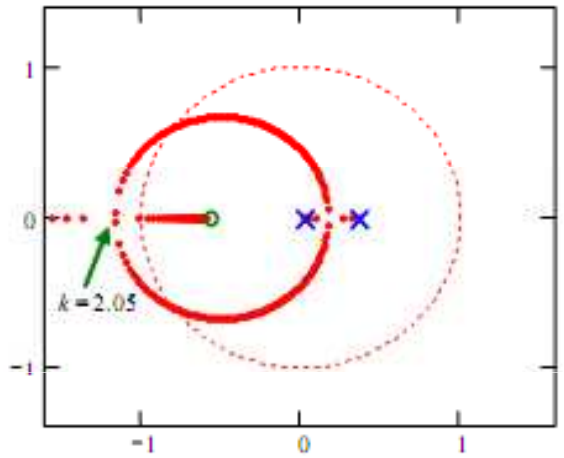
R2= Los puntos de inicio son los polos de L.D. p_1=0 y p_2=0.4

R3=n_p=2 n_z=1, luego n_p-n_z =1 ramas terminan en el infinito. z_1=0.5

R7 $$\frac{d}{d\sigma}\left\{-\frac{1}{gr(z)}\right\}=0,\ \frac{d}{d\sigma}\left\{-\frac{3z(z-0.4)}{4(z+0.5)}\right\}\Bigg|_{z=\sigma} = -\frac{3}{4}\left\{\frac{\sigma^2+\sigma-0.2}{(\sigma+0.5)^2}\right\}=0$$

$$\sigma_1 = -0.5+\sqrt{0.45}\approx 0.171,\ \sigma_2 = -0.5-\sqrt{0.45}\approx 1.171$$

R8: 90º,-90º:



Reglas adicionales para la construcción del L.G.R. PLEV 2010

Regla Nº9: Comportamiento asintótico para valores de k grandes.

El L.G.R. tiende a los ceros en infinito a través de asíntotas centradas en σ_A y con ángulos φ_A. Cuando el número finito de ceros η_z es menor que el número de polos η_p, entonces $\eta_p - \eta_z$ ramas del L.G.R. terminan en ceros en el infinito. Las ramas del L.G.R. viajan en asíntotas cuando $k \to \infty$. Las asíntotas están centradas en un punto en el eje real dado por,

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{localizacion polos} - \sum \text{localizacion ceros}}{n_p - n_z}$$

El ángulo respecto del eje real esta dado por,

$$\phi_A = \frac{2q+1}{n_p - n_z} 180^o, \qquad q = 0,1,2...\left(n_p - n_z - 1\right)$$

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R. PLEV 2010

Regla Nº10: Cruces en el eje imaginario.

Las ramas del L.G.R. cruzan el eje imaginario cuando la ganancia ($k = k_c$) y la frecuencia ($\omega = \omega_c$) cumplen con,

$$Re\left(d\left(j\omega_c\right)\right) + Re\left(k_c n\left(j\omega_c\right)\right) = 0$$
$$Im\left(d\left(j\omega_c\right)\right) + Im\left(k_c n\left(j\omega_c\right)\right) = 0$$

Dem.: $1 + l(s) = 0$. En el cruce $k = k_c$; $s = \sigma_c + j\omega_c = j\omega_c$. Además, $l(s) = kn(s)/d(s)$, entonces,

$$1 + k_c \frac{n\left(j\omega_c\right)}{d\left(j\omega_c\right)} = 0 = d\left(j\omega_c\right) + k_c \cdot n\left(j\omega_c\right)$$

Esta ecuación es una ecuación compleja, por lo tanto, su parte real e imaginaria deben ser idénticamente iguales a cero. Nota: alternativamente, k_c se puede encontrar utilizando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz.

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R. PLEV 2010

Ejemplo 21

Dibuje el L.G.R. del siguiente sistema $kgr(s) = k\dfrac{6}{s(s+1)(s+2)}$

R1= Polos en L.D. = 3, por lo tanto hay 2 ramas.

R2= Los puntos de inicio son los polos de L.D. p_1=0 y p_2=1, p_3=2

R3=n_p=3 n_z=0, luego n_p-n_z =3 ramas terminan en el infinito.

R7

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{-\frac{1}{gr(s)}\right\}=0,\ \frac{d}{d\sigma}\left\{-\frac{\sigma^3+3\sigma^2+2\sigma}{6}\right\}\Bigg|_{z=\sigma}=3\sigma^2+6\sigma+2=0$$

$$\sigma_1=-1+\sqrt{3}/3\approx 0.422,\ \sigma_2=-1-\sqrt{3}/3\approx -1.571$$

R8: 90º,-90º:

R9:

$$\sigma_A=\frac{(0-1-2)-0}{3-0}=-1 \qquad \phi_A=\begin{cases}60^o & q=0\\ 180^o & q=1\\ 300^o & q=2\end{cases}$$

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R.

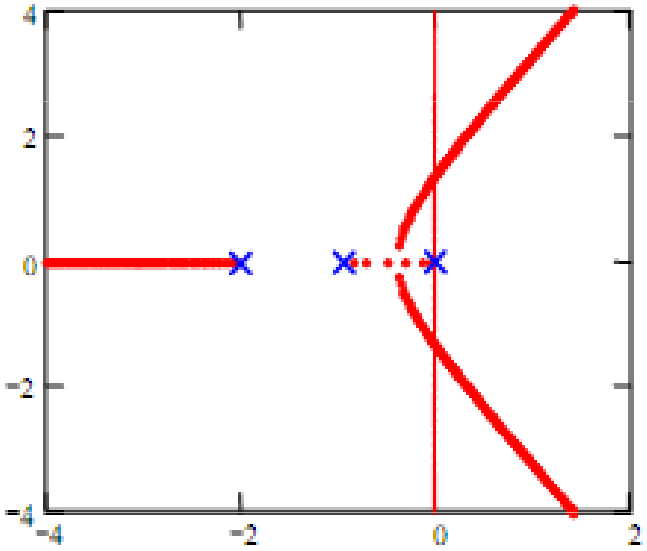
Ejemplo 21

R10

$$Re\left(j\omega_c\left(j\omega_c+1\right)\left(j\omega_c+2\right)\right)+Re\left(6\cdot k_c\right)=0 \qquad 3\omega_c^{\,2}-6\cdot k_c=0$$

$$Im\left(j\omega_c\left(j\omega_c+1\right)\left(j\omega_c+2\right)\right)+Im\left(6\cdot k_c\right)=0 \qquad -\omega_c^{\,3}+2\omega_c^{\,2}=0$$

$$donde\ \omega_c=\pm\sqrt{2}, y\ k_c=1$$



Reglas adicionales para la construcción del L.G.R.

Regla Nº11: Suma de los polos en Lazo Cerrado

Si en la F. de T. en L.D. se cumple que $\eta_p - \eta_z \geq 2$, entonces la suma de los polos de la F. de T. de L.C. permanece constante (independiente de k) y es igual a la suma de los polos de la F. de T. de L.D. Dem.: El polinomio característico de l(s) es:

$$\prod_{j=1}^{n_p}\left(s-p_j\right)=s^{n_p}+a_{n_p-1}\cdot s^{n_p-1}+\ldots+a_{n_p-r}\cdot s^{n_p-r}+\ldots+a_0,\ donde,\ a_{n_p-1}=\sum_{j=1}^{n_p}p_j$$

El polinomio característico de la F. de T. en L.C. es,

$$\prod_{j=1}^{n_p}\left(s+p_j\right)+\prod_{i=1}^{n_z}\left(s+z_i\right)=\prod_{k=1}^{n_p}\left(s+P_k\right)$$

Por lo tanto,

$$s^{n_p}+a_{n_p-1}s^{n_p-1}+\ldots+a_{n_p-r}\cdot s^{n_p-r}+\ldots+a_0+k\left(s^{n_z}+b_{n_z-1}s^{n_z-1}+\ldots+b_0\right)$$

$$=s^{n_p}+b_{n_p-1}s^{n_p-1}+\ldots+d_0$$

En donde,

$$d_{n_p-1}=\sum_{k=1}^{n_p}P_k.\ \text{Si}\ n_z=n_p-r\ y\ n_p-r<n_p-1\Rightarrow n_z<n_p-1\Rightarrow n_z\leq n_p-2\ \text{se tiene,}$$

$$s^{n_p}+a_{n_p-1}s^{n_p-1}+\ldots+\left(a_{n_p-r}+k\right)\cdot s^{n_p-r}+\ldots+a_0+kb_0=s^{n_p}+d_{n_p-1}s^{n_p-1}+\ldots+d_0,$$

$$\text{entonces, } a_{n_p-1}=d_{n_p-1}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n_p}P_k=\sum_{j=1}^{n_p}P_j$$

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R.

Regla Nº12: Ángulos de salida(llegada) de (a) un par de polos (ceros) conjugados

El ángulo de partida de un polo complejo está dado por,

$$\sum angulos\ desde\ los\ ceros - \sum angulos\ desde\ los\ restantes\ polos - 180^o = \theta_p$$

ecuación que corresponde al criterio de ángulo, y el ángulo de llegada por,,

$$\sum angulos\ desde\ los\ polos - \sum angulos\ desde\ los\ restantes\ ceros + 180^o = \theta_c$$

Dem.: 1+l(s)=0

$$arg\left(gr(s)\right) = 180^o = arg\left\{\frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n_p}(s+p_j)}\right\}$$

Sea p_c el polo complejo en donde se desea saber el θ_p.,

$$180^o = arg\left\{\prod_{i=1}^{n_z}(s+z_i)\right\} - arg\left\{(s+p_c)\prod_{j=1}^{n_p}(s+p_j)\right\}$$

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R. PLEV 2010

Regla Nº12: Ángulos de salida(llegada) de (a) un par de polos (ceros) conjugados

En el entorno de p_c, $s=p_c+\Delta\sigma+\Delta j\omega$, se cumple,.,

$$180^o = arg\left\{\prod_{i=1}^{n_z}\left(p_c+\Delta\sigma+j\Delta\omega+z_i\right)\right\} - arg\left(\Delta\sigma+j\Delta\omega\right) - arg\left\{\prod_{j=1}^{n_p-1}\left(p_c+\Delta\sigma+j\Delta\omega+p_j\right)\right\}$$

Entonces el ángulo de partida θ_p =arg ($\Delta\sigma+\Delta\omega$) cuando $\Delta\sigma$ y $\Delta\omega \rightarrow 0$ es,

$$\theta_p = arg\left\{\prod_{i=1}^{n_z}\left(p_c+z_i\right)\right\} - arg\left\{\prod_{j=1}^{n_p-1}\left(p_c+p_j\right)\right\} - 180^o$$

$$\theta_p = \sum angulos\ desde\ los\ ceros - \sum angulos\ desde\ los\ restantes\ polos - 180^o$$

Reglas adicionales para la construcción del L.G.R.

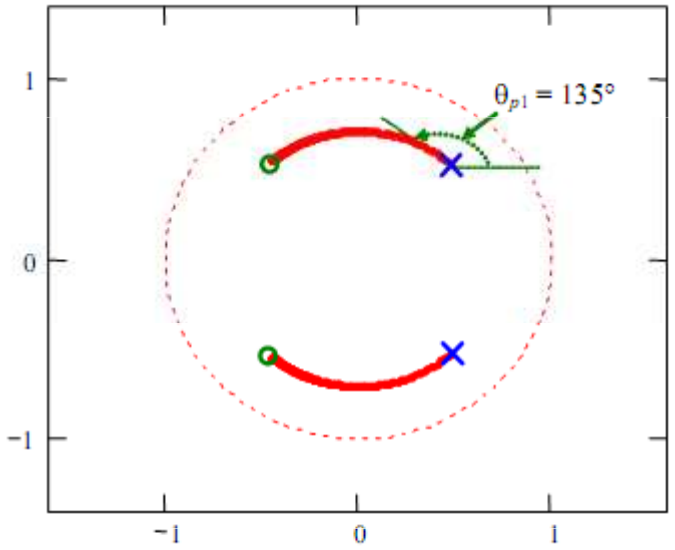
Ejemplo 22

Dibuje el L.G.R. para

$$kgr(z)=\frac{z^2+z+0.5}{z^2-z+0.5}=k\frac{(z+0.5+0.5j)(z+0.5-0.5j)}{(z-0.5+0.5j)(z-0.5-0.5j)}$$

$$\theta_{p1}=0^o+45^o-90^o-180^o=-225^o=135^o$$

$$\theta_{c1}=180^o+135^o-90^o+180^o=405^o=45^o$$



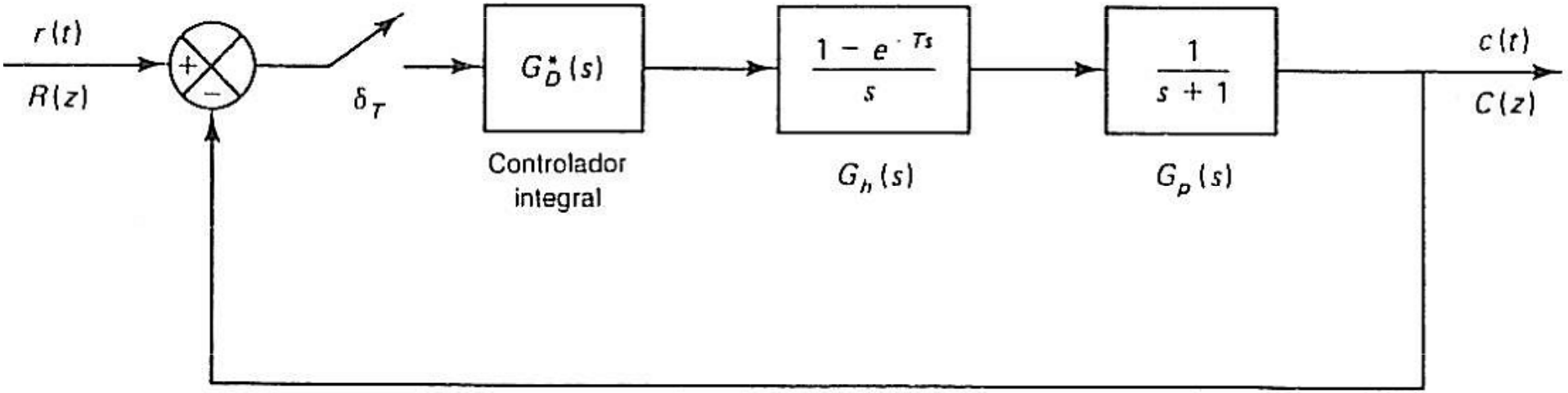
Diagramas del L.G.R. de los Sistemas de Control Digital

Efectos de la Ganancia k y del periodo de muestreo T.

Veamos la figura mostrada en esta ponencia. Supongamos que el controlador digital es del tipo integral.

$$G_D(z) = k\frac{z}{z-1}$$

Dibujemos el L.G.R. para el sistema para tres valores del período de muestreo T: 0.5 seg, 1 seg y 2 seg. También determinemos el valor crítico de K en cada uno de los casos. Y finalmente, localicemos los polos en lazo cerrado correspondientes a K=2 para cada uno de los caso.



Diagramas del L.G.R. de los Sistemas de Control Digital

Efectos de la Ganancia k y del periodo de muestreo T.

Primero obtenemos la transformada z de $G_h(s)G_p(s)$

$$Z\left[G_h(s)G_p(s)\right] = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s+1}\right] = \left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{z-1}{z}Z\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)}\right]$$

$$Z\left[G_h(s)G_p(s)\right] = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

Luego el lazo directo queda dado por...

$$l(z) = k\frac{z}{z-1}\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

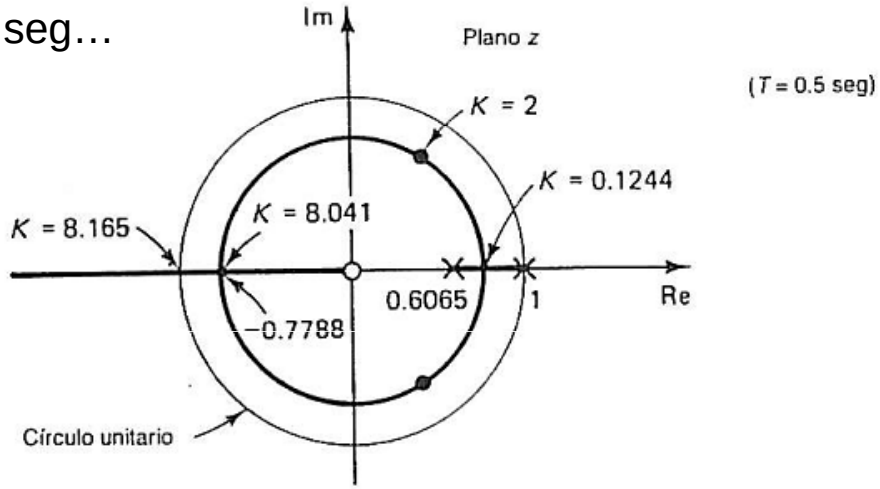
1.-Periodo de Muestreo T=0.5 seg. Para este caso el lazo directo se convierte en…

$$l(z) = k\frac{k\cdot z\cdot 0.3935}{(z-1)(z-0.6065)}$$

Diagramas del L.G.R. de los Sistemas de Control Digital

Efectos de la Ganancia k y del periodo de muestreo T.

El L.G.R. es para T = 0.5 seg…



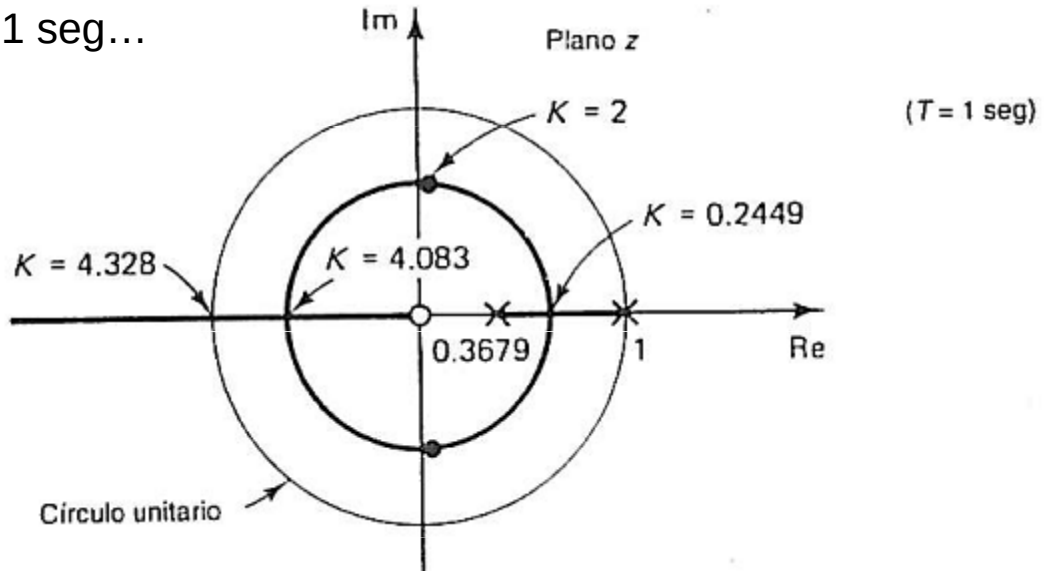
2.-Periodo de Muestreo T=1 seg. Para este caso el lazo directo se convierte en…

$$l(z) = k\frac{k \cdot z \cdot 0.6321}{(z-1)(z-0.3679)}$$

Diagramas del L.G.R. de los Sistemas de Control Digital

Efectos de la Ganancia k y del periodo de muestreo T.

El L.G.R. es para T = 1 seg…



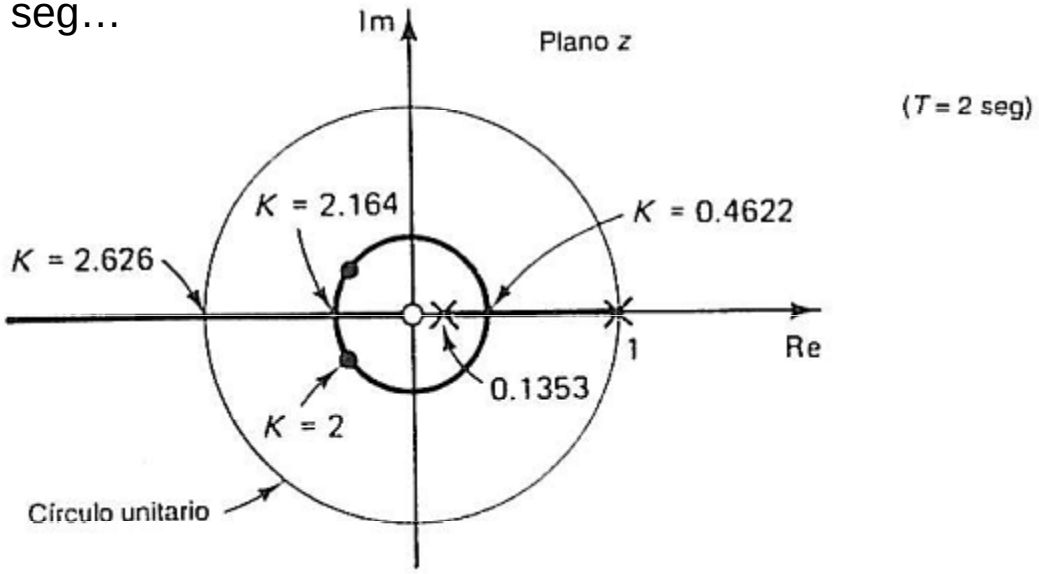
3.-Periodo de Muestreo T=2 seg. Para este caso el lazo directo se convierte en…

$$l(z) = k\frac{k\cdot z\cdot 0.8647}{(z-1)(z-0.1353)}$$

Diagramas del L.G.R. de los Sistemas de Control Digital

Efectos de la Ganancia k y del periodo de muestreo T.

El L.G.R. es para T = 2 seg…



Criterio de Estabilidad de Routh.

El criterio de estabilidad de Routh es un criterio de estabilidad absoluta. Se basa en la determinación del número de raíces de un polinomio que se encuentran en el semiplano derecho del plano S. Para su aplicación deben verificarse dos condiciones:.

Condición Necesaria:

Dada la función de transferencia $\frac{y(s)}{y_d(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_m}$, debe escribirse el denominador de la forma: $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n, con\ a_n \neq 0$ (se eliminan las raíces en el eje imaginario).

Criterio: Si existe algún coeficiente negativo o cero en presencia de algún coeficiente positivo, entonces existen una o más raíces imaginarias puras o con parte real positiva, lo cual implica que el sistema es inestable. En otros términos, para garantizar estabilidad, a partir del primer $a_i \neq 0$ todos los coeficientes deben estar presentes y ser positivos.

Criterio de Estabilidad de Routh.

Condición Suficiente:

Debe aplicarse el algoritmo de formación siguiente: $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n, con\ a_n \neq 0$

$$\begin{array}{c|ccccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ s^2 & e_1 & e_2 & & & \\ s^1 & f_1 & & & & \\ s^0 & g_1 & & & & \end{array}$$

Las primeras filas se obtienen directamente del polinomio característico, el resto de coeficientes se obtienen según las expresiones:

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1};\ b_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1};\ b_3 = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1};\ c_2 = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_3}{b_1};\ c_3 = \frac{b_1 \cdot a_7 - a_1 \cdot b_4}{b_1}$$

Criterio de Estabilidad de Routh.

El criterio de estabilidad de Routh determina que el número de raíces con parte real positiva del polinomio estudiado es igual al número de cambios de signo de la primera columna del algoritmo de formación.

De este modo la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea estable es:

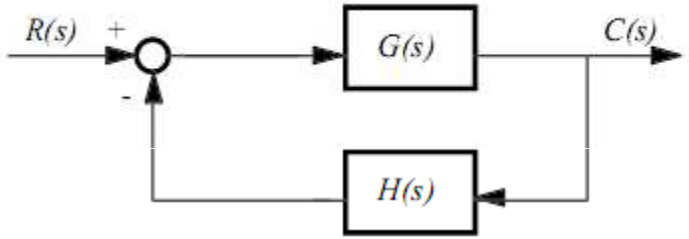
- Todos los coeficientes del polinomio característico deben existir y ser positivos.

- Todos los coeficientes de la primera columna del algoritmo de formación deben de ser positivos.:

Criterio de Estabilidad de Routh.

Ejemplo

El criterio de estabilidad de Routh puede utilizarse para determinar el valor máximo de una ganancia para el cual el sistema alcanza la estabilidad crítica o límite. Supóngase el sistema en lazo cerrado siguiente:



$$G(s) = k\frac{(s+40)}{s(s+10)};\ H(s) = \frac{1}{s+20}$$

Donde la F. de T en L.C. es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = k\frac{s^2+60s+800}{s^3+30s^2+(200+k)s+40k}$$

El rango de valores de ganancia k para el cual el sistema es estable quedará establecido al aplicar el criterio de Estabilidad de Routh sobre el polinomio característico:

$s^3+30s^2+(200+k)s+40k \Rightarrow$ Se verifica la condición necesaria para valores de k positiva

Criterio de Estabilidad de Routh.

Algoritmo

$$s^3 + 30s^2 + (200 + k)s + 40k$$

$$\left\langle \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 200+k \\ s^2 & 30 & 40k \\ s^1 & \dfrac{30\cdot(200+k)-40k}{30} & 0 \\ s^0 & 40k & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\frac{30\cdot(200+k)-40k}{30} > 0 \Rightarrow k < 600$$

$$40k > 0 \Rightarrow k > 0$$

En conclusión, el rango de valores de k para los que permanece el sistema estable es para:

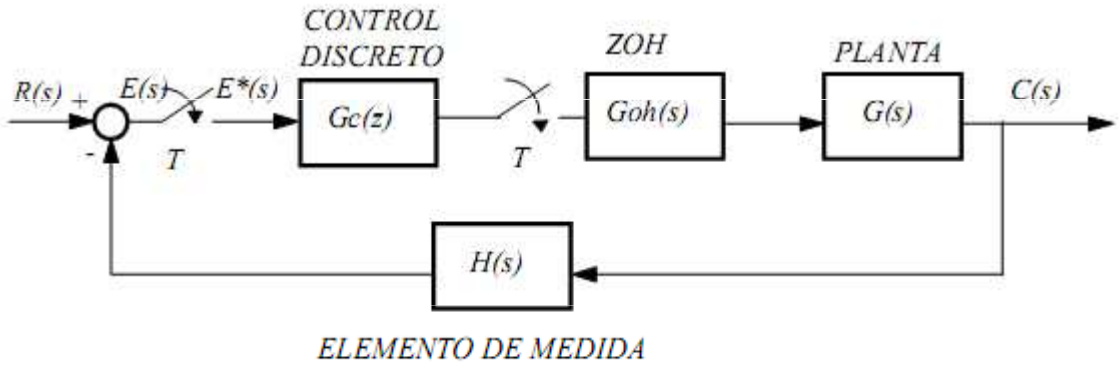
$$0<k<600$$

Criterio de Estabilidad de Routh.

Estabilidad en sistemas de tiempo discreto.

Se puede demostrar que un sistema discreto es estable cuando posee todos los polos de su función de transferencia en el interior del circulo de radio unidad en el plano transformado Z.

La función de transferencia del sistema de control discreto de la figura se puede expresar:



$$G_{LC}(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{Gc(z) \cdot GohG(z)}{1 + Gc(z) \cdot GohGH(z)}$$

donde la ecuación característica del sistema en lazo cerrado $1+G_c(z)G_{oh}GH(z)=0$ no es fácilmente resoluble y deben buscarse métodos transformados para poder determinar la posición de sus raíces.

En este caso, la aplicación directa del criterio de estabilidad de Routh no es útil, porque determina el número de raíces de la ecuación característica que se encuentran en semiplano derecho y no en el exterior del circulo de radio unidad.

Criterio de Estabilidad de Routh.

Sin embargo, sí es posible aplicar el CER tras una transformación que convierta el interior y el exterior del circulo de radio unidad en un semiplano izquierdo y un semiplano derecho respectivamente; a esta transformación se le denomina transformación bilineal.

$$z = \frac{1+R}{1-R}$$

Ejemplo:

Obtenga el L.G.R para la siguiente F. de T en L.D. $l(z) = k\dfrac{(z+0.6)}{z(z-1)}$

Criterio de Estabilidad de Routh.

Ejemplo:

Obtenga el L.G.R para la siguiente F. de T en L.D. $l(z) = k\dfrac{(z+0.6)}{z(z-1)}$

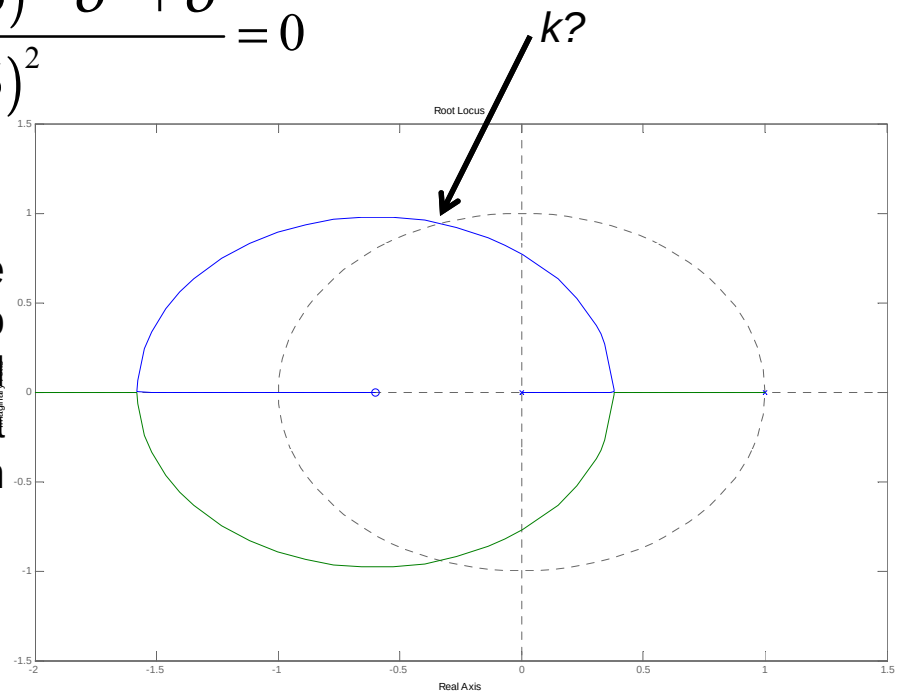
R1: 2 ramas.
R2: p_1=0 y p_2=1
R3: z1=-0.6 n_p-n_z=1 polo al infinito
R7:

$$\left.\frac{dk}{dz}\right|_{z=\sigma}\left\{\frac{z(z-1)}{(z+0.6)}\right\}=0 \Leftrightarrow \frac{(2\sigma+1)(\sigma+0.6)-\sigma^2+\sigma}{(\sigma+0.6)^2}=0$$

$$\sigma_1 = 0.3798,\ \sigma_2 = -1.5798$$

Como se puede apreciar el punto de aterrizaje se encuentra afuera del circulo unitario. Es por esto que se utiliza el CER para sistemas discretos con el fin de determinar el valor de k en el cual el sistema se hace inestable. El CER ocupa la transformación bilineal

$$z = \frac{1+R}{1-R}$$



Criterio de Estabilidad de Routh.

Para aplicar CER hay que obtener la ecuación característica

$$1+l(z)=1+k\frac{(z+0.6)}{z(z-1)}=z^2+(k-1)z+0.6k=0$$

Luego haciendo el reemplazo con la transformación bilineal se obtiene lo siguiente.

$$\left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2+(k-1)\left(\frac{1+R}{1-R}\right)+0.6k=0$$

Desarrollando la expresión anterior se obtiene que,

$$\underbrace{(2.6-k)}_{a_0}R^2+\underbrace{(2-1.2k)}_{a_1}R+\underbrace{0.4k}_{a_2}=0$$

Aplicando el algoritmo de Routh se tiene que,

$$\left\langle\begin{array}{c|cc} R^2 & (2.6-k) & 0.4k \\ R^1 & (2-1.2k) & 0 \\ R^0 & 0.4k & 0 \end{array}\right\rangle \begin{array}{c} 2.6-k>0\Rightarrow k<2.6 \\ \Rightarrow 2-1.2k>0\Rightarrow k<1.67 \\ 0.4k>0\Rightarrow k>0 \end{array}$$

Por lo tanto el sistema es estable para un rango de k dado por 0 < k < 1.67

Criterio de Estabilidad de Routh.

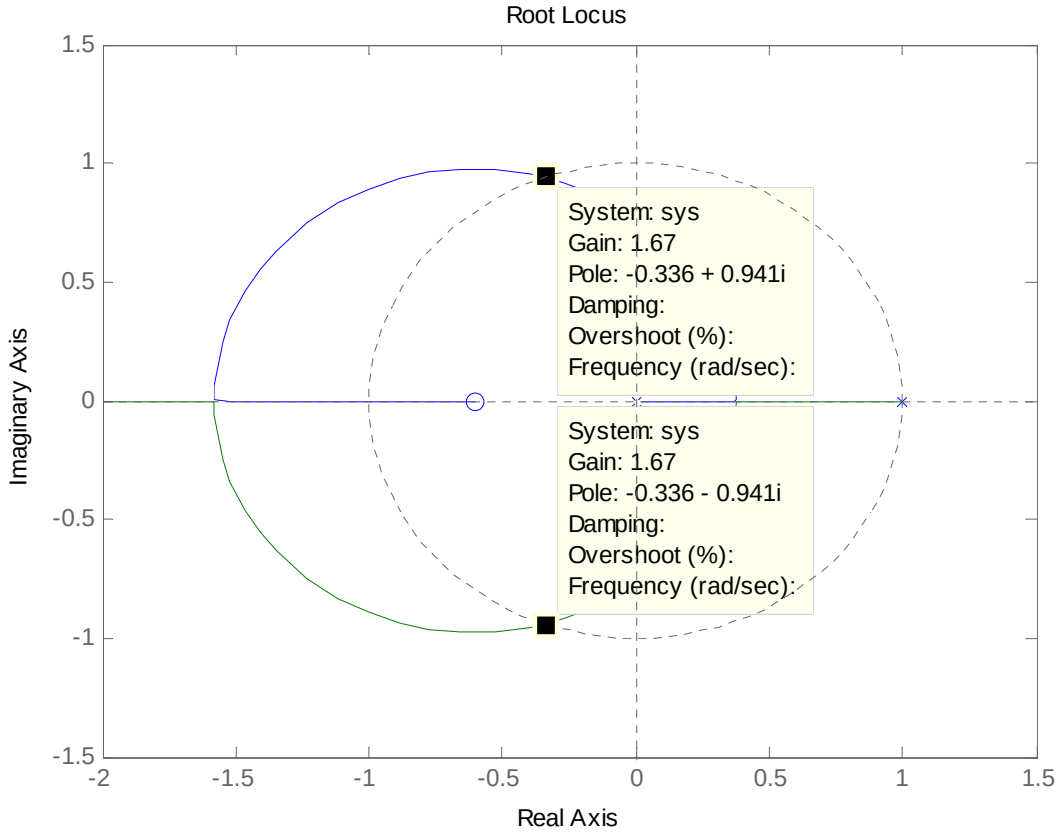
Si reemplazamos el valor de k en la ecuación característica obtendremos el valor de las raíces, para verificar si el resultado es correcto el módulo de la raíz debe ser igual a uno.

$$z^2 + (k-1)z + 0.6k = 0 \;/\; k = 1.67$$

$$z^2 + 0.67z + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = -0.335 \pm j0.9422$$

$$|z_1| = \sqrt{(-0.335) + (0.9422)} = 1$$



Para el análisis de sistemas mediante el L.G.R. se debe generalizar su utilización en donde el parámetro pueda ser distinto de k, incluir k negativos y considerar sistemas con retardos.

A. El L.G.R. con parámetros distintos a k.

Hasta ahora se han estudiado sistemas como el ilustrado en la Fig. 5.3, donde la ecuación característica es de la forma,

$$1 + kgr(s) = 0$$

El estudio se fundamenta en encontrar la ubicación de las raíces (polos) de la F. de T. en L.C. sin tener que solucionar la ecuación 1 + l(s) = 1 + kgr(s) = 0. El problema que persiste es cómo estudiar el caso en que k está definido (k = 5, por ejemplo) y en gr(s) hay un parámetro que puede variar de 0 a infinito o en algún rango. Es decir, se debe estudiar el caso 1 + kgr(α, s) = 0, donde α puede tomar un rango de valores. Este análisis se puede efectuar ordenando la ecuación característica de manera de obtener 1 + αw(s, k) = 0, donde w(s, k) es una nueva función de s (con k dado). Naturalmente, en 1 + αw(s, k) = 0 se pueden aplicar las reglas de construcción del L.G.R. anteriores.

Ejemplo 23

Dibuje el L.G.R. de $1+\dfrac{2}{(s+\alpha)(s+2)(s+3)}=0$ si α varia de 0 a infinito.

$$(s+\alpha)(s+2)(s+3)+2=0$$

$$\left(s^2+(s+2)\alpha+2\alpha\right)(s+3)+2=0$$

$$s^3+(2+\alpha)s^2+2\alpha s+3s^2+3(2+\alpha)s+3\cdot 2\alpha+2=0$$

$$s^3+(5+\alpha)s^2+(5\alpha+6)s+6\alpha+2=0$$

$$\alpha\left(s^2+5s+6\right)+s^3+5s^2+6s+2=0$$

$$1+\alpha\frac{s^2+5s+6}{s^3+5s^2+6s+2}=0,\text{por lo que } w(s)=\frac{s^2+5s+6}{s^3+5s^2+6s+2}$$

$$1+\alpha\frac{(s+2)(s+3)}{\left(s+2+\sqrt{2}\right)\left(s+2-\sqrt{2}\right)(s+1)}=0$$

Ejemplo 23

$$1+\alpha\frac{(s+2)(s+3)}{(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})(s+1)}=0$$

R1= Polos en L.D. = 3, por lo tanto hay 3 ramas.

R2= Los puntos de inicio son los polos de L.D. p_1=-2+√2 y p_2= =-2-√2, p_3=-1

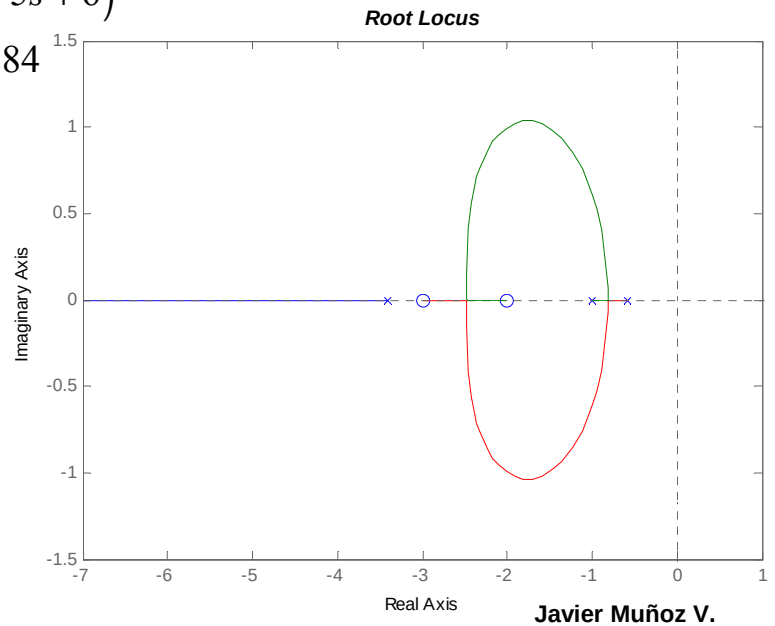
R3=n_p=3 n_z=2, luego n_p-n_z =1 ramas terminan en el infinito.

R7

$$\frac{d\alpha}{d\sigma}=0=\frac{d\alpha}{d\sigma}\left\{-\frac{s^3+5s^2+6s+2}{s^2+5s+6}\right\}\Bigg|_{s=\sigma}=-\frac{(3s^2+10s+6)(s^2+5s+6)-(2s+5)(s^3+5s^2+6s+2)}{(s^2+5s+6)^2}=0$$

$$\sigma_1=-0.812,\ \sigma_2=-2.484,\ \sigma_3=-3.352+j1.284,\ \sigma_4=-3.352-j1.284$$

R8: 90º,-90º:



Otro ejemplo interesante es cuando un parámetro puede variar en torno a un valor promedio o nominal. Este análisis es interesante para conocer la estabilidad del sistema respecto de este parámetro.

Ejemplo 24

Sea $gr(s)=\dfrac{20.7(s+3)}{s(s+2)(s+\beta)}$, donde $\beta=\beta_0+\Delta\beta$ con $\beta_0=8$ .Estudie el sistema para variaciones de Δβ

La ecuación característica es, $1+\dfrac{20.7(s+3)}{s(s+2)(s+8+\Delta\beta)}=0,\ s(s+2)(s+8+\Delta\beta)+20.7(s+3)=0$

$$1+\Delta\beta\frac{s(s+2)}{s^3+10s^2+36.7s+62.1}=0,\ 1+\Delta\beta\frac{s(s+2)}{(s+5.274)(s+2.363\pm j2.488)}=0$$

R1= Polos en L.D. = 3, por lo tanto hay 3 ramas.

R2= Los puntos de inicio son los polos de L.D. p_1=-2.363+j2.488 y p_2= =-2.363-j2.488, p_3=-5.274

R3=n_p=3 n_z=2, luego n_p-n_z =1 ramas terminan en el infinito. z_1=0 y z_2= =-2

Ejemplo 24

R7:

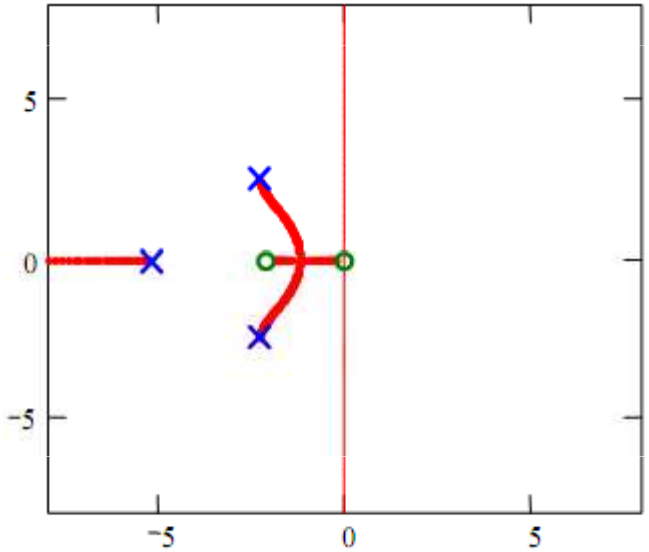
$$\frac{d\Delta\beta}{d\sigma}\left\{\frac{s^3+10s^2+36.7s+62.1}{s(s+2)}\right\}\Bigg|_{s=\sigma}=\frac{\sigma^4+4\sigma^3-16.7\sigma^2-124.2\sigma-124.2}{\sigma^2(\sigma+2)^2}=0$$

$$\sigma_1=-1.256,\ \sigma_2=-5.072,\ \sigma_{3,4}=-3.908\pm j2.056,$$

R12:

$$\theta_{p1}=\theta_{z1}+\theta_{z2}-\theta_{p1}-\theta_{p2}-180^o$$

$$\theta_{p1}=\left\{90^o+tg^{-1}\frac{2.363}{2.488}\right\}+\left\{90^o+tg^{-1}\frac{2.363-2}{2.488}\right\}-tg^{-1}\frac{2.488}{5.274-2.363}-90^o-180^o=-78.7^o$$



B. El L.G.R para k Negativos

La ecuación característica es $1+kgr(s)=0,$ por lo que $gr(s)=-\frac{1}{k},$ como k se asume negativo, entonces, -k es positivo, y por lo tanto, $gr(s)=\frac{1}{-k}=\frac{1}{-k}e^{j2\pi}=\frac{1}{-k}e^{j2\pi n},$ por lo tanto, el módulo y fase pueden ser escritos como,

$$\left|gr(s)\right|=\frac{1}{-k},$$

$$arg\left(gr(s)\right)=2\pi n=0^o,360^o,...$$

Ejemplo 25

Determine si los puntos -2,-8 y 4 pertenecen al L.G.R. de $gr(s)=\frac{1}{s(s+4)}$

La verificación se realiza utilizando el criterio del ángulo. Para s_1=-2,

$$arg\left(gr(s)\Big|_{s=-2}\right)=arg\left\{\frac{1}{-2(-2+4)}\right\}=arg\left\{\frac{1}{-4}\right\}=180^o$$

Por lo tanto s_1=-2 no pertenece al L.G.R.

Ejemplo 25

La verificación se realiza utilizando el criterio del ángulo. Para s_2=-8,

$$arg\left(gr(s)\big|_{s=-8}\right) = arg\left\{\frac{1}{-8(-8+4)}\right\} = arg\left\{\frac{1}{32}\right\} = 0^o$$

Por lo tanto s_2=-8 si pertenece al L.G.R.

Para s_3=4,

$$arg\left(gr(s)\big|_{s=4}\right) = arg\left\{\frac{1}{4(4+4)}\right\} = arg\left\{\frac{1}{32}\right\} = 0^o$$

Por lo tanto s_3=4 si pertenece al L.G.R.

Ganancia para s_3=4 es,

$$arg\left(gr(s)\big|_{s=4}\right) = arg\left\{\frac{1}{4(4+4)}\right\} = arg\left\{\frac{1}{32}\right\} = 0^o$$

$$\left|gr(s)\right\| _{s=4} = \frac{1}{-k_3} = \left|\frac{1}{4(4+4)}\right| \Rightarrow k_3 = -32$$

Las 12 reglas revisadas anteriormente deben modificarse para ser utilizadas en la obtención del L.G.R. con k negativo en forma rápida. Dado que sólo el criterio del ángulo se modifica, se redefinen las reglas que se sustentan en éste. Estas son,

Regla Nº4: Comportamiento a lo largo del eje real s=σ

Hay L.G.R. en los puntos del eje real tal que la suma del número de polos y ceros a la derecha de éstos sea par.

Regla Nº9: Comportamiento asintótico para valores de k grandes.

Los ángulos en este caso están dados por .

$$\phi_A = \frac{q360^o}{n_p - n_z}, \qquad q = 0,1,2...\left(n_p - n_z - 1\right)$$

El origen es el mismo.

Regla Nº12: Ángulos de salida (llegada) de (a) un par de polos (ceros) conjugados.

El ángulo de partida de un polo complejo está dado por,

$$\sum angulos\ desde\ los\ ceros - \sum angulos\ desde\ los\ restantes\ polos = \theta_p$$

ecuación que corresponde al criterio de ángulo, y el ángulo de llegada por,,

$$\sum angulos\ desde\ los\ polos - \sum angulos\ desde\ los\ restantes\ ceros = \theta_c$$

Ejemplo 26

Sea $gr(s)=\dfrac{20.7(s+3)}{s(s+2)(s+\beta)}$, donde $\beta=\beta_0+\Delta\beta$ $con\ \beta_0=8$ .Estudie el sistema para variaciones de Δβ negativas

$$1+\Delta\beta\frac{s(s+2)}{(s+5.274)(s+2.363\pm j2.488)}=0$$

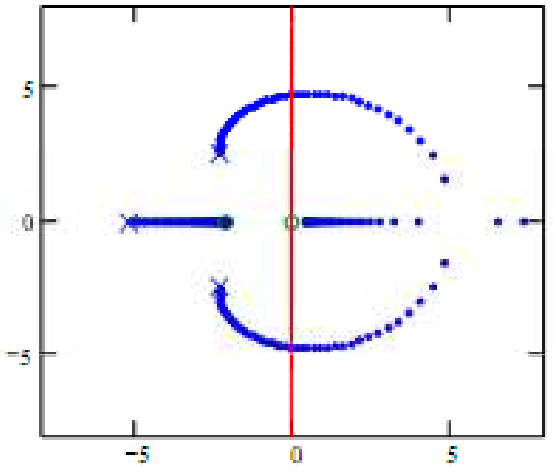
$$\theta_{p1}=\theta_{z1}+\theta_{z2}-\theta_{p1}-\theta_{p2}$$

$$\theta_{p1}=\left\{90^o+tg^{-1}\frac{2.363}{2.488}\right\}+\left\{90^o+tg^{-1}\frac{2.363-2}{2.488}\right\}-tg^{-1}\frac{2.488}{5.274-2.363}-90^o=101.3^o$$

$$\left.\frac{s^2+2s}{s^3+10s^2+36.7s+62.1}\right|_{s=j\omega}=\frac{(j\omega)^2+2j\omega}{(j\omega)^3+10(j\omega)^2+36.7j\omega+62.1}=\frac{-\omega^2+2j\omega}{-j\omega^3-10\omega^2+36.7j\omega+62.1}$$

$$-10\omega^2+62.1-k_c\omega^2=0$$

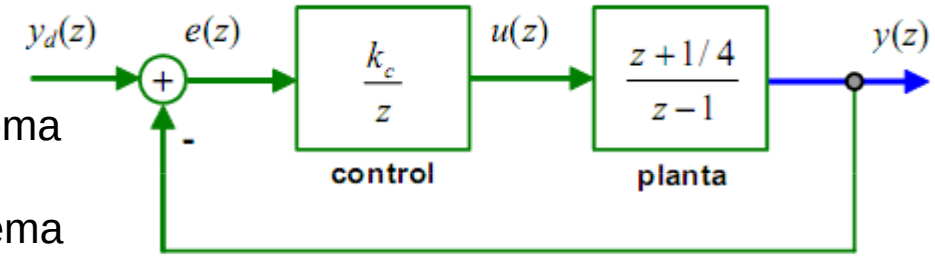
$$-\omega^3+36.7\omega+2k_c\omega=0\Rightarrow k_c=-7.21\Rightarrow\omega=4.71$$



Ejemplo 27

Para el diagrama en bloques de la figura de la derecha se pide:

a) Dibujar el L.G.R. para $k_c > 0$.
b) Dibujar el L.G.R. para $k_c < 0$.
c) El rango exacto de k_c para tener un sistema estable.
d) El rango exacto de k_c para tener un sistema estable oscilatorio.



C. Variación de Parámetros Múltiples (Sintonización)

Otra consideración es el L.G.R. para sistemas en donde dos parámetros pueden variar. En este caso se mantiene un parámetro constante mientras se grafica el L.G.R. en función del otro parámetro. Para obtener los gráficos no existe una técnica especial, sólo se debe dejar la ecuación característica de la forma $1 + k_1 gr(s, k_2) = 0$, de esta manera se grafica el L.G.R. para varios valores de k_2. Por ejemplo, si se tiene la ecuación característica $s^2+sk+a=0$, se puede escribir como,

$$1 + k\frac{s}{s^2 + a} = 0,$$

por lo que para cada valor de a se dibuja el L.G.R.

Ejemplo 27

Sea el controlador P.I. como ilustrado en la Fig. 5.6, dibuje el L.G.R. en función de k y T

La ecuación característica es $1+T\dfrac{6ks}{s(s+1)(s+2)+6k}=0$, con T=0 se tiene el origen de las ramas en función de k que implica $s(s+1)(s+2)+6k=0$ lo que se puede expresar como $1+k\dfrac{6}{s(s+1)(s+2)}=0$, cuyo L.G.R. es el origen de las ramas en función de T. Al aplicar las reglas sobre $1+T\dfrac{6ks}{s(s+1)(s+2)+6k}=0$, se tiene que,

$$R9:\sigma_A=-\frac{(0+1+2)-0}{3-1}=-1.5$$

$$R10:\sum Localizacion\,de\,polos=3 \qquad R12:\theta_p=205^o$$

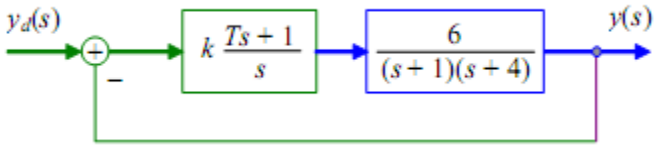
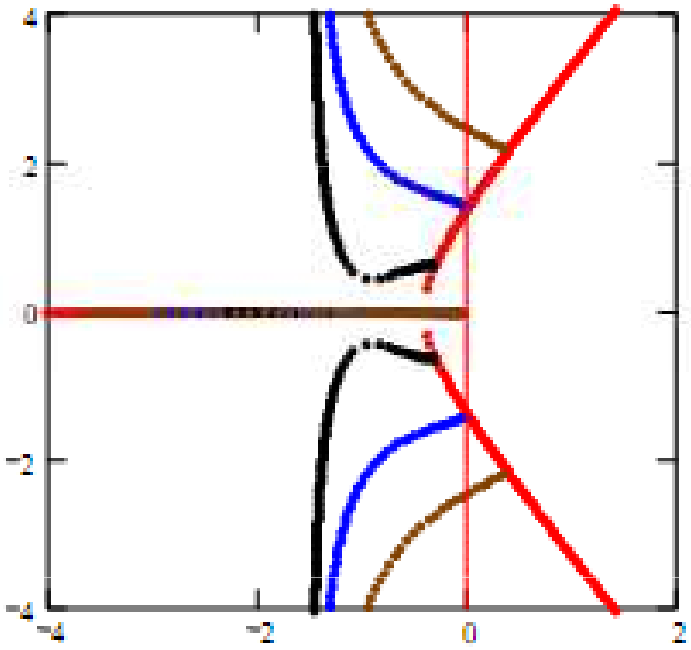


Fig. 5.6. Sistema en L.C. del ejemplo 27



D. Sistemas Continuos en Variables de Estados

Otra consideración es el caso de sistemas y/o controladores que quedan mejor representados por sus ecuaciones de estado (es el caso de controladores de orden > 2). Lo recomendable es obtener un sistema de ecuaciones de estado que represente a todo el sistema en su conjunto.

Este es el caso ilustrado en la Fig. 5.7 en donde se tiene que el modelo de la planta es,

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}\cdot\psi(t) + \mathbf{b}\cdot v(t) + \mathbf{e}\cdot p(t), \qquad y(t) = \mathbf{c}\cdot x(t) + \mathbf{d}\cdot v(t) + \mathbf{f}\cdot p(t) = c\cdot x\left(t\right)$$

el cual asume d = f = 0 (como en la mayoría de los casos). La relación en el actuador es,.

$$\dot{\eta}(t) = A_a\eta(t) + b_a v(t), \qquad u(t) = c_a\eta(t) + d_a v(t)$$

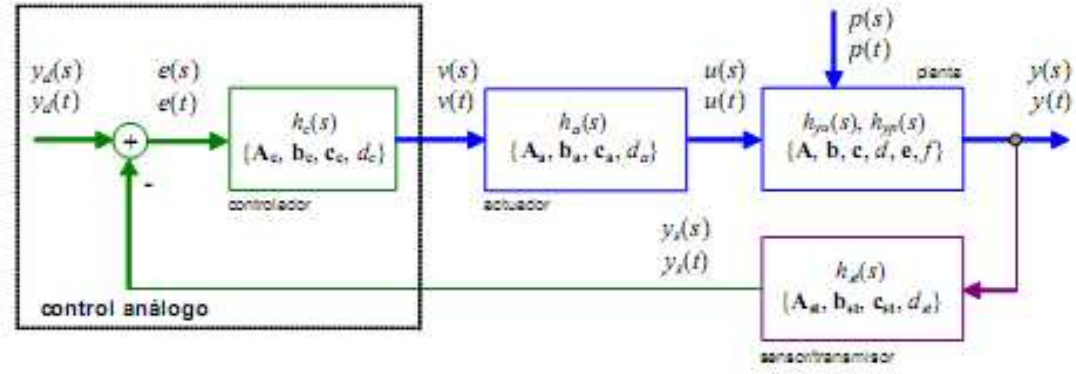


Fig. 5.7. Sistema en L.C continuo representado en sus variables de estado

donde η(t) es el vector de estados asociados al actuador. La relación en el sensor/transmisor se puede escribir como.

$$\dot{\gamma}(t) = A_{st}\gamma(t) + b_{st}y(t), \qquad y_s(t) = c_{st}\gamma(t) + d_{st}y(t)$$

donde γ(t) es el vector de estados asociados al sensor/transmisor. Finalmente, se asume que el controlador es de la forma

$$\dot{\xi}(t) = A_c\gamma(t) + b_c y(t), \qquad v(t) = k_c\left(c_c\xi(t) + d_c e(t)\right)$$

donde k_c es la ganancia sobre la cual se desea obtener el L.G.R.. Luego de algo de algebra se llega a las expresiones generales,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}d_a k_c d_c d_{st}\mathbf{c} & \mathbf{b}\mathbf{c}_a & -\mathbf{b}d_a k_c d_c \mathbf{c}_{st} & \mathbf{b}d_a k_c \mathbf{c}_c \\ -\mathbf{b}_a k_c d_c d_{st}\mathbf{c} & \mathbf{A}_a & -\mathbf{b}_a k_c d_c \mathbf{c}_{st} & \mathbf{b}_a k_c \mathbf{c}_c \\ -\mathbf{b}_c d_{st}\mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_c & -\mathbf{b}_c \mathbf{c}_{st} \\ \mathbf{b}_{st}\mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) \\ \boldsymbol{\zeta}(t) \\ \boldsymbol{\gamma}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}d_a k_c d_c \\ \mathbf{b}_a k_c d_c \\ \mathbf{b}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} y_d(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} p(t),$$

donde la nueva entrada es $y_d(t)$, Fig. 5.7, y la perturbación sigue siendo p(t). Para la salida,

$$y(t) = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \\ \zeta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}$$

Así, otra alternativa, para estudiar la estabilidad del sistema en L.C., es estudiar la ubicación de los valores propios de la matriz,

$$\begin{bmatrix} A - bd_a k_c d_c d_{st} c & bc_a & -b_a d_a k_c d_c c_{st} & b_a d_a k_c c_c \\ -b_a k_c d_c d_{st} c & A_a & -b_a k_c d_c c_{st} & b_a k_c c_c \\ b_c d_{st} c & 0 & A_c & -b_c c_{st} \\ b_{st} c & 0 & 0 & A_{st} \end{bmatrix}$$

Que se puede expresar como,

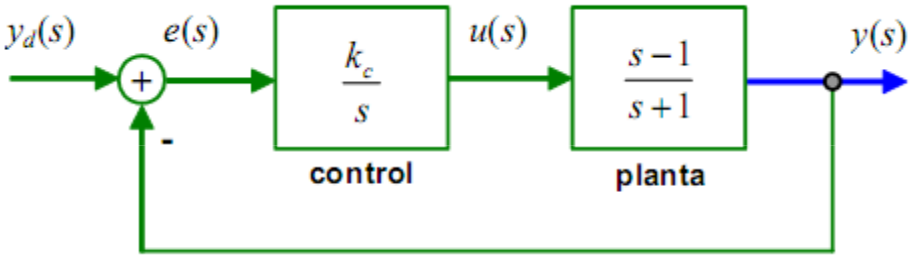
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{bc}_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_a & 0 & 0 \\ -\mathbf{b}_c d_{st}\mathbf{c} & 0 & \mathbf{A}_c & -\mathbf{b}_c\mathbf{c}_{st} \\ \mathbf{b}_{st}\mathbf{c} & 0 & 0 & \mathbf{A}_{st} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{b}d_a \\ \mathbf{b}_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} k_c [d_c d_{st}\mathbf{c} \quad 0 \quad d_c\mathbf{c}_{st} \quad -\mathbf{c}_c],$$

y que es función de k_c. Esto dado que los polos son un subconjunto del conjunto de valores propios de un sistema.

Ejemplo 28

Para el diagrama en bloques de la figura de la derecha se pide:

a) Dibujar el L.G.R. para $k_c > 0$.
b) Dibujar el L.G.R. para $k_c < 0$.
c) El rango exacto de k_c para tener un sistema estable.
d) El rango exacto de k_c para tener un sistema estable oscilatorio.
e) Rango de k_c para tener un sistema estable que se comporte como sistema de 1er orden.
f) Rango de k_c para tener un sistema estable que se comporte como sistema de 2er orden sin sobrepasos.



E. Sistemas Continuos con Retardos.

Nótese que el manejo de sistemas con retardos no es inmediato en sistemas continuos. Si se sume el sistema general de la Fig. 5.3(a), pero ahora se considera, por ejemplo, que la planta tiene un retardo t_r, entonces, la F. de T. en L.C. es,

$$\frac{y(s)}{y_d(s)} = \frac{kg_o(s)e^{-t_r s}}{1 + kg_o(s)r(s)e^{-t_r s}}$$

donde $g_o(s)$ es la F. de T. de la planta sin retardo. La ecuación característica queda,

$$1 + l(s) = 1 + kg_o(s)r(s)e^{-t_r s} = 0$$

Así, los polos en L.C. están dados por las raíces de la ecuación anterior. La ecuación es ciertamente una ecuación trascendental y por tanto las reglas para la construcción del L.G.R. no se aplican. Sin embargo, sigue siendo válido el hecho de que todo punto s en el plano complejo que cumpla con la ecuación anterior, es un polo del sistema en L.C.. La expresión anterior puede ser escrita como,

$$g_o(s)r(s)e^{-t_r s} = -\frac{1}{k} = \frac{1}{k}e^{j\pi} = \frac{1}{k}e^{j(\pi+2\pi n)} = \frac{1}{k}e^{j\pi(1+2n)}$$

Por lo tanto, se debe cumplir que,

$$\left|g_o(s)r(s)e^{-t_r s}\right| = \frac{1}{k} \quad y \; arg\left(g_o(s)r(s)e^{-t_r s}\right) = \pi(1+2n)$$

las cuales son la condición de magnitud y ángulo, respectivamente. En general, un punto en el plano complejo debe cumplir con la condición de ángulo para que corresponda a un polo del sistema en L.C. La ecuación de magnitud puede ser posteriormente utilizada para determinar la ganancia k necesaria para tener el punto en L.C. como polo. No obstante que las reglas del L.G.R. no se aplican y por lo tanto la solución de la ecuación anterior debe realizarse por métodos numéricos; el retardo se puede reemplazar por una aproximación de primer orden (u orden superior si es el caso), por lo que,

$$1 + l(s) = 1 + kg_o(s)r(s)e^{-t_r s} = 1 + kg_o(s)r(s)\frac{e^{-t_r s/2}}{e^{t_r s/2}} \approx 1 + 1 + kg_o(s)r(s)\frac{1 - t_r s/2}{1 + t_r s/2} = 0$$

que es una expresión que admite la aplicación del método del L.G.R.

F. Sistemas Discretos con Retardos.

Si se asume el sistema general de la Fig. 5.3(b), pero ahora se considera, por ejemplo, que la planta tiene un retardo t = lT (con l entero), entonces, la F. de T. en L.C. es,,

$$\frac{y(z)}{y_d(z)} = \frac{kg_o(z)z^{-l}}{1+kg_o(z)r(z)z^{-l}}$$

por lo que la ecuación característica es,

$$1+l(z) = 1+kg_o(z)r(z)e^{-l} = 0$$

Así, los polos en L.C. están dados por las raíces de la ecuación anterior. La ecuación no es una ecuación trascendental y por lo tanto las reglas para la construcción del L.G.R. se aplican directamente. Como era de esperar, el retardo sólo agrega polos en el origen. Es más, se puede visualizar que su presencia hace que el L.G.R. despegue fácilmente del eje real y por consiguiente escapando del círculo unitario haciendo al sistema en L.C. inestable.

Lugar Geométrico de las Raíces

M.Sc. Javier A. Muñoz V.
Ingeniero Civil Electrónico
javiermunoz@udec.cl

Eduardo E. Espinosa N.
Ingeniero Civil Electrónico
eespinosa@udec.cl