Ejercicios Resueltos Electromagnetismo
Parte 1

Diego Andrés Palma Sánchez
dipalma@udec.cl
http://www.udec.cl/~dipalma

Agosto de 2015

1. ¡Cargas!

1.1. Ejercicio 1

Una vara de teflón se frota con piel de conejo hasta que tiene una carga superficial de $-5.0\,\mathrm{nC}$ ¿Cuánto es el exceso de electrones que hay en la vara de teflón?

Solución: Básicamente el exceso de electrones hace que la vara presente una carga superficial, por lo que la suma de las cargas de todos los electrones es equivalente a esta carga, es decir:

$$n_e = \frac{q_{total}}{q_{electron}} = \frac{-5.0 \times 10^{-9}}{-1.6 \times 10^{-19}} = 3.125 \times 10^{10} \tag{1}$$

1.2. Ejercicio 2

Dos partículas con una carga q que se encuentran separadas a una distancia d experimentan una fuerza electrostática resultante de magnitud F. Si la carga de cada partícula se triplica y la distancia entre ellas se triplica, la magnitud de la fuerza electrostática que experimenta cada carga es:

(a) $F/3$

(b) F

(c) $3F$

(d) $9F$

(e) $27F$

Solución: La ley de coulomb permite encontrar F:

$$F = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} = k_e \cdot \frac{q^2}{d^2} \tag{2}$$

Si reemplazamos por los nuevos valores:

$$F = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} = k_e \cdot \frac{9q^2}{(3d)^2} = k_e \cdot \frac{q^2}{d^2} = F \tag{3}$$

Por lo tanto, la alternativa correcta es la (b).

1.3. Ejercicio 3

Dos esferas pequeñas e idénticas se encuentran separadas a una distancia d. Las esferas tienen igual exceso de carga y la magnitud de la fuerza repulsiva que cada una experimenta es igual a F. Si se transfiere la mitad del exceso de carga de una esfera a la otra, la magnitud de la fuerza que experimenta cada esfera es:

(a) $3F$

(b) $\frac{1}{2}F$

(c) F

(d) $\frac{3}{2}F$

(e) $\frac{3}{4}F$

Solución: Utilizando el mismo razonamiento que en el ejercicio 2, se tiene:

$$F = k_e \cdot \frac{\frac{3}{2}q \cdot \frac{1}{2}q}{d^2} = \frac{3}{4}k_e \cdot \frac{q^2}{d^2} = \frac{3}{4}F \tag{4}$$

Por lo tanto, la alternativa correcta es la (e).

1.4. Ejercicio 4

Dos partículas cargadas se encuentran en el eje x como se muestra en la figura 1. La partícula con carga $-4q$ se encuentra en $x = 0$, y la otra partícula con carga $9q$ se encuentra en $x = 4$:

¿En qué posición del eje x podría ponerse una carga de $+2q$ de manera tal que no experimente una fuerza neta?

Solución:

Existen varias posibles soluciones, pero se considerará el caso de $x < 0$. Si enumeramos las cargas como 1, 2, 3 donde q_1 es la carga de $2q$ ubicada en la posición x_d del eje x, q_2 es la carga ubicada en $x = 0$ y q_3 es la carga ubicada en $x = 4$. Se tiene entonces que la fuerza que ejerce q_2 sobre q_1 es:

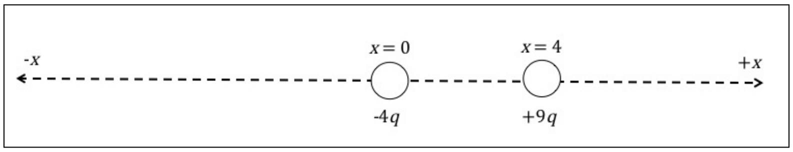

Figura 1: Cargas en el eje x

$$\vec{F}_{21} = k_e \frac{q_1 \cdot q_2}{x_d^2}[\hat{\imath}] \tag{5}$$

Análogamente, la carga q_3 ejerce sobre q_1:

$$\vec{F}_{31} = k_e \frac{q_1 \cdot q_3}{(4 - x_d)^2}[-\hat{\jmath}] \tag{6}$$

Se desea que la fuerza neta sobre q_1 sea 0, es decir:

$$\vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow k_e \frac{q_1 \cdot q_2}{x_d^2} - k_e \frac{q_1 \cdot q_3}{(4 - x_d)^2} = 0 \tag{7}$$

Despejando, se obtiene que $x_d = -8$, por lo que si se ubica la carga $+2q$ en dicha posición, la fuerza neta sobre ella es 0.

1.5. Ejercicio 5

Una partícula con carga $-0.8\mu C$ está ubicada al extremo de un resorte. Cuando se pone otra partícula con carga $+0.6\mu C$ a una distancia de $8.5cm$ de la partícula, ésta baja $3.5cm$ (Luego de que ocurran los transientes y se estabilice el resorte). La distancia que queda entre las dos partículas es de $5cm$, y en la figura 2 se muestra un esbozo de la situación.

¿Cuál es el valor de la constante k_s del resorte, en $\frac{N}{m}$?

Solución:

La partícula que está en el extremo del resorte se encuentra en equilibrio, por lo que la primera ley de Newton enuncia que la fuerza neta sobre ella es 0. Se tiene entonces:

$$\vec{F}_s + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow k_s \cdot x - k_e \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} = 0 \tag{8}$$

Finalmente:

$$k_s = k_e \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2 \cdot x} = \frac{9 \times 10^9 \cdot 0.8 \times 10^{-6} \cdot 0.6 \times 10^{-6}}{(5 \times 10^{-2})^2 \cdot 3.5 \times 10^{-2}} = 49.37[N/m] \tag{9}$$

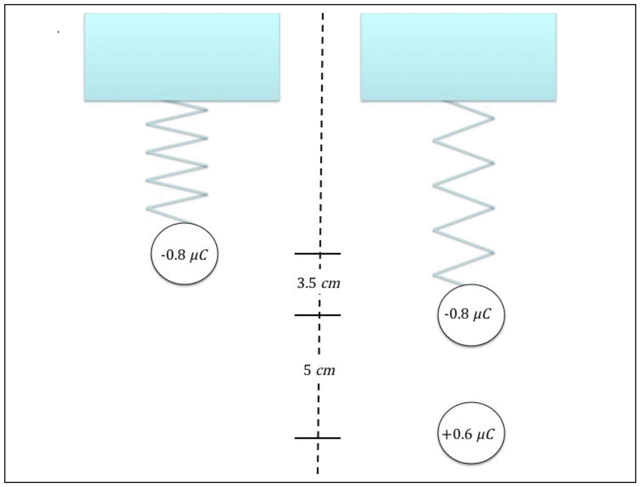

Figura 2: Situación del ejercicio 5

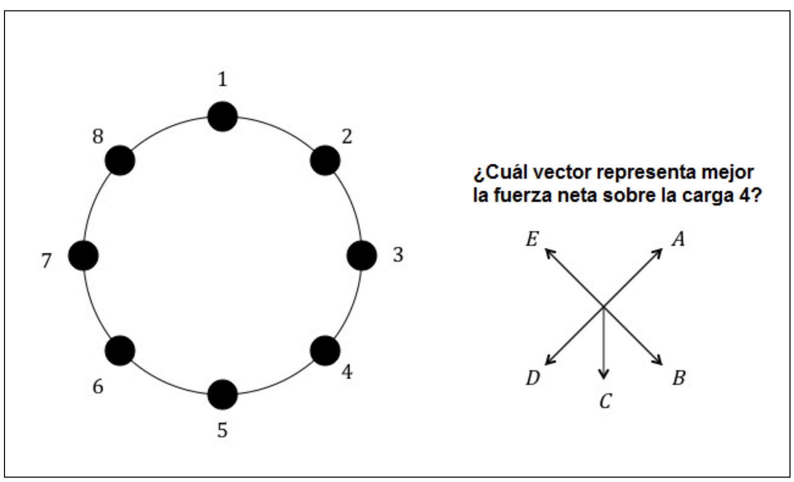

Figura 3: Cargas puestas en círculo.

1.6. Ejercicio 6

Ocho partículas de igual carga forman un círculo como se muestra en la figura 3.

Solución: Las cargas son todas iguales y de la misma polaridad, por lo que experimentarán fuerzas de repulsión. Luego el vector que mejor representa esta situación es el B.

1.7. Ejercicio 7

Se tienen 3 partículas cargadas en el plano cartesiano como se muestra en la figura 4.

- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza (en Newtons) ejercida sobre la partícula blanca?
- ¿Cuál es la dirección de la fuerza sobre la partícula blanca en grados con respecto al eje x? (Considerar sentido antihorario)

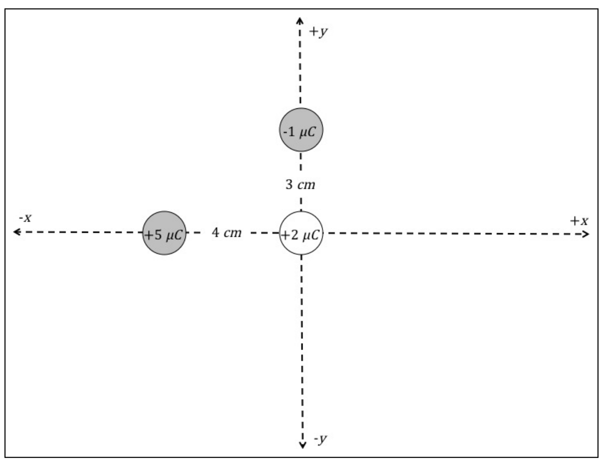

Figura 4: Cargas en el plano.

Solución: Sean $q_1 = 5\mu C$, $q_2 = -1\mu C$ y $q3 = 2\mu C$, se tienen entonces los siguientes vectores de posición $\vec{r}_{31} = (0 + 4 \times 10^{-2})\hat{\imath}$ y $\vec{r}_{23} = (0 + 3 \times 10^{-2})\hat{\jmath}$. Entonces, por ley de coulomb se tiene:

$$\vec{F}_{13} = k_e \frac{q_3 \cdot q_1}{\|\vec{r}_{31}\|^2} \cdot \frac{\vec{r}_{31}}{\|\vec{r}_{31}\|} = \frac{9 \times 10^9 \cdot 5 \times 10^{-6} \cdot 2 \times 10^{-6}}{(4 \times 10^{-2})^2} \cdot \frac{(0 + 4 \times 10^{-2})\hat{\imath}}{4 \times 10^{-2}} \quad (10)$$

Se obtiene $\vec{F}_{13} = 56.25\hat{\imath}[N]$. Análogamente, se puede obtener la fuerza que ejerce la carga q_2 sobre q_3, y se obtiene $\vec{F}_{23} = 20\hat{\jmath}[N]$. Luego, la fuerza neta sobre la carga q_3 está dada por:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}13 + \vec{F}_{23} = 56.25\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}[N]. \tag{11}$$

Para obtener el ángulo θ pedido:

$$\theta = \arctan\left(\frac{20}{56.25}\right) = 19.57^\circ \tag{12}$$

1.8. Ejercicio 8

Dos esferas con carga q y de masa m cuelgan de una cuerda y se encuentran en equilibrio como se muestra en la figura:

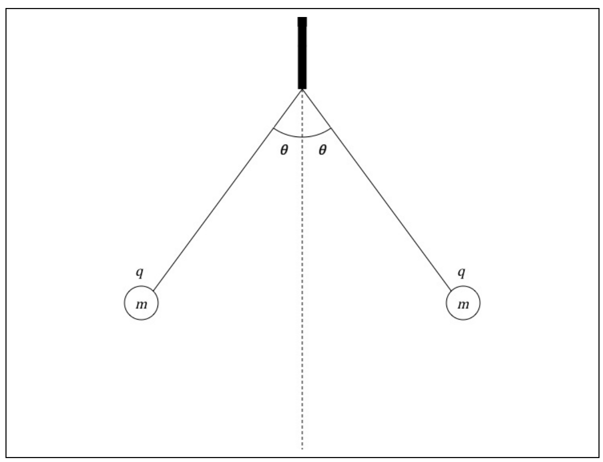

Figura 5: Esferas colgando y en equilibrio.

Encontrar una expresión para $\tan(\theta)$ en términos de k_e, q, m, g (gravedad) y d (la distancia entre las esferas).

Solución: El sistema se encuentra en equilibrio, por lo que la fuerza neta sobre las esferas es 0. Sobre cada esfera actúa la fuerza de gravedad, la fuerza eléctrica de repulsión entre las esferas y la tensión de la cuerda: $\vec{F}_g = m \cdot g[-\hat{\jmath}]$, $\vec{F}_e = k_e \frac{q^2}{d^2}[\hat{\imath}]$. Se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$k_e \cdot \frac{q^2}{d^2} - T\sin(\theta) = 0 \Rightarrow T\sin(\theta) = k_e \cdot \frac{q^2}{d^2} \tag{13}$$

$$T\cos(\theta) - mg = 0 \Rightarrow T\cos(\theta) = mg \tag{14}$$

Finalmente, dividiendo 14 en 13, se obtiene: $\tan(\theta) = k_e \dfrac{q^2}{mgd^2}$

1.9. Ejercicio 9

Ocho cargas (de $50\mu C$ cada una) se ordenan de forma tal que forman un cubo de lado $1cm$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que experimenta cada carga?

Solución:
Sean $q_1, q_2, ..., q_8$, dispuestas como se muestra en la figura 6:

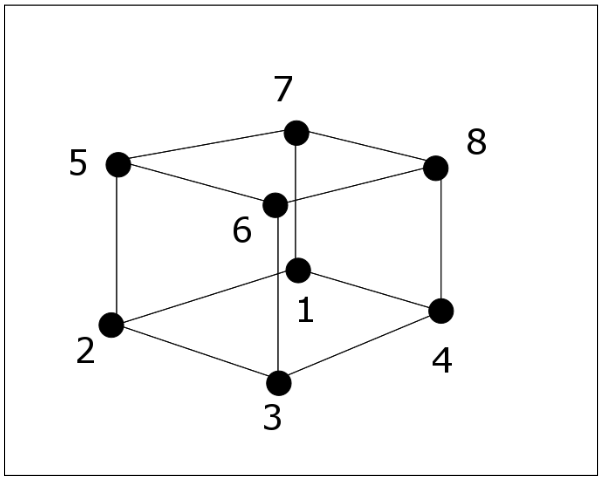

Figura 6: Disposición de las cargas formando un cubo.

Tomando como referencia la carga q_1 y considerando un cubo de lado a, se pueden obtener los siguientes vectores de posición:

$$\vec{r}_{12} = -a\hat{\imath} \tag{15}$$

$$\vec{r}_{13} = -a\hat{\imath} - a\hat{\jmath} \tag{16}$$

$$\vec{r}_{14} = -a\hat{\jmath} \tag{17}$$

$$\vec{r}_{15} = -a\hat{\imath} - a\hat{k} \tag{18}$$

$$\vec{r}_{16} = -a\hat{\imath} - a\hat{\jmath} - a\hat{k} \tag{19}$$

$$\vec{r}_{17} = -a\hat{k} \tag{20}$$

$$\vec{r}_{18} = -a\hat{\jmath} - a\hat{k} \tag{21}$$

Entonces aplicando la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{21} = k_e \frac{q_1 \cdot q_2}{\|\vec{r}_{12}\|^2}(\hat{r_{12}}) = k_e \frac{q_1 \cdot q_2}{\|\vec{r}_{12}\|^3}\vec{r_{12}} \tag{22}$$

Se debe entender que el vector de posición se escogió en dirección a la carga que se quiere encontrar la fuerza. El signo de la carga dará si la fuerza es de atracción o de repulsión (Puede demostrarse fácilmente que las direcciones tendrán sentido dependiendo de la polaridad). La fuerza neta sobre q_1 es:

$$\vec{F_1} = \vec{F_{21}} + \vec{F_{31}} + \vec{F_{41}} + \vec{F_{51}} + \vec{F_{61}} + \vec{F_{71}} + \vec{F_{81}} \tag{23}$$

Reemplazando los valores dados, se obtiene finalmente:

$$\vec{F_1} = -427\,400.29\hat{\imath} - 427\,400.29\hat{\jmath} - 427\,400.29\hat{k} \tag{24}$$

Cuyo módulo:

$$F_1 = 740279.02[N] \tag{25}$$

2. El Campo Eléctrico

2.1. Ejercicio 1

Un anillo circular de radio $10cm$ tiene una distribución de carga de $4C/m$ ¿Cuál es el exceso de electrones en el anillo?

Solución: Primero debemos determinar la carga total en el anillo, al suponer una distribución continua de carga tenemos lo siguiente:

$$dQ = \lambda dx \tag{26}$$

Donde, integrando podemos obtener la carga total (o sumando todas las cargas infinitesimales):

$$Q = \int_0^{2\pi} \lambda dx = \lambda x|_0^{2\pi} = -4 \cdot 2\pi = -2.51[C] \tag{27}$$

Finalmente, podemos obtener el exceso de electrones mediante:

$$N_e = \frac{Q}{-1.6 \times 10^{-19}} = 1.57 \times 10^{19}[electrones] \tag{28}$$

2.2. Ejercicio 2

¿Qué magnitud de campo eléctrico $\vec{E}$ (apuntando hacia arriba) se requeriría para levitar un núcleo de carbono cerca de la superficie de la tierra? Asuma carbono-12 sin electrones, sólo el núcleo.

Solución:

El carbono tiene 6 electrones de valencia (ver tabla periódica), por lo que si no tuviese electrones, tendría un exceso de 6 protones, es decir $q = 6 \cdot 1.6 \times 10^{-19} = 9.6 \times 10^{-19}[C]$. Se requiere además que la sumatoria de las fuerzas sea mayor que 0, de manera que el núcleo pueda levitar. Se tiene entonces:

$$qE - mg > 0 \tag{29}$$

Podríamos hacer una estimación de la masa del núcleo, hay 6 protones y 6 neutrones cuya masa es casi la misma. Luego $m = 12 \cdot 1.67 \times 10^{-27} = 2 \times 10^{-26}[kg]$. Reemplazando en la ecuación anterior, se requeriría un campo eléctrico de módulo $E = 2.04 \times 10^{-7}[N/C]$

2.3. Ejercicio 3

Tres cargas negativas con carga $-q$ están dispuestas en un triángulo equilátero de lado L como se muestra en la figura 7.

- ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en unidades de $k_e q/L^2$ en el centro del triángulo?

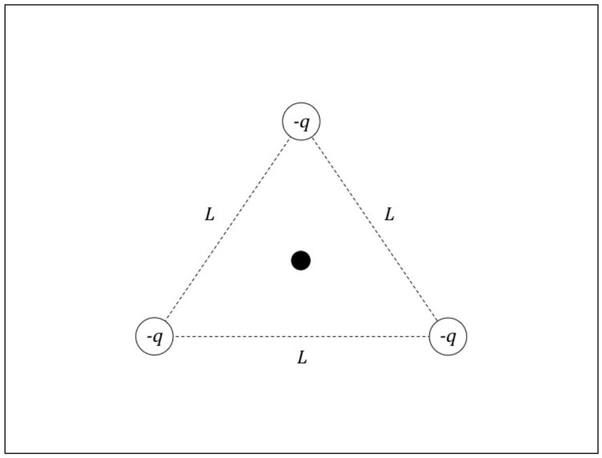

Figura 7: Disposición de las cargas formando un triángulo equilátero.

- Una de las cargas se reemplaza por una carga $+q$ como se muestra en la figura 8 ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en unidades de $k_e q/L^2$ al centro del triángulo?
- ¿Cuál es la dirección del campo Eléctrico?

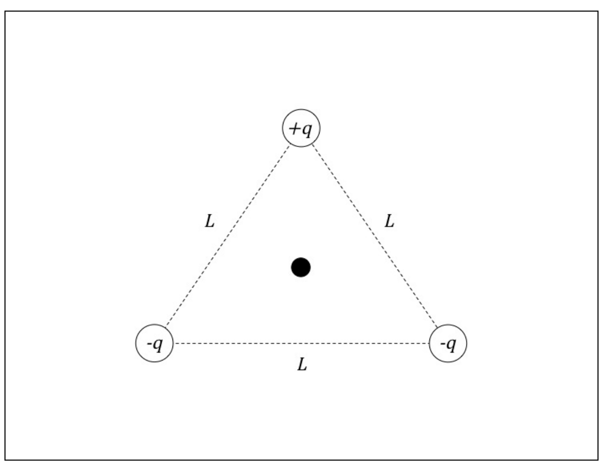

Figura 8: Disposición de las cargas formando un triángulo equilátero.

Para la primera pregunta, es fácil observar que por simetría el campo eléctrico en el centro será nulo. Por lo tanto la respuesta es 0. Para la segunda pregunta, se puede aplicar geometría, y obtener los siguientes campos eléctricos:

$$\vec{E}_1 = k_e \frac{q}{\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)^2} = 3q\frac{k_e}{L^2}(-\hat{\jmath}) \tag{30}$$

$$\vec{E}_2 = 3q\frac{k_e}{L^2}(\cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}) \tag{31}$$

$$\vec{E}_3 = 3q\frac{k_e}{L^2}(-\cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}) \tag{32}$$

Finalmente, el campo eléctrico en el centro $\vec{E}_c$:

$$\vec{E}_c = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 6k_e\frac{q}{L^2}(-\hat{\jmath}) \tag{33}$$

La dirección claramente es hacia abajo.

Obs: El problema pudo haberse resuelto utilizando el principio de superposición.

2.4. Ejercicio 4

Un pentágono regular con lados de longitud $l = 10cm$ y radio $r = 8.5cm$, tiene una carga en cada vértice. Cuatro vértices tienen una carga de $10\mu C$, y el restante tiene carga $-3\mu C$ como se muestra en la figura 9.

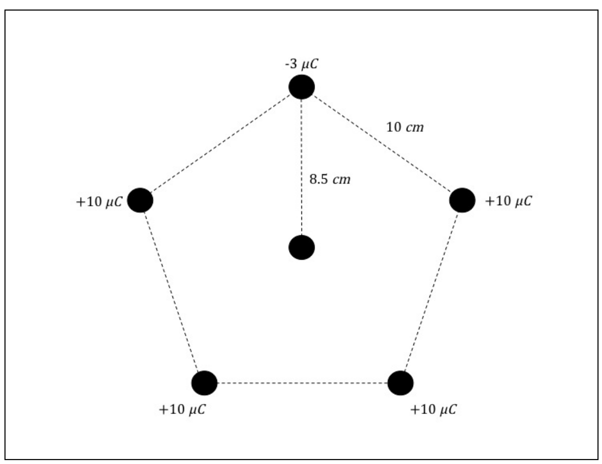

Figura 9: Pentágono de cargas.

¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el centro del pentágono (en N/C)?

Solución:

El problema anterior se resolvió utilizando trigonometría, geometría, ángulos, etc. Por lo que en este problema se procederá a razonar y resolverlo mediante superposición. A la carga de $-3\mu C$, agregamos una carga de $-13\mu C$ y de $+13\mu C$, prácticamente no hemos modificado el problema. Si "mezclamos"la carga de $+13\mu C$ con la de $-3\mu C$ queda un pentágono con un vértice con cargas $10\mu C$ y $-13\mu C$ (es decir, carga neta $-3\mu C$). Luego por superposición, encontramos el campo eléctrico debido a las cargas positivas y negativas. Por simetría, el campo eléctrico debido a las cargas positivas, es 0 (en el centro del pentágono). Y el campo eléctrico restante es:

$$E_c = k_e \frac{q}{d^2} = 9 \times 10^9 \frac{13 \times 10^{-6}}{(8.5 \times 10^{-2})^2} = 1.62 \times 10^7 [N/C] \tag{34}$$

2.5. Ejercicio 5

Una bola de masa m_1 y carga q se encuentra sujeta a una cuerda de masa despreciable y en presencia de un campo eléctrico, $\vec{E}$, cerca de la superficie de la tierra. En equilibrio forma un ángulo de 30° con la vertical. Cuando se reemplaza con una masa m_2 con la misma carga, forma un ángulo de 60° con la vertical cuando se encuentra en equilibrio, tal y como se muestra en la figura 10.

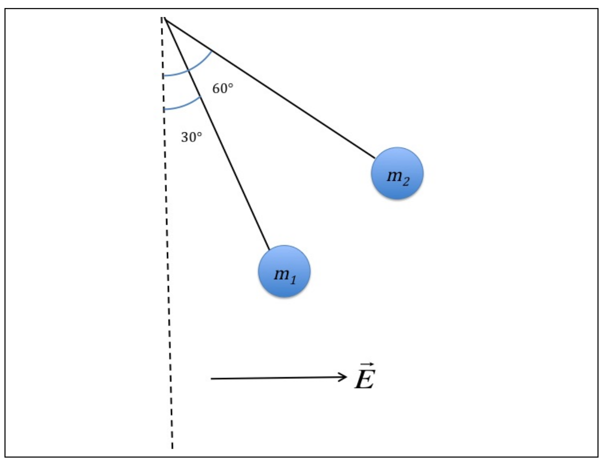

Figura 10: Diagrama del sistema

¿Cuál es el valor de la razón m_1/m_2?

Solución:

Primero debemos dibujar el diagrama de cuerpo libre, que se muestra en la 11:

Consideramos una masa m arbitraria y un ángulo θ arbitrario. Como la masa se encuentra en equilibrio, entonces se debe cumplir la primera ley de Newton:

$$\vec{F}_e + m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \tag{35}$$

Se obtiene:

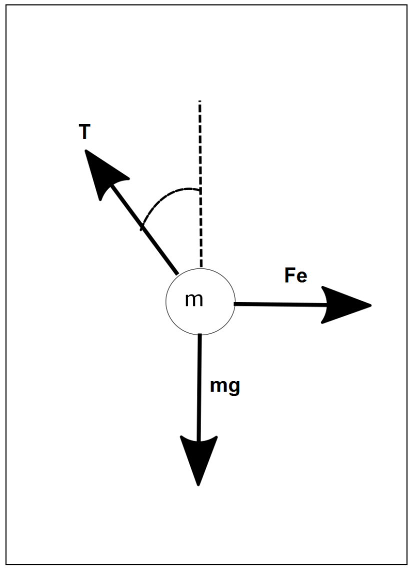

Figura 11: FBD (Free Body Diagram)

$$qE - T\sin(\theta) = 0 \tag{36}$$

$$T\cos(\theta) - mg = 0 \tag{37}$$

Utilizando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$m = \frac{qE}{\tan(\theta)} \tag{38}$$

Utilizando los valores para cada masa, se obtiene:

$$ratio = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{qE}{\tan(30)}}{\frac{qE}{\tan(60)}} = 3 \tag{39}$$

2.6. Ejercicio 6

Dos varas de igual longitud se encuentran separadas a $1m$ como se muestra en la figura 12. Ambas varas tienen una longitud de $1m$. Una tiene una distribución de carga de $\lambda = 3C/m$ y la otra tiene una distribución de $-4C/m$.

¿Cuál es la magnitud y dirección del campo eléctrico en un punto ubicado entre las dos varas, a $0.7m$ de la vara de $3C/m$ y a $0.3m$ de la de $-4C/m$? Exprese el valor en N/C.

Solución:

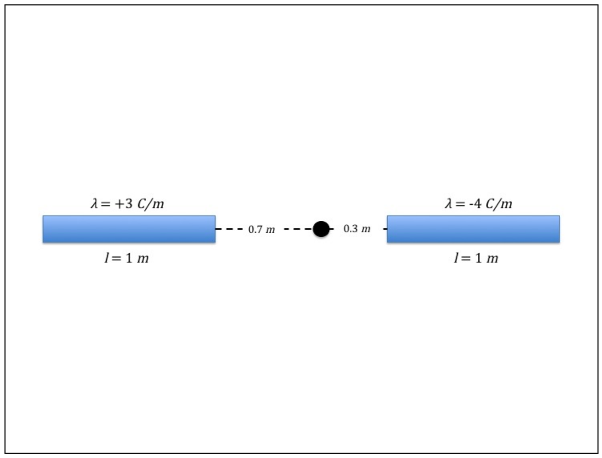

Figura 12: Dos varas

Antes de resolver este problema, procederemos a resolver el mostrado en la figura 13.

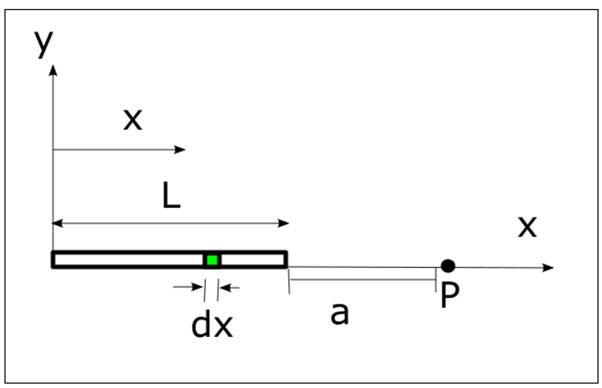

Figura 13: Campo eléctrico generado por una vara, en el eje de la misma

Estamos considerando una vara de largo L, con una densidad lineal de carga λ y se desea encontrar el campo eléctrico en el punto P, a una distancia a de la vara. Asumimos que es una distribución continua de carga, e intentamos buscar el aporte al campo eléctrico que realiza cada elemento infinitesimal. Consideremos una porción dx de la vara, que genera un diferencial de campo eléctrico $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = k_e \frac{dQ}{(a+L-x)^2}(\hat{\imath}) \tag{40}$$

Para calcular el campo eléctrico total, sumamos las contribuciones de cada elemento diferencial de carga:

$$\vec{E} = \int_0^L k_e \frac{dQ}{(a+L-x)^2}(\hat{\imath}) = k_e \int_0^L \frac{\lambda dx}{(a+L-x)^2}(\hat{\imath}) \tag{41}$$

Finalmente, resolvemos:

$$\vec{E} = k_e\lambda \int_0^L \frac{dx}{(a+L-x)^2}(\hat{\imath}) = k_e\lambda \left[\frac{1}{a+L-x}\right]_0^L = \lambda k_e \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L}\right)(\hat{\imath}) \tag{42}$$

Luego, utilizamos este resultado para encontrar el aporte de campo eléctrico de cada vara:

$$\vec{E}_1 = 3k_e \left(\frac{1}{0.7} - \frac{1}{1.7}\right)(\hat{\imath}) \tag{43}$$

$$\vec{E}_2 = 4k_e \left(\frac{1}{0.3} - \frac{1}{1.3}\right)(\hat{\imath}) \tag{44}$$

Finalmente:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 1.15 \times 10^{11}(\hat{\imath})[N/C] \tag{45}$$

2.7. Ejercicio 7

Una vara cargada de longitud $21cm$ y una carga total de $-7.5\mu C$ se dobla para formar tres cuartos de un círculo simétrico respecto al eje x,como se muestra en la figura 14 ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico al centro de este circulo? Exprese su respuesta en N/C ¿Cuál es la dirección de este campo eléctrico?

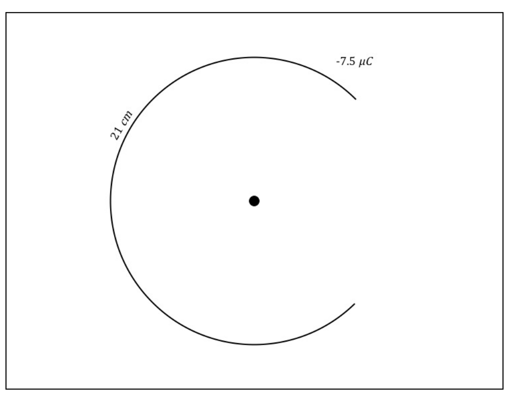

Figura 14: Vara doblada y con carga

Solución

Para resolver este problema, utilizaremos coordenadas cilíndricas. Es claro que el vector de posición en este caso estaría dado por $\vec{r}_p = -\hat{\imath} R \cos(\theta) - \hat{\jmath} R \sin(\theta)$. Además, cada elemento diferencial de carga dQ aporta al campo eléctrico una cantidad $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = k_e \frac{dQ}{R^2}(\hat{r}) = k_e \frac{\lambda R d\theta}{R^2}(-\hat{\imath}\cos(\theta) - \hat{\jmath}\sin(\theta)) \tag{46}$$

Integramos y se obtiene:

$$\vec{E} = k_e \frac{\lambda}{R}\left(\sqrt{2} k_e \frac{\lambda}{R}\right)(-\hat{\imath}) \tag{47}$$

$$\vec{E} = -k_e \frac{\lambda}{R}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{7\frac{pi}{4}} (\hat{\imath}\cos(\theta) + \hat{\jmath}\sin(\theta))\right) = \sqrt{2} k_e \frac{\lambda}{R}(-\hat{\imath}) \tag{48}$$

Se sabe además que $\lambda = Q/L$ y que $3/4 \cdot 2\pi R = 21cm$, finalmente reemplazando, se obtiene que $\vec{E} = 10.19 \times 10^6(-\hat{\imath})[N/C]$.

2.8. Ejercicio 8

Un disco de radio R tiene una distribución de carga superficial σ. ¿Cuál es el valor del campo eléctrico en N/C en un punto P, ubicado a una distancia x del centro del disco?

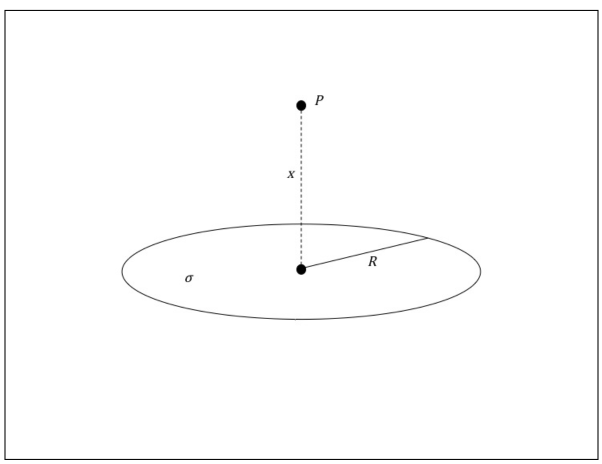

Figura 15: Disco cargado

Solución:

Hay varias formas de resolver este ejercicio, se puede proceder "de forma seguraütilizando los vectores de posición (sale más largo), o bien se puede aprovechar la simetría del sistema. Es fácil notar que las componentes en el eje z y en el eje y del campo eléctrico se cancelarán por simetría. Tenemos además un elemento diferencial de carga $dQ = \sigma dA$. Para hacer la vida más simple, se utilizarán coordenadas polares, quedando entonces $dQ = \sigma r dr d\theta$. El aporte en campo eléctrico de cada carga infinitesimal está dado por:

$$d\vec{E} = k_e \sigma \frac{r}{r^2 + x^2} dr d\theta \cos(\theta) \hat{\imath} \tag{49}$$

Reemplazando el coseno, queda:

$$d\vec{E} = k_e \sigma \frac{rx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr d\theta \hat{\imath} \tag{50}$$

Para encontrar el campo eléctrico total, integramos:

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} \int_0^R k_e \sigma \frac{rx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr d\theta \hat{\imath} = -2\pi\sigma x k_e \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right]_0^R \hat{\imath} \tag{51}$$

Finalmente, y considerando $x > 0$:

$$\vec{E} = 2\pi\sigma k_e \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \hat{\imath} \tag{52}$$

2.9. Ejercicio 9

Una esfera pequeña de masa m y carga $+q$ inicialmente en reposo, comienza a caer debido a la gravedad hacia un plano con carga superficial σ como se muestra en la figura 16 ¿Cuál será la velocidad de la esfera cuando choque con el plano? Notar que el campo eléctrico sobre un plano infinito es constante en todo el espacio y apunta hacia afuera del plano (si éste está cargado positivamente), el valor de este campo es $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

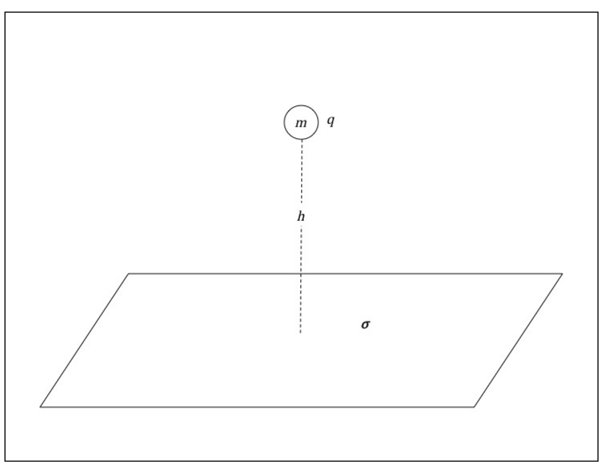

Figura 16: Plano infinito y esfera

Solución:

La esfera comenzará a acelerar, pero debido a que todas las fuerzas son constantes, esta aceleración también lo será. De aquí, se pueden usar las ecuaciones de cinemática y movimiento acelerado:

$$v_f = v_i + at \tag{53}$$

$$xf = xi + v_i t + 0.5at^2 \tag{54}$$

Combinando ambas ecuaciones, es decir despejando t en 53 y reemplazándolo en 54, se obtiene:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad \tag{55}$$

Utilizando la segunda ley de Newton, se tiene que para la esfera:

$$mg - Fe = ma \Rightarrow a = g - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m} \tag{56}$$

Como la velocidad inicial era 0, y reemplazando en 55, se obtiene finalmente:

$$v_f = \sqrt{2h\left(g - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m}\right)} \tag{57}$$

2.10. Ejercicio 10

Dos varas de teflón idénticas de largo $10cm$ se frotan con piel, de manera tal que cada una de ellas tiene una carga negativa de $20\mu C$ que se distribuye uniformemente en sus longitudes. Se disponen como se muestra en la figura 17:

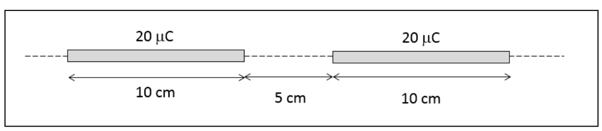

Figura 17: Disposición de varas de teflón

¿Cuál es la magnitud de la fuerza electrostática en cada vara?

Solución:

Anteriormente obtuvimos el campo eléctrico generado por una vara en un punto de su mismo eje. Consideremos el campo eléctrico $\vec{E}$.

$$\vec{E} = \lambda k_e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{L+x}\right)(-\hat{\imath}) \tag{58}$$

Entonces, cada elemento dQ de la otra vara, percibe una fuerza dF la cual está dada por:

$$d\vec{F} = \vec{E}dQ = \lambda k_e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{L+x} \right) \lambda dx(\hat{\imath}) \tag{59}$$

Para obtener la fuerza electrostática total, simplemente hay que sumar todas las fuerzas infinitesimales:

$$\vec{F} = \lambda^2 k_e \left(\int_a^b \frac{dx}{x} - \int_a^b \frac{dx}{L+x} \right) (\hat{\imath}) = \lambda^2 k_e \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) - \ln\left(\frac{L+b}{L+a}\right) \right] (\hat{\imath}) \tag{60}$$

Finalmente, simplificando:

$$\vec{F} = \lambda^2 k_e \ln\left(\frac{b}{L+b} \frac{L+a}{a} \right) (\hat{\imath}) = 211.6[N](\hat{\imath}) \tag{61}$$

Donde $a = 0.05m$, $b = 0.15m$, $L = 0.1m$, $\lambda = 2 \times 10^{-4}[C/m]$.

3. Ley de Gauss

3.1. Ejercicio 1

Una gran carga Q se encuentra dentro de un cubo. Está rodeada de 6 cargas más pequeñas q, cada una dentro del cubo y en una dirección perpendicular a las caras del cubo como se muestra en la figura 18

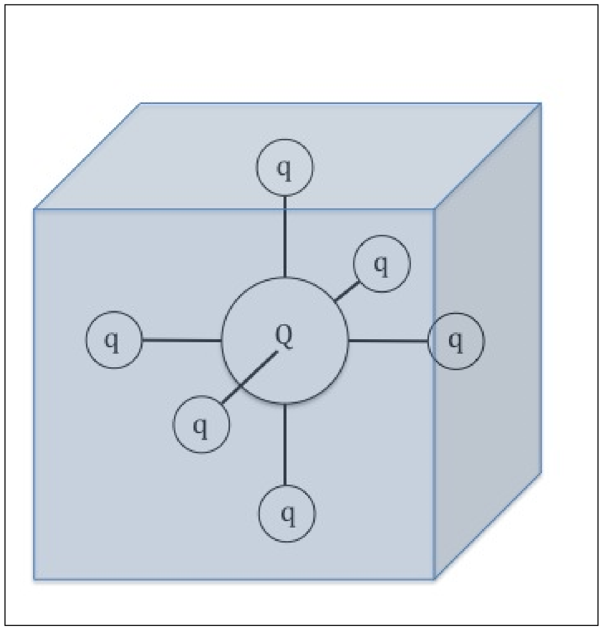

Figura 18: Cargas dentro del cubo

¿Cuál es el valor del flujo eléctrico a través de una de las caras del cubo?

Solución:

Hay que tener clara la ley de Gauss para poder resolver este problema. El cubo es una superficie cerrada, por lo que el flujo eléctrico a través de esta superficie, por ley de Gauss está dado por:

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{Q + 6q}{\varepsilon_0} \tag{62}$$

Considerando la simetría del sistema, se puede decir que el flujo se reparte en partes iguales a través de las caras del cubo, por lo que finalmente:

$$\Phi_{Ecara} = \frac{Q + 6q}{6\varepsilon_0} \tag{63}$$

3.2. Ejercicio 2

Un cascaron esférico de radio $r = 14cm$ tiene una carga de $32\mu C$ uniformemente distribuida, como se muestra en la figura 19. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en un punto dentro de la esfera, a $10cm$ del centro? En [N/C] ¿Y en un punto fuera de la esfera, a $20cm$ del centro?

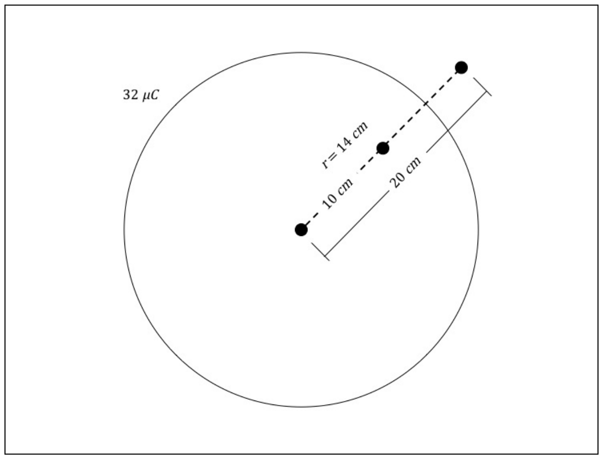

Figura 19: Cascarón Esférico

Solución:
Consideremos una esfera como superficie Gaussiana. En el primer caso, aplicamos la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oiint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \tag{64}$$

Sin embargo, la superficie Gaussiana que suponemos, no encierra ninguna carga y en consecuencia el campo eléctrico es 0 en dicha región. Para el segundo caso, podemos aplicar la misma fórmula. Como el campo eléctrico es uniforme y no varía en el área escogida, la integral puede resolverse fácilmente:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = 7.19 \times 10^6 \tag{65}$$

3.3. Ejercicio 3

Un cilindro hueco de largo infinito y radio $5cm$ tiene una densidad de carga de $30nC/m$ como se muestra en la figura 20 ¿Cuál es el campo eléctrico en N/C en un punto aleado $3cm$ desde el eje del cilindro? ¿A $10cm$? ¿A $1m$?

Consideraremos una superficie Gaussiana cilíndrica. Claramente no hay carga encerrada a $3cm$ desde el centro, por lo que la ley de Gauss nos dice que el

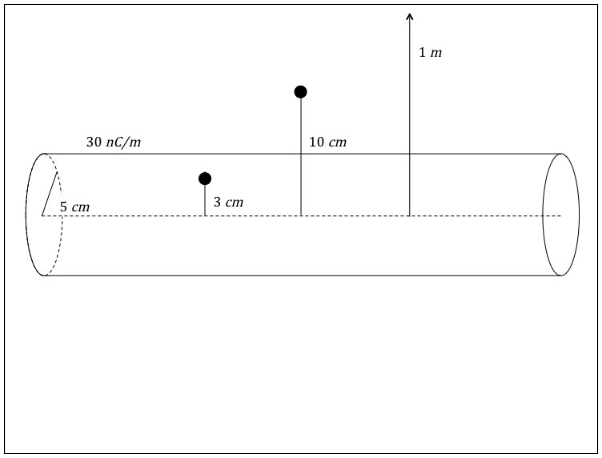

Figura 20: Cilindro hueco

campo eléctrico será 0 en esta región. A $10cm$ y a $1m$ la situación es prácticamente la misma, aplicando la ley de Gauss:

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \tag{66}$$

Reemplazando con los valores respectivos, se encuentra que a $10cm, E = 5.39 \times 10^3 N/C$ y a $1m, E = 539.26N/C$.

3.4. Ejercicio 4

Un cascarón esférico con densidad de carga superficial σ tiene un corte circular como se muestra en la figura 21.

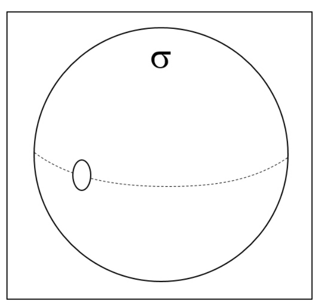

Figura 21: Cascarón esférico con agujero

¿Cuál es el valor del campo eléctrico a un radio fuera de la esfera, directamente sobre el centro del agujero circular. PISTA: El agujero es lo suficientemente pequeño que puede tratarse como si fuese plano, y el punto en el cual se pide calcular el campo, está tan cercano, que este plano puede considerarse como infinito.

Solución: Para este problema es necesario utilizar superposición. La esfera con el agujero cortado puede verse como una esfera completa con densidad de carga σ superpuesta con un pequeño circulo de carga superficial $-\sigma$. Aplicando la ley de Gauss:

$$\oiint_A \vec{E}_{esfera} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{encerrada}}{A\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{67}$$

Ahora debemos encontrar el campo producido por el disco de densidad de carga $-\sigma$ a una pequeña distancia de la superficie, nuevamente aplicamos Gauss (utilizamos un cilindro como superficie Gaussiana).

$$\oiint_A \vec{E}_{disco} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{encerrada}}{2A\varepsilon_0} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{68}$$

Finalmente, para obtener el campo eléctrico total, superponemos los dos campos eléctricos:

$$\vec{E} = \vec{E}_{esfera} + \vec{E}_{disco} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{69}$$

3.5. Ejercicio 5

Considere una esfera aislante con una carga de $10\mu C$ uniformemente distribuida a través de su volumen. La esfera es rodeada por un cascarón esférico conductor que tiene una carga total de $-3\mu C$. Fuera la esfera aisladora, hay un cascarón esférico aislador que tiene una carga de $20\mu C$ distribuida uniformemente en su volumen. En la figura 22 se muestra el área transversal de la estructura, donde las zonas más oscuras son los aisladores y la zona más clara es el conductor.

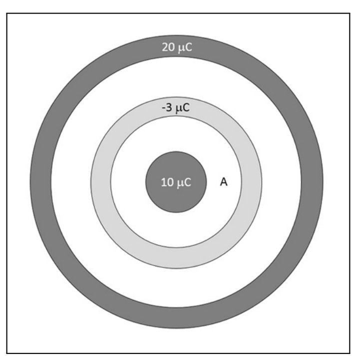

Figura 22: Estructura conductor-aislador

¿Cuánta carga hay en la superficie externa del cascarón conductor? (en Coulombs).

Solución:

Hay que tener conocimiento que dentro de un conductor el campo eléctrico es 0, debido a que las cargas se acomodan de manera tal en la superficie, que el campo eléctrico interno se anula (en régimen electrostático por supuesto). En la superficie interna del cascarón conductor, entonces se induce una carga total de $-10\mu C$, esto a su vez, produce que en la superficie externa del cascarón conductor se induzcan $10\mu C$. Como la carga neta inicial del cascarón era $-3\mu C$, finalmente en la superficie hay una carga total de $7 \times 10^{-6} C$.

3.6. Ejercicio 6

Una lámina infinita planar se encuentra en el plano x-y. Tiene un grosor de $10cm$ y una densidad de carga volumétrica $\rho = 0.005z^2$, donde la constante 0.005 tiene unidades de medida C/m^5 y $z = 0$ en el centro de esta lámina ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en N/C a $z = 2cm$, dentro de la lámina?

Solución:

Tomemos un corte frontal de la lámina, el cual se muestra en la figura 23.

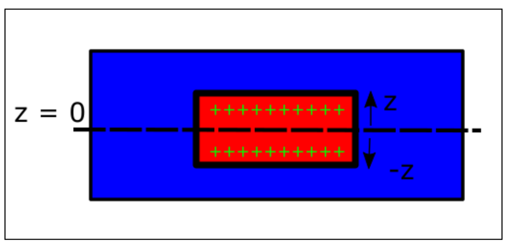

Figura 23: Vista frontal de la lámina

El área roja representa una superficie Gaussiana cilíndrica, centrada en $z = 0$ y de un largo $2z'$. La carga encerrada por esta superficie gaussiana es:

$$Q_{enc} = \int_{-z}^{z} 0.005 z'^2 dz' = \left[\frac{0.005}{3} z^3 \right]_{-z}^{z} = \frac{0.01}{3} z^3 \tag{70}$$

Luego aplicamos la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico en función de z. La integral de superficie cerrada queda como una suma de 3 integrales, correspondiendo a las 2 tapas del cilindro y al cuerpo del cilindro. Como la superficie del lado del cilindro es perpendicular al campo eléctrico, entonces esta integral da 0 (producto punto).

$$\int_{fondo} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{arriba} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{lados} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\frac{0.01}{3} z^3 A}{\varepsilon_0} \tag{71}$$

Luego:

$$E(z) = \frac{0.005}{3}\frac{z^3}{\varepsilon_0} \tag{72}$$

Evaluando en $z = 2cm$ se obtiene $E = 1.51 \times 10^3 [N/C]$.

4. El Potencial Eléctrico

4.1. Ejercicio 1

Se libera un proton en reposo desde el origen de un campo eléctrico positivo en dirección de x con una magnitud de $850N/C$ ¿Cuál es el cambio en la energía potencial del sistema campo-protón cuando el proton llega a $x = 2.50m$?

Solución:

Sabemos que el cambio en la energía potencial está dado por:

$$\Delta u_{A\to B} = -\int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{s} = -qE\int_0^{2.5} dx = -qE\left[x\right]_0^{2.5} = -3.40\times 10^{-16} \quad (73)$$

4.2. Ejercicio 2

El potencial eléctrico en $x = 5.00m$ e $y = 3.00m$ es $120V$ y el potencial eléctrico en $x = 7.50m$ e $y = 8.00m$ es $180V$. El campo eléctrico es entre los dos puntos y es uniforme ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en N/C en esta zona?

Solución:

Primero obtenemos la distancia entre los dos puntos mediante el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{2.5^2 + 5^2} = 5.59m \quad (74)$$

Como el campo eléctrico es uniforme, entonces la diferencia de potencial entre los puntos es $\Delta V = -Ed$. Despejando, llegamos a $E = 10.73[N/C]$.

4.3. Ejercicio 3

Se libera un electrón desde el reposo en un campo eléctrico uniforme con magnitud $5.0\times 10^2 V/m$ ¿Cuál es la velocidad del electrón en m/s luego de desplazarse $d = 0.8m$ en dirección puesta al campo eléctrico $\vec{E}$?

Aplicando el teorema de conservación de energía, se tiene:

$$\delta u = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} = 1.19\times 10^7[m/s] \quad (75)$$

4.4. Ejercicio 4

Tres cargas se encuentran en un plano, como se muestra en la figura 24. Una carga de $+1\mu C$ se ubica en el eje x a $5cm$ de distancia del origen (en dirección positiva), una carga de $+0.5\mu C$ se encuentra en el eje y a $3cm$ en dirección negativa, y una carga de $-2\mu C$ se encuentra en el II cuadrante del sistema de coordenadas, a $2cm$ del eje x y el eje y ¿Cuál es la energía potencial de este sistema de cargas? Exprese su respuesta en J.

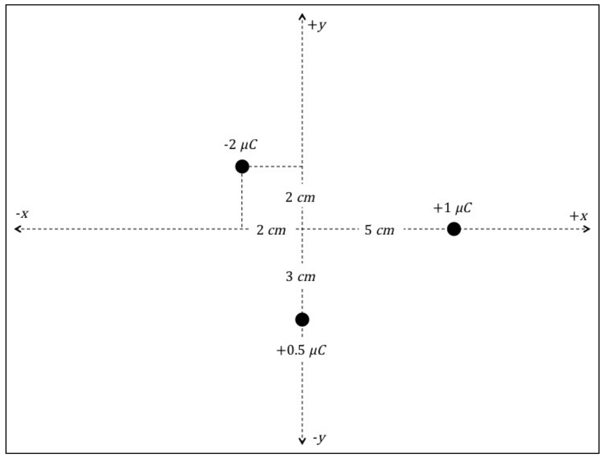

Figura 24: Sistema de cargas

Sean $q_1 = -2\mu C$, $q_2 = +0.5\mu C$ y $q_3 = +1\mu C$. Utilizando trigonometría se pueden obtener las distancias $d_{12} = \sqrt{4+25} = 5.39cm$, $d_{13} = \sqrt{4+49} = 7.28cm$ y $d_{23} = \sqrt{25+9} = 5.83cm$. La energía total del sistema, será igual a la energía necesaria para traer las cargas desde el infinito. Consideraremos el orden 1, 2, 3. Para traer q_1 desde el infinito no necesitamos energía, $u_1 = 0$. Para traer q_2, necesitamos energía potencial, pues habrá una diferencia de potencial entre el infinito y el espacio actual, pues hay presencia de campo eléctrico debido a q_1. Se tiene:

$$u_2 = k_e \frac{q_1}{r_{12}} q_2 \tag{76}$$

Para traer q_3 desde el infinito, también necesitamos realizar trabajo:

$$u_3 = k_e \frac{q_1}{r_{13}} q_3 + k_e \frac{q_2}{r_{23}} q_3 \tag{77}$$

Finalmente, la energía total del sistema:

$$U = u_1 + u_2 + u_3 = k_e \left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} q_1 \frac{q_3}{r_{13}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}} \right) = 0.337J \tag{78}$$

4.5. Ejercicio 5

Cualquier sistema con dos conductores cercanos, tendrá una capacitancia. Calcular la capacitancia entre dos monedas metálicas, de 20 mm de diámetro, paralelas y separadas a 1 mm. Exprese su respuesta en Faradios.

Solución: Despreciando efectos de borde, y considerando el capacitor como placas paralelas (la distancia de separación es mucho menor al área), entonces la capacitancia está dada por:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 2.78 \times 10^{-12} [F] \tag{79}$$

Obs: Es fácil de demostrar esta capacitancia. Considere dos planos infinitos paralelos separados a una distancia d, uno con densidad de carga $sigma$ y otro con densidad de carga $-sigma$. Encuentre el campo eléctrico (Use la ley de Gauss) y así, la diferencia de potencial entre las placas. Finalmente encuentre $C = Q/|\Delta V|$ y llegará a la expresión utilizada.

4.6. Ejercicio 6

Un capacitor esférico consiste en un cascarón esférico de radio b y carga $-Q$ concéntrico con otra esfera conductora más pequeña, de radio a y carga $+Q$. Encontrar una expresión para la capacitancia de este dispositivo.

Solución:

Un diagrama del sistema se muestra en la figura 25.

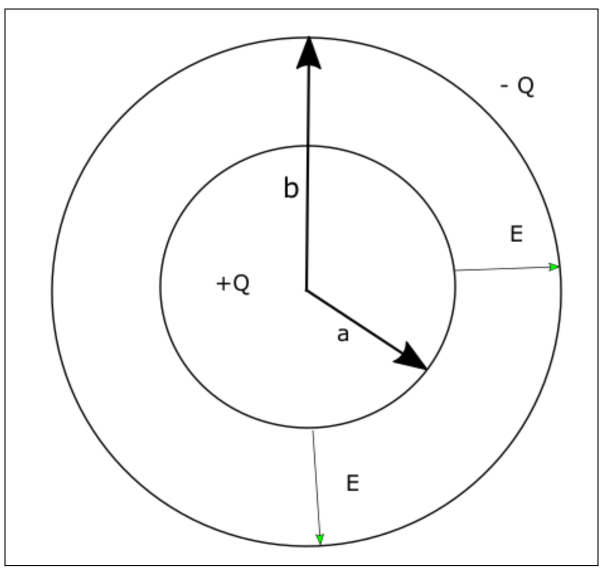

Figura 25: Capacitor esférico.

Sabemos que en la región $r < a$ el campo eléctrico es nulo, pues la esfera es un conductor. También sabemos que el campo eléctrico en la región $r > b$ es nulo, pues la carga neta encerrada sería 0. Finalmente, aplicamos la ley de Gauss en la región $a \leq r \leq b$.

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = k_e \frac{Q}{r^2}\hat{r} \tag{80}$$

Ahora hay que encontrar la diferencia de potencial, para ello resolvemos:

$$V_{a\to b} = -\int_a^b \vec{E} d\vec{s} = -\int_a^b k_e \frac{Q}{r^2} dr = k_e Q \left(\frac{a-b}{ab} \right) \tag{81}$$

Pero lo que nos interesa es el módulo de esta diferencia:

$$|V_{ab}| = k_e Q \left(\frac{b-a}{ab} \right) \tag{82}$$

Finalmente, la capacitancia está dada por:

$$C = \frac{Q}{|V_{ab}|} = \frac{ab}{k_e(b-a)} \tag{83}$$

4.7. Ejercicio 7

Cuatro masas de $10g$ cada una están ligadas por cuerdas de $10cm$ formando un cuadrado, como se muestra en la figura 26. Dos de las masas están cargadas con $2\mu C$. La cuerda entre las dos masas cargadas se corta y el sistema comienza a moverse ¿Cuál es la máxima velocidad de las masas en m/s? No considere ni la fricción ni la gravedad.

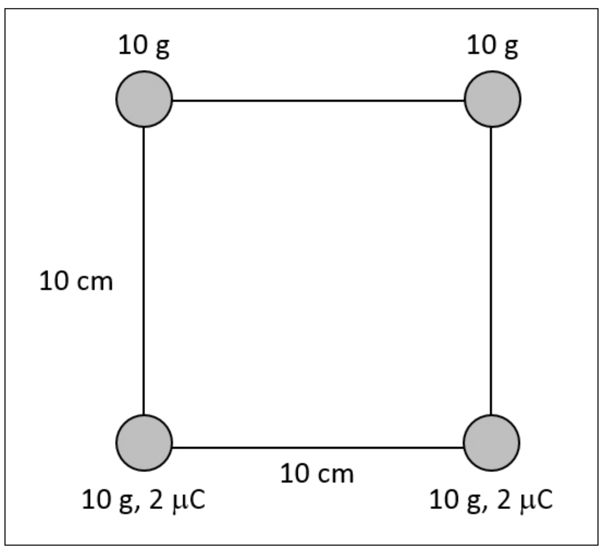

Figura 26: Sistema de masas y cuerda.

El sistema oscilará, y se tendrá la velocidad máxima para las masas cuando éstas forman una línea recta. Cuando la cuerda se corta, ocurre una transformación de energía potencial en energía cinética, considerando las dos cargas:

$$u_0 = k_e \frac{q^2}{a} \tag{84}$$

Sin embargo, no toda la energía potencial se transforma en energía cinética. Cuando las masas están alineadas, aún existe energía potencial, la cual está dada por:

$$u_1 = k_e \frac{q^2}{3a} \tag{85}$$

Luego, las 4 masas se mueven a la misma velocidad, por lo que, utilizando conservación de la energía:

$$k_e \left(\frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{3a} \right) = \frac{1}{2} 4mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k_e q^2}{3ma}} \tag{86}$$

Reemplazando por los valores dados, $v = 3.46m/s$.

5. Circuitos

5.1. Ejercicio 1

Si un cable tiene 1.5×10^{21} electrones fluyendo hacia la izquierda a través de su sección transversal durante cada minuto ¿Cuál es la corriente a través del cable (en Amperes)? ¿En qué sentido va la corriente?

Solución

La corriente se define como la cantidad de carga que fluye en un delta de tiempo determinado (Hay definiciones más formales, pero para efectos prácticos tomaremos ésta):

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1.5 \times 10^{21} \cdot 1.6 \times 10^{-19}}{60} = 4[A] \tag{87}$$

Por convención, el sentido de la corriente está dado por la dirección en que fluyen las cargas POSITIVAS, por lo tanto la corriente va hacia la derecha.

5.2. Ejercicio 2

Un cable de cobre cilíndrico tiene radio de $1.2 \times 10^{-3} m$. Por el cable, fluye una corriente de $8.00A$. Cuál es la velocidad drift de los electrones en el cable (en m/s)? Asuma que cada átomo de cobre contribuye con un electron libre a la corriente. La densidad del cobre es $8.92 g/cm^3$.

Solución: Primero tenemos que la corriente está definida por:

$$I = nqAv_{drift} \Rightarrow v_d = \frac{I}{nqA} \tag{88}$$

Sabemos que $I = 8.00A$, y que la carga de un electron es $1.6 \times 10^{-19} C$. Necesitamos encontrar n que es la densidad de átomos por centímetro cúbico. De una tabla periódica se puede obtener que la masa molar del cobre es $63.546 g/mol$. Podemos usar la masa molar y la densidad del cobre para encontrar el volumen de un mol de cobre:

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{63.546 g/mol}{8.92 g/cm^3} = 7.12 cm^3/mol \tag{89}$$

Como estamos asumiendo que cada átomo de cobre contribuye con un electrón libre podemos encontrar la densidad de electrones en el cobre utilizando el número de Avogadro, que es el número de átomos por mol.

$$n = \frac{6.02 \times 10^{23}}{7.12} = 8.46 \times 10^{22} atoms/cm^3 \tag{90}$$

Lo que implica que:

$$n = 8.46 \times 10^{22} electones/cm^3 \tag{91}$$

Debemos encontrar A, el área transversal del cable.

$$A = \pi r^2 = \pi(1.2 \times 10^{-3})^2 = 4.52 \times 10^{-6} m^2 \tag{92}$$

Ahora, tenemos todos los datos para reemplazar en la ecuación de la velocidad drift, y obtenemos $v_d = 1.31 \times 10^{-4} m/s$

5.3. Ejercicio 3

¿Cuánta energía se requiere (en Joules) para mover $2C$ de carga a través de una diferencia de potencial de $9V$?

Solución:

$$u = q\Delta V = 18J \tag{93}$$

5.4. Ejercicio 4

Un cable de metal tiene una resistencia de 8.00Ω a una temperatura de $20°C$. Si el mismo cable tiene una resistencia de 8.40Ω a $70°C$ ¿Cuál es la resistencia de este cable en Ω cuando su temperatura es $-10°C$?

Solución: La resistencia de un conductor varía con la temperatura, de acuerdo a esta relación:

$$R(T) = R_0 + R_0\alpha(T - T_0) \tag{94}$$

Con los primeros datos de temperatura, utilizando la ecuación, podemos calcular $\alpha = 1 \times 10^{-3}$. Luego para una temperatura de $-10°C$:

$$R(-10) = 8 + 8 \cdot 1 \times 10^{-3} \cdot (-10 - 20) = 7.76\Omega \tag{95}$$

5.5. Ejercicio 5

La resistencia de un cable puede utilizarse para medir esfuerzos mecánicos. Considere un cable de cobre de radio $0.5mm$ y longitud $2m$. La resistividad del cobre es $\rho = 1.68 \times 10^{-8}\Omega m$.

- Encontrar la resistencia de este cable en Ω, a temperatura ambiente.
- Si el cable se utilizó para levantar un objeto pesado que hizo que la longitud aumentara en un 10 %. El cable se deforma de manera tal que mantiene su volumen ¿Cuál es la nueva resistencia del cable? (en Ω)

Solución: Para responder la primera pregunta, simplemente aplicamos la relación obtenida para el cálculo de resistencia en conductores cilíndricos:

$$R = \rho\frac{L}{A} = 1.68 \times 10^{-8}\frac{2}{\pi(0.5 \times 10^{-3})^2} = 0.043\Omega \tag{96}$$

Para responder la segunda pregunta, simplemente calculamos primero el volumen $V = AL = 1.57 \times 10^{-6} m^3$. Luego, como asumimos que el volumen se mantiene constante, podemos calcular la nueva área del cable utilizando la nueva longitud del mismo $V = A_2 L_2 \Rightarrow A_2 = V/1.1L = 7.14 \times 10^{-7}$. Finalmente utilizamos la misma fórmula que usamos anteriormente para obtener la nueva resistencia, que da $R = 0.052\Omega$.

5.6. Ejercicio 6

Los *nano-cascarones de oro* son nano-partículas con un núcleo esférico de vidrio y un delgado cascarón esférico de oro. Tienen propiedades ópticas ajustables, pero por ahora nos preocuparemos de sus propiedades eléctricas. Si la corriente fluye uniformemente desde la superficie interna a la externa ¿Cuál es la resistencia? Asuma un nano-cascarón típico con radio interno $40nm$ y radio externo $50nm$. La resistividad del oro es $2.44 \times 10^{-8}\Omega m$.

Solución:

Primero definamos el área en función del radio:

$$A(r) = 4\pi r^2 \tag{97}$$

Podríamos decir que el dispositivo está compuesto por muchas resistencias en serie, las cuales sumadas dan la resistencia total. Definimos un elemento diferencial de resistencia:

$$dR = \rho \frac{dr}{A(r)} = \rho \frac{dr}{4\pi r^2} \tag{98}$$

Integrando, podemos obtener la resistencia total:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \tag{99}$$

Donde a es el radio interno, y b el radio externo. Finalmente:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \frac{b-a}{ab} = 9.71 \times 10^{-3} [\Omega] \tag{100}$$

5.7. Ejercicio 7

Seis resistores de 100Ω se conectan para formar un tetraedro regular, como se muestra en la figura 27. Si los terminales de una batería de $9V$ se conectan a dos de los vértices ¿Cuánta corriente en Amperes fluirá entregará la batería?

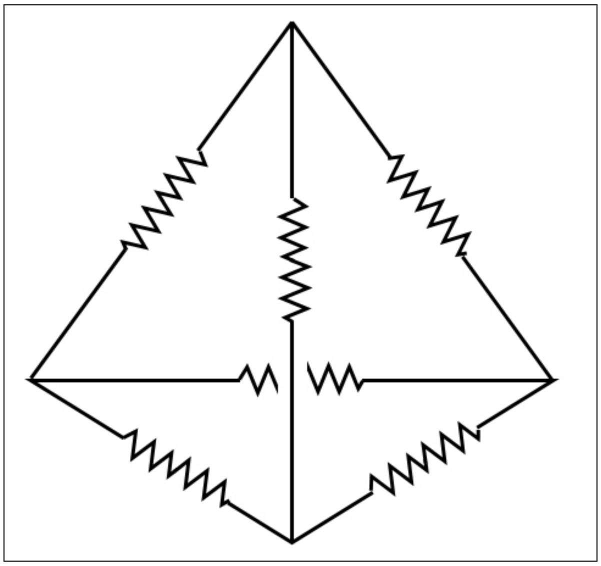

Figura 27: Resistores conectados formando un tetraedro

Solución:

Consideramos que cada resistor tiene un valor $R = 100\Omega$. Redibujamos el circuito para poder observar más fácilmente algunas de sus características, tal como se muestra en la figura 28:

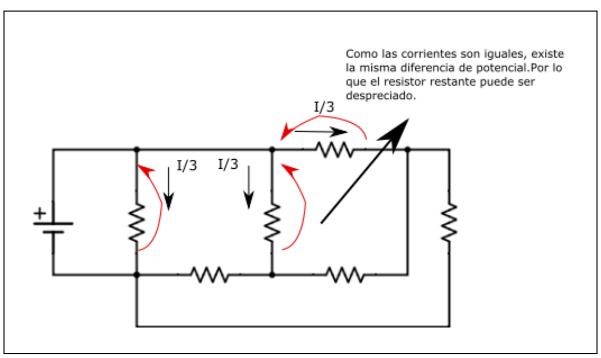

Figura 28: Resistores conectados formando un tetraedro

Luego, con lo explicado en la figura anterior, se tiene:

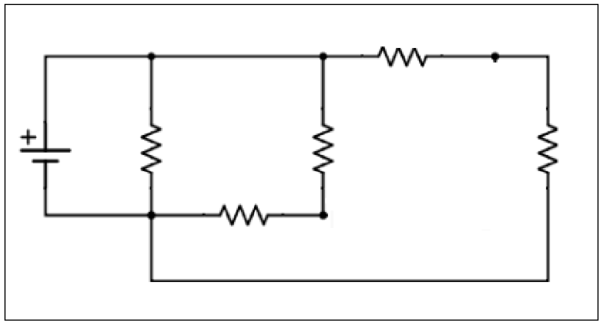

Figura 29: Circuito Equivalente

Donde se puede observar que son 3 resistencias en paralelo de valor R, $2R$ y $2R$. Se puede obtener la resistencia equivalente mediante:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{2}R \tag{101}$$

Y finalmente por ley de Ohm, podemos encontrar la corriente:

$$V = IR \Rightarrow I = \frac{V}{R_{eq}} = 0.18[A] \tag{102}$$

5.8. Ejercicio 8

Considere el circuito mostrado en la figura 30.

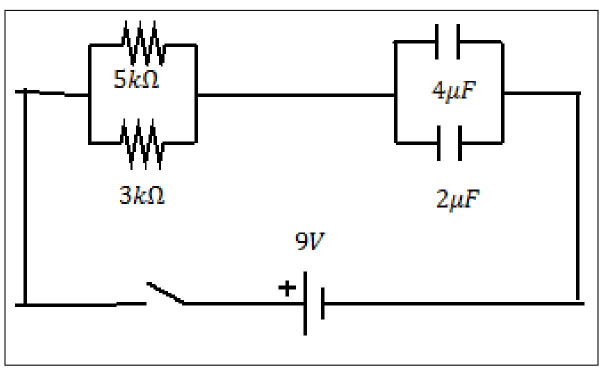

Figura 30: Circuito del ejercicio 8.

- ¿Qué corriente en Amperes fluye de la batería en el instante en que el switch se encuentra cerrado?

- Cuál es la carga en C en el capacitor de $4\mu F$ $10ms$ después de que el switch se haya cerrado?

Solución:
Consideremos encontrar la resistencia equivalente del circuito, y la capacitancia equivalente. En paralelo se tiene:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.875k\Omega \tag{103}$$

Para los capacitores en paralelo, se tiene:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6\mu F \tag{104}$$

La diferencia de potencial a través de un capacitor es:

$$V_c = \frac{Q}{C} \tag{105}$$

Como inicialmente los capacitores están descargados, esta diferencia de potencial es igual a cero. Finalmente por ley de Ohm: $I = V/R_{eq} = 4.8 \times 10^{-3}[A]$.

Para el segundo apartado, tomemos el circuito equivalente, mostrado en la figura 31:

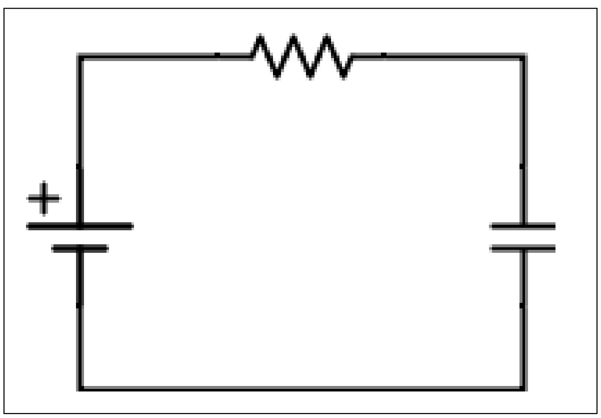

Figura 31: Circuito equivalente para $t \geq 0$.

Aplicando la ley de Kirchhoff se tiene:

$$V - IR_{eq} - \frac{Q}{C_{eq}} = 0 \tag{106}$$

Como sabemos que la corriente es la razón de cambio de carga por tiempo, entonces:

$$V - R_{eq}\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C_{eq}} = 0 \tag{107}$$

Aplicando separación de variables de la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\frac{dQ}{VC_{eq} - Q} = \frac{dt}{R_{eq}C_{eq}} \tag{108}$$

Integrando:

$$\ln\left(VC_{eq} - Q\right) = -\frac{dt}{R_{eq}C_{eq}} + K_0 \tag{109}$$

$$VC_{eq} - Q = e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}} + K_0} \Rightarrow VC_{eq} - Q = e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}} e^{K_0} \tag{110}$$

Como e^{K_0} es una constante, simplemente la expresamos como tal, y arreglando, nos queda:

$$Q(t) = VC_{eq} - Ae^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}} \tag{111}$$

Como $Q(0) = 0$, obtenemos que $A = VC_{eq}$, y finalmente:

$$Q(t) = VC_{eq}\left(1 - e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}\right) \tag{112}$$

Reemplazando y evaluando en el tiempo pedido, se tiene:

$$Q(t = 10 \times 10^{-3}) = 3.18 \times 10^{-5}[C] \tag{113}$$

Podemos obtener la diferencia de potencial a través del capacitor:

$$|\Delta V| = \frac{Q}{C} = 5.3[V] \tag{114}$$

Finalmente, la carga en el capacitor de $4\mu F$ es:

$$Q_1 = |\Delta V|C_1 = 2.12 \times 10^{-5}[F] \tag{115}$$