P1. Si se ejecuta en MATLAB el código

```
a = 1.0;
while a < 2
    a = a + eps/2;
end
```

(a) el valor final de la variable a será aproximadamente 2.0;

(b) el comando while nunca termina de ejecutarse;

(c) el valor final de la variable a será aproximadamente 1.0;

(d) Ninguna de las anteriores.

eps es el valor más pequeño que cumple $1 + eps \neq 1$

Luego $1 + \frac{eps}{2} \doteq 1 + 0 = 1$

Luego while es infinito

P2. Definimos la matriz $\boldsymbol{A}$ y los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{x}^{(0)}$ por

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ -26 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$ son 1 (con multiplicidad 2) y 13. La solución exacta del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 21 & -18 & -5 \end{pmatrix}^t$.

Se usó tres métodos iterativos para aproximar la solución del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ utilizando como iteración inicial al vector $\boldsymbol{x}^{(0)}$. Se ejecutó diez iteraciones de cada método excepto en un caso en el que se obtuvo convergencia a la solución exacta en menos pasos.

En la siguiente tabla se muestran las aproximaciones $\boldsymbol{x}^{(k)}$ obtenidas mediante cada método al cabo de cada iteración k (solamente se muestran los k entre 0 y 4):

	Método A			Método B			Método C		
k	$\boldsymbol{x}^{(k)t}$			$\boldsymbol{x}^{(k)t}$			$\boldsymbol{x}^{(k)t}$		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\frac{39}{11}$	$-\frac{78}{11}$	$-\frac{39}{11}$	$\frac{39}{11}$	$-\frac{78}{11}$	$-\frac{39}{11}$	$\frac{13}{5}$	$-\frac{182}{25}$	$\frac{143}{125}$
2	21	-18	-5	$\frac{2457}{341}$	$-\frac{2106}{341}$	$-\frac{585}{341}$	$\frac{4693}{625}$	$-\frac{37882}{3125}$	$\frac{17043}{15625}$
3				$\frac{35763}{3751}$	$-\frac{40638}{3751}$	$-\frac{15171}{3751}$	$\frac{892593}{78125}$	$-\frac{5942482}{390625}$	$\frac{839943}{1953125}$
4				$\frac{1388205}{116281}$	$-\frac{1189890}{116281}$	$-\frac{330525}{116281}$	$\frac{140880493}{9765625}$	$-\frac{834227082}{48828125}$	$-\frac{115467157}{244140625}$

Identifique los métodos A, B y C.

(a) A = máximo descenso, B = gradiente conjugado, C = Gauss–Seidel.

(b) A = máximo descenso, B = Gauss–Seidel, C = gradiente conjugado.

(c) A = gradiente conjugado, B = Gauss–Seidel, C = máximo descenso.

(d) A = gradiente conjugado, B = máximo descenso, C = Gauss–Seidel.

P3. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 16 \\ 8 & 16 & 36 \end{pmatrix}$$

El elemento l_{21} de la matriz triangular inferior $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ resultante de la factorización de la matriz $A = LL^t$ mediante el método de Cholesky es:

(a) $l_{21} = 2$

(b) $l_{21} = 4$

(c) $l_{21} = 6$

(d) $l_{21} = 3$

$$A = LL^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 16 \\ 8 & 16 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$l_{11}^2 = 4 \Rightarrow l_{11} = 2$

$l_{21} l_{11} = 6 \Rightarrow l_{21} = \frac{6}{2} = 3$

P4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 5 & -11 & -21/2 \\ -2 & 10/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces su descomposición $PA = LU$ dada por el método de eliminación gaussiana (factorización LU) con pivoteo parcial está dada por las matrices

(a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & -2/3 & -3 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & -3/8 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 5 & -11 & -21/2 \\ 0 & -16/15 & -21/5 \\ 0 & 0 & -3/8 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/2 & 1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & -3/8 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Ninguna de las anteriores.

Pivoteo $\begin{pmatrix} 5 & -11 & -21/2 \\ 2 & -4 & -3 \\ -2 & 10/3 & 0 \end{pmatrix}$ $m_{21} = -\frac{2}{5}$ $m_{31} = \frac{2}{5}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $m_{32} = -\frac{3}{8}$

$\begin{pmatrix} 5 & -11 & -21/2 \\ 0 & 2/5 & 6/5 \\ 0 & -16/15 & -21/5 \end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix} 5 & -11 & -21/2 \\ 0 & -16/15 & -21/5 \\ 0 & 2/5 & 6/5 \end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix} 5 & -11 & -21/2 \\ 0 & -16/15 & -21/5 \\ 0 & 0 & -3/8 \end{pmatrix}$

P5. Considere los siguientes puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, con $n \geq 2$ los cuales se ajustan en el sentido de los mínimos cuadrados a un cierto modelo mediante la siguiente función en Matlab:

```
function [a,b]=mincuad(x,y)
A=[ones(length(x),1) x];
B=log(y)-log(x);
X=A\B;
a=exp(X(1));
b=X(2);
```

cuyas entradas x e y son los vectores columna $(x_0, x_1, \ldots, x_n)^t$ e $(y_0, y_1, \ldots, y_n)^t$, respectivamente. ¿A cuál de los siguientes modelos corresponde el ajuste hecho por el programa anterior?

(a) $y = ae^{bx}$.

(b) $y = axe^{bx}$.

(c) $y = a\ln(x)e^{bx}$.

(d) $y = ax^b$.

$X(1) + x X(2) = \log(y) - \log(x) \Rightarrow X(1) + x X(2) + \log(x) = \log(y)$

$y = e^{X(1)} e^{x X(2)} e^{\log(x)}$

$\boxed{y = axe^{bx}}$

P6. Se desea resolver el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $s \in \mathbb{R}$. ¿Cúal de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) El método de Gauss-Seidel converge si $s \in (-1, 1)$.
(b) El método de Gauss-Seidel diverge cualquiera sea el valor de s.
(c) El método de Gauss-Seidel converge solamente si $s = 0$.
(d) Ninguna de las anteriores.

Si: $s \in (-1,1)$ entonces
A es diagonal dominante. luego
se asegura convergencia

P7. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz diagonal y $x \in \mathbb{R}^n$. El costo operacional de calcular Ax es:

(a) $2n - 1$ flops.
(b) n flops.
(c) n^2 flops.
(d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1 \\ a_2 x_2 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{pmatrix}$$

n multiplicaciones
si consideramos que
+0 no es flop.

P8. Suponga que un computador tarda 2 segundos en resolver un sistema triangular 300×300. El tiempo aproximado que tardará dicho computador en realizar la eliminación Gaussiana de este mismo sistema es:

(a) 200 segundos.
(b) 400 segundos.
(c) 4/3 segundos.
(d) Ninguna de las anteriores.

MEG: $\frac{2}{3} n^3$ flop Triangular: n^2

$\text{Proc} = \frac{\text{flop}}{s} = \frac{(300)^2}{2} = (75)^2 \frac{\text{flop}}{s}$

$t_2 = \frac{\text{flop}}{\text{proc}} = \frac{\frac{2}{3}(300)^{\cancel{3}}}{\frac{(\cancel{300^2})}{2}} =$ $100 \cdot 4 = 400[s]$

P9. Se debe resolver un sistema de ecuaciones cuya matriz tiene número de condición 20 y en el que el segundo miembro se determina mediante mediciones sujetas a errores relativos inferiores al 0.1%. Indique cuál de las siguientes es la afirmación correcta más precisa:

(a) el error relativo en la solución será inferior al 2%.

(b) el error relativo en la solución será inferior al 50%.

(c) el error relativo en la solución será inferior al 0.2%.

(d) el error relativo en la solución será inferior al 20%.

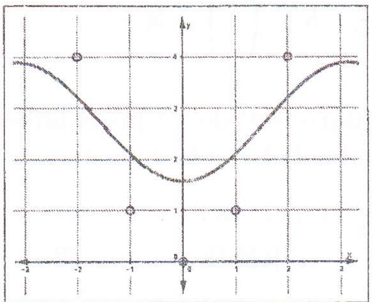
P10. Se quiere ajustar un polinomio de grado a lo más 3

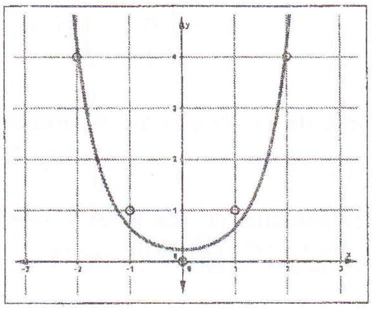
$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

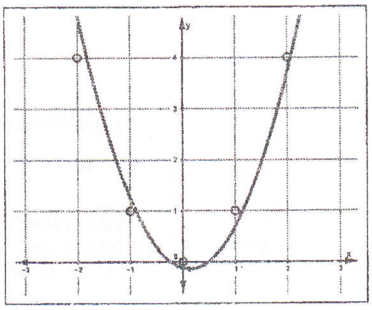
a los datos de la tabla:

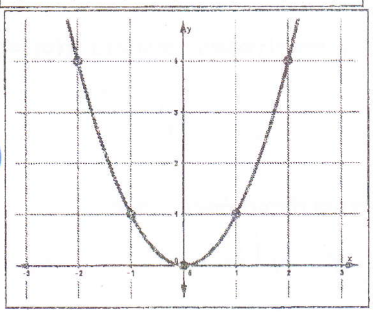
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	4	1	0	1	4

en el sentido de los mínimos cuadrados. ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde a la gráfica de dicho polinomio?

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Por teorema debe existir un único polinomio de grado ≤ 4 que pase por todos los puntos.
Se obtiene $p(X) = X^2$ interpola los puntos

P11. Sea $p(x)$ un polinomio de grado 10 que interpola a los puntos $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$, $(5,0)$, $(6,0)$, $(7,0)$, $(8,0)$, $(9,0)$, $(10,0)$ y $(11,44)$. El valor de $p(0)$ es:

(a) 0
(b) 11!
(c) 44
(d) Ninguna de las anteriores.

Facilmente $p(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i$, como $y_i = 0$ $i=0, n-1$

$p(x) = l_{10}(x) \cdot y_{10} = 44 \frac{(x-10)(x-9)(x-8)(x-7)(x-6)(x-5)\ldots}{(11-10)(11-9)\ldots}$

$= 44 \frac{(x-10)(x-9)\ldots(x-1)}{10!}$ $\quad p(0) = 44 \cdot (-1)^{10} \frac{10!}{10!} = 44$

P12. Considere la matriz y el vector

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Ignorando errores de truncación y redondeo indique cuál de los procedimientos siguientes permite obtener un $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfaga la igualdad $Ax = b$ en forma exacta.

(a) Resolver el sistema $A^tAx = A^tb$ mediante el método de Cholesky.
(b) Obtener la descomposición QR $A = QR$ y resolver el sistema $R^tx = Qb$ mediante sustitución regresiva.
(c) Obtener la descomposición QR $A = QR$ y resolver el sistema $Rx = Q^tb$ mediante sustitución progresiva.
(d) Ninguna de las anteriores.

(P12 no requiere justificación)

sistema No es cuadrado !!!