UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 8

Ecuaciones No Lineales

Ejercicio 1. El Sr. D fue encontrado muerto en su oficina a las 20:00 hrs del 22 de octubre de 2012, la temperatura de su cuerpo era de 32,2 grados Celsius. Una hora después, ésta había descendido a 29,4 grados.

El Capitán F cree que M es el asesino. Sin embargo, M dice tener una coartada: fue entrevistado entre 18:40 y 19:15 por el periodista J. Efectivamente, en la recepción del edificio donde se realizó la entrevista se registró la llegada de M a las 18:35 y su salida a las 19:20. ¿Pudo M ser el asesino? Debemos determinar la hora de la muerte del Sr. D.

Supongamos que $T(t)$ denota la temperatura del cuerpo del Sr. D en el instante de tiempo t. Con los datos anteriores sabemos que $T(20) = 32{,}2$, $T(21) = 29{,}4$. Además, según la ley de Newton,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\kappa \left(T(t) - T_{\text{ambiente}}(t)\right),$$

donde κ es una constante y $T_{\text{ambiente}}(t)$ es la temperatura ambiente en el tiempo t. De la temperatura de la oficina del Sr. D (lugar dónde fue encontrado su cuerpo) sabemos que a las 16:00 hrs era de 20 grados, sin embargo a esa hora se reportó un daño en el aire acondicionado de la misma y la temperatura comenzó a ascender a partir de ese momento a razón de 0,5 grados por hora, es decir podemos tomar

$$T_{\text{ambiente}}(t) = \begin{cases} 20, & t \leq 16, \\ 20 + \frac{1}{2}(t-16), & t > 16 \end{cases}$$

Resolviendo el problema de valores iniciales (válido sólo para $t \geq 16$),

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\kappa \left(T(t) - 20 - \frac{1}{2}(t-16)\right), \quad T(20) = 32{,}2$$

se tiene

$$T(t) = \left(10{,}2 + \frac{1}{2\kappa}\right) e^{-\kappa(t-20)} + \frac{t+24}{2} - \frac{1}{2\kappa}, \quad t \geq 16.$$

Con esta expresión para T y sabiendo que $T(21) = 29{,}4$, determine la hora de la muerte del Sr. D, es decir, determine el momento de tiempo $16 < t_* < 20$ en que la temperatura del cuerpo del Sr. D era 36,5 grados.

Debemos resolver 2 problemas no lineales: el primero es determinar κ de modo que $T(21) = 29{,}4$ y el segundo es, una vez conocido κ, determinar t_*.

Sea

$$F(\kappa) = T(21) - 29{,}4,$$

1.1 escriba una función MATLAB que dado $\kappa \in \mathbb{R}$ (parámetro de entrada a la función), calcule $F(\kappa)$. Esta función debe estar escrita de modo que, en caso que el parámetro de entrada sea un vector, ella retorne un vector con los valores de F en cada uno de los puntos especificados en el vector de entrada.

1.2 Escriba un rutero MATLAB que haga lo siguiente:

a) evalúe F en 100 puntos distintos del intervalo [0,1, 0,5]. Haga un gráfico de la función y observe que ella tiene un cero en el intervalo considerado. Con la ayuda del comando `grid on` indique una aproximación inicial de la raíz de esta función.

b) Llame a la función MATLAB `fzero` para obtener una aproximación al cero de F en [0,1, 0,5]. Ello lo logra escribiendo **una** de las siguientes líneas en su programa, tenga presente que debe sustituir `Fkappa` por el nombre de la función escrita por usted antes.

```
kappa = fzero('Fkappa',0.2,optimset('TolX',1e-10))

kappa = fzero('Fkappa',[0.1,0.5],optimset('TolX',1e-10))
```

Para entender los llamados anteriores a `fzero`, lea la siguiente explicación acerca de este comando: `fzero` es una función MATLAB para la aproximación de raíces de funciones reales basada en una combinación del método de bisección con el método de la secante y otras técnicas. *El primer parámetro de entrada* a `fzero` es la función cuya raíz quiere aproximarse. *El segundo parámetro de entrada* puede ser un número real o un vector de 2 componentes. Si es un número real, es considerado como una aproximación inicial al cero de la función. Si es un vector de 2 componentes, representa el intervalo inicial donde buscar el cero de la función (debe cumplir con las exigencias del método de bisección). En ambos casos, estos parámetros pueden ser estimados mediante la gráfica de la función. *Los siguientes parámetros de entrada* son opcionales. En este caso, especificamos que la precisión con que quiere calcularse la aproximación al cero de F debe ser 10^{-10} (`'TolX',1e-10`). La forma en que procede `fzero` en cada caso puede leerla escribiendo `help fzero` en la ventana de comandos de MATLAB.

Escriba el valor de κ obtenido.

κ	

1.3 Escriba ahora una función que evalúe a $T(t) - 36{,}5$ tomando κ igual al valor obtenido antes.

1.4 Proceda de manera similar a como lo hizo en 6.2, pero ahora para determinar el valor de $t_* \in (16, 20)$ en el cual la temperatura del Sr. D era de 36.5. ¿A qué hora fue asesinado el Sr. D?

¿Pudo M asesinar a D?

Observación: Para definir una función también es alternativa usar el comando `inline`.

Ejercicio 2. Baje desde la página del curso el archivo `lab08_521230_2016-1.zip`. El mismo contiene: `newtonrd.m`, `Fxy.m`, `dFxy.m` y `ejemplonewtonrd.m`.

Se busca aproximar los ceros de la función

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy + y^2 - 1 \\ y - x^2 \end{pmatrix}$$

con una precisión de 10^{-10} y restringiendo el número máximo de iteraciones a 30.

En `Fxy` y `dFxy` se evalúan la función F y su derivada.

Observe en `ejemplonewtonrd.m` la forma que tienen los llamados a `newtonrd`. Los primeros dos parámetros de entrada a esta función son los nombres de los archivos Matlab en los que se evalúa la función cuya raíz quiere aproximarse y su derivada (`Fxy.m` y `dFxy.m` en este ejemplo). El tercer parámetro de entrada es una aproximación inicial a la raíz, en `ejemplonewtonrd.m` se ha tomado $x^{(0)} = \left(\frac{1}{4},\, \frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$. Los restantes parámetros de entrada son: precisión deseada en la solución y máximo número de iteraciones a realizar.

Agregue llamados a `newtonrd.m` tomando otros valores iniciales y observe qué sucede. Complete la siguiente tabla con los resultados obtenidos.

$(x^{(0)}, y^{(0)})$	número de iteraciones (Newton)	aproximación a cero de F

Observación: Note que $F(x,y) = 0 \iff y = x^2 \quad \wedge \quad x^4 + x^3 + x^2 - 1 = 0$. Con ayuda del comando `roots` de Matlab puede, entonces, encontrar los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $F(x,y) = 0$ y comparar estas raíces con las aproximaciones obtenidas en los distintos llamados a `newtonrd`.

Ejercicio 3.

3.1 Encuentre el valor máximo absoluto y mínimo absoluto de la función

$$f(x) = \frac{x + \cos(x^2)}{\ln(1 + e^{x^2})}$$

en el intervalo $[-5,\, 5]$.

3.2 Encuentre el área entre las curvas $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ con

$$f(x) = e^{x-x^2}, \quad g(x) = \arctan x^2, \quad x \in [-3,\, 3].$$

Indicación: Grafique las funciones en $[-3,\, 3]$ y calcule el área entre las curvas utilizando `quad` y `fzero` de manera adecuada.

3.3 Encuentre todos los valores de $x \in [-3,\, 3]$ tales que

$$\int_0^x \sin t^2 \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Utilice para ello `fzero` y `quad` de manera adecuada.

Ejercicio 4. Considere $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$

4.1 Modifique la función `newtonrd` para que resuelva el problema unidimensional de encontrar la solución de una ecuación no lineal $f(x) = 0$, utilizando el método de Newton–Raphson. Aplíquelo para resolver los ejercicios 1 y 3.

4.2 Escriba un programa que resuelva el problema de encontrar la solución de una ecuación no lineal $f(x) = 0$ utilizando el método de la bisección. Su programa debe entregar un mensaje de error en caso de que al evaluar la función en los extremos del intervalo inicial, esta tenga el mismo signo. Aplíquelo para resolver los ejercicios 1 y 3.

Indicación: El comando `error('Mensaje de error')` detiene el programa y muestra en pantalla el mensaje de error escrito entre las comillas.