UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Cálculo Numérico (521230) - Laboratorio 5

Mínimos Cuadrados

Ejercicio 1. La siguiente tabla relaciona la cantidad de cierto aditivo a un barniz con el tiempo de secado del mismo.

Aditivo (en gramos)	Tiempo de secado (en horas)
0.0	12.0
1.0	10.5
2.0	10.0
3.0	8.0
4.0	7.0
5.0	8.0
6.0	7.5
7.0	8.5
8.0	9.0

Cuadro 1: Aditivo y tiempo de secado

1.1 Escriba el sistema de ecuaciones lineales asociado al problema de encontrar el polinomio de grado menor o igual que 2 que mejor ajusta por cuadrados mínimos los datos en la tabla.

1.2 Escriba un rutero Matlab en el que haga lo siguiente:

- Construya la matriz $\boldsymbol{A}$ y parte derecha $\boldsymbol{b}$ del sistema escrito por usted en **1.1**.
- Llame al comando `qr` para encontrar las matrices $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ que forman una descomposición $\boldsymbol{QR}$ de $\boldsymbol{A}$.
- Verifique que las matrices $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ satisfacen las propiedades vistas en clase. Guarde en $\boldsymbol{R}_1$ la matriz triangular superior formada por las primeras 3 filas y columnas de $\boldsymbol{R}$.
- Construya la matriz $\boldsymbol{B}$ y la parte derecha $\boldsymbol{c}$ del sistema de las ecuaciones normales asociado a $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.
- Compare los números de condición de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{R}_1$. ¿Cuál de las dos matrices es mejor condicionada?
- Obtenga, con ayuda de las matrices $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ (y no mediante $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{b}$) los coeficientes del polinomio de grado menor o igual que 2 que mejor ajusta los datos dados.
- Grafique en un mismo gráfico los pares en la tabla y el polinomio obtenido (evaluado en 100 puntos entre 0 y 8 con ayuda de `polyval`).
- Basados en el polinomio resultante, ¿qué cantidad de aditivo resulta en tiempo mínimo de secado? ¿Cuál es el tiempo mínimo de secado?

Observación: El sistema sobredeterminado $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ también pudo resolverse mediante $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\backslash\,\boldsymbol{b}$. Al escribir el comando anterior Matlab resuelve el sistema con ayuda de la descomposición $\boldsymbol{QR}$ de $\boldsymbol{A}$.

Si `a` denota al vector que contiene la cantidad de aditivo en el barniz y `s` contiene los tiempos de secado asociados, según aparecen en la tabla anterior, el llamado `p = polyfit(a,s,2)` retorna en `p` los coeficientes del polinomio de grado menor o igual que 2 que mejor ajusta, en el sentido de los mínimos cuadrados, los pares de datos en `a` y `s`. Este polinomio puede evaluarse usando `polyval`.

Ejercicio 2. La tabla siguiente muestra la concentración de iones n como una función del tiempo transcurrido después de haber apagado a un agente de ionización

Tiempo (seg)	$n(\times 10^{-4})$
0	5.03
1	4.71
2	4.40
3	3.97
4	3.88
5	3.62
6	3.30
7	3.15
8	3.08
9	2.92
10	2.70

Se sabe que se cumple la siguiente relación entre la concentración de iones y el tiempo

$$n = \frac{n_0}{1 + n_0\,\alpha\,t}, \tag{1}$$

donde n_0 es la concentración inicial de iones y α, el coeficiente de recombinación.

2.1 Muestre que existe una relación lineal entre n^{-1} y t.

2.2 Encuentre la función (1) que mejor ajusta por cuadrados mínimos a los datos en la tabla. Escriba las aproximaciones a n_0 y α obtenidas.

2.3 Grafique los pares ordenados en la tabla y la función n obtenida (evaluada en 110 puntos entre 0 y 10).

Ejercicio 3. Las cifras siguientes son datos sobre el porcentaje de llantas radiales producidas por cierto fabricante que aún pueden usarse después de recorrer cierto número de millas:

Miles de Millas recorridas (x)	1	2	5	15	25	30	35	40
Porcentaje útil (y)	99	95	85	55	30	24	20	15

Se desea ajustar los datos anteriores a los siguientes modelos en el sentido de los mínimos cuadrados:

$$y_1(x) = \alpha\beta^x \qquad \text{e} \qquad y_2(x) = \alpha(100 - x)10^{\beta x}$$

Escriba una rutero en Matlab que ejecute las siguientes tareas:

3.1 Determine los parámetros α y β que ajustan ambos modelos a los datos de la tabla en el sentido de los mínimos cuadrados. Su programa debe mostrar estos parámetros.

3.2 Para ambos modelos, muestre $||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}||_2$ del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ que su programa resuelve.

3.3 Dibuje en un mismo gráfico los datos de la tabla y ambos modelos ajustados.

3.4 Con el mejor modelo, estime qué porcentaje de las llantas radiales del fabricante durarán 45000 millas y 50000 millas. Su programa debe mostrar estas estimaciones.

Ejercicio 4. Para estimar la cantidad de vitamina A requerida para mantener el peso se dió a ratas de laboratorio una dieta básica exenta de vitamina A y se les administró raciones controladas de vitamina A en forma de tabletas. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de vitamina A administrada y el aumento de peso de las ratas.

Dosis de vitamina A (mg)	Aumento de peso (g)
0.25	-10.8
1.0	13.5
1.5	16.4
2.5	28.7
7.5	51.3

Escriba un rutero MATLAB que,

- Encuentre la función de la forma

$$\textit{Aumento de peso} = a + b\log_{10}(\textit{dosis de vitamina A}),\ a, b \in \mathbb{R}$$

  que mejor ajusta por cuadrados mínimos los datos dados.
- Grafique en un mismo gráfico los pares en la tabla y la función obtenida (evaluada en 100 puntos entre 0.25 y 7.5).
- Basado en la función obtenida, ¿qué cantidad de vitamina A es requerida para no aumentar de peso?