UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Problemas Resueltos Continuidad y Asíntotas
Cálculo (525104/525117).

1. Estudie la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x - 5 = 2 - 5 = -3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2x + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, entonces $f(x)$ no es continua en $x = 2$.

2. Determinar las asintotas de

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{7 - x}$$

Solución:

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 7\}$

Así, la recta de ecuación $x = 7$ es una posible asintota vertical

Asintotas Verticales

a) $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^+} \dfrac{x^2 - 5x + 1}{7 - x}$

Como $\lim\limits_{x\to 7^+} x^2 - 5x + 1 = 15$ y $\lim\limits_{x\to 7^+} 7 - x = 0^-$

Así, $\lim\limits_{x\to 7^+} \dfrac{x^2 - 5x + 1}{7 - x} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{x^2 - 5x + 1}{7 - x}$

Como $\lim\limits_{x\to 7^-} x^2 - 5x + 1 = 15$ y $\lim\limits_{x\to 7^-} 7 - x = 0^+$

Así, $\lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{x^2 - 5x + 1}{7 - x} = +\infty$

Así, la recta de ecuación $x = 7$ es Asíntota Vertical de $f(x)$

Asintotas Horizontales

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+1}{7-x} = -\infty$

Pues $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-5x+1 = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} 7-x = -\infty$, pero el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-5x+1}{7-x} = +\infty$

Pues $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-5x+1 = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} 7-x = +\infty$, pero el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador.

Luego, no existen Asíntotas Horizontales

Asintotas Oblicuas

a) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x^2-5x+1}{7-x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+1}{7x-x^2} = -1$

b) $b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2-5x+1}{7-x} - (-x)\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+1+x(7-x)}{7-x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+1+7x-x^2}{7-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{7-x} = -2$

Luego, la recta de ecuación $y = -x-2$ es una asíntota oblicua de $f(x)$

Intersección con el eje y:

$f(0) = \dfrac{0^2-5\cdot 0+1}{7-0} = \dfrac{1}{7}$

Intersecciones con el eje x:

$y = f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x+1}{7-x} = 0 \Rightarrow x^2-5x+1 = 0$

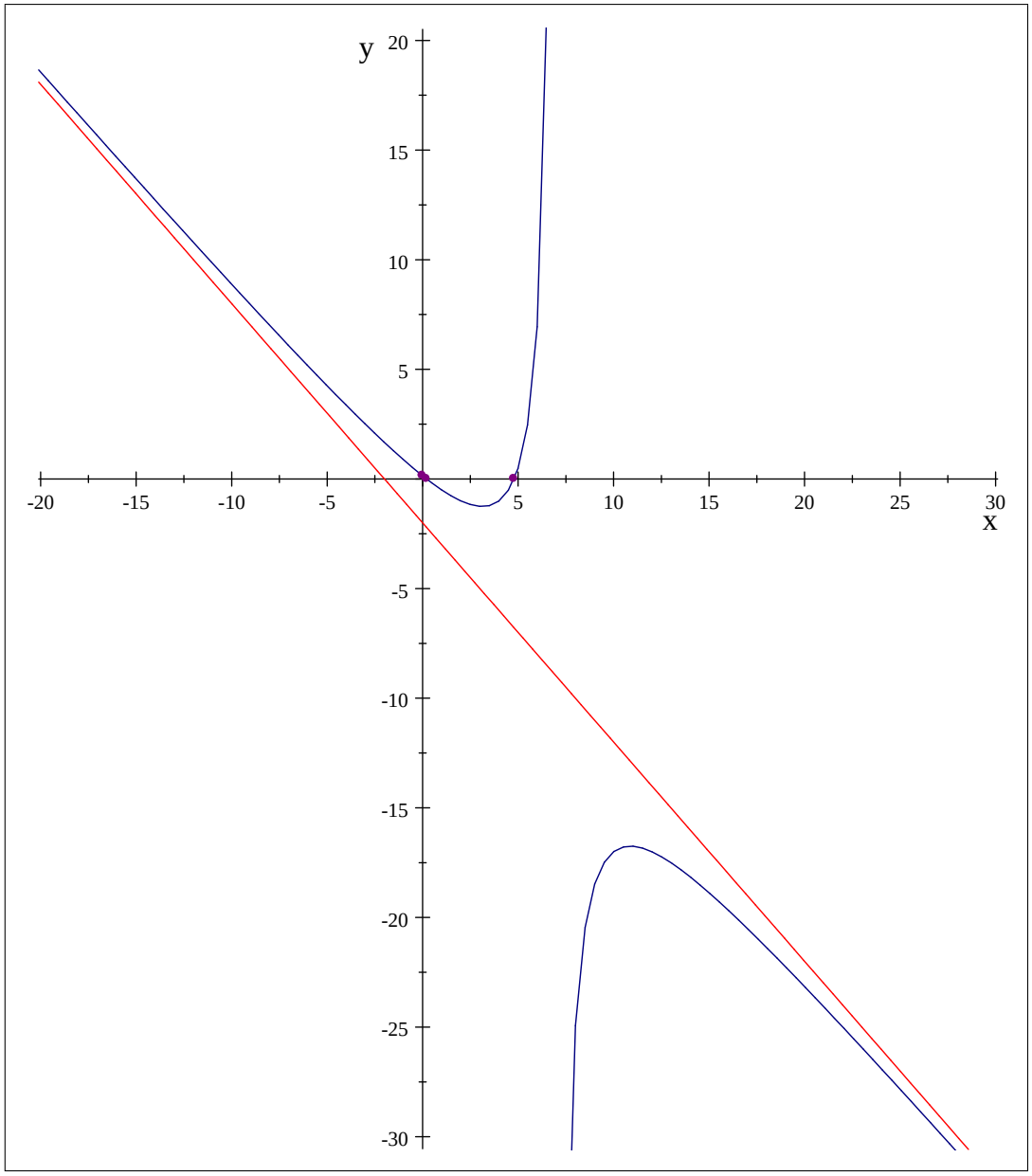
Para encontrar los valores de x utilizaremos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

Así, $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \approx 4,79$

$x_2 = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \approx 0,21$

Así, una gráfica de f con sus asíntotas es:



3. Determinar las asíntotas de:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - 3$$

Solución:

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$

Así, la recta de ecuación $x = 2$ es una posible asíntota vertical

Asíntotas Verticales

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} - 3$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} x - 2 = 0^+$

Así, $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} - 3 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} - 3$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} x - 2 = 0^-$

Así, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} - 3 = -\infty$

Así, la recta de ecuación $x = 2$ es Asíntota Vertical de $f(x)$

Asíntotas Horizontales

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x-2} - 3$

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} x - 2 = +\infty$

Entonces, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x-2} - 3 = 0 - 3 = -3$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x-2} - 3$

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} x - 2 = -\infty$

Entonces, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x-2} - 3 = 0 - 3 = -3$

Así, la recta de ecuación $y = -3$ es Asíntota Horizontal de $f(x)$

Asíntotas Oblicuas: Dado que existen Asíntotas Verticales y Horizontales, no existen asíntotas oblicuas (si se intentarán calcular, se llegaría a la asíntota $y = -3$)

Intersección con el eje y:

$f(0) = \dfrac{1}{0-2} - 3 = -\dfrac{7}{2}$

Intersección con el eje x:

$y = f(x) = 0$

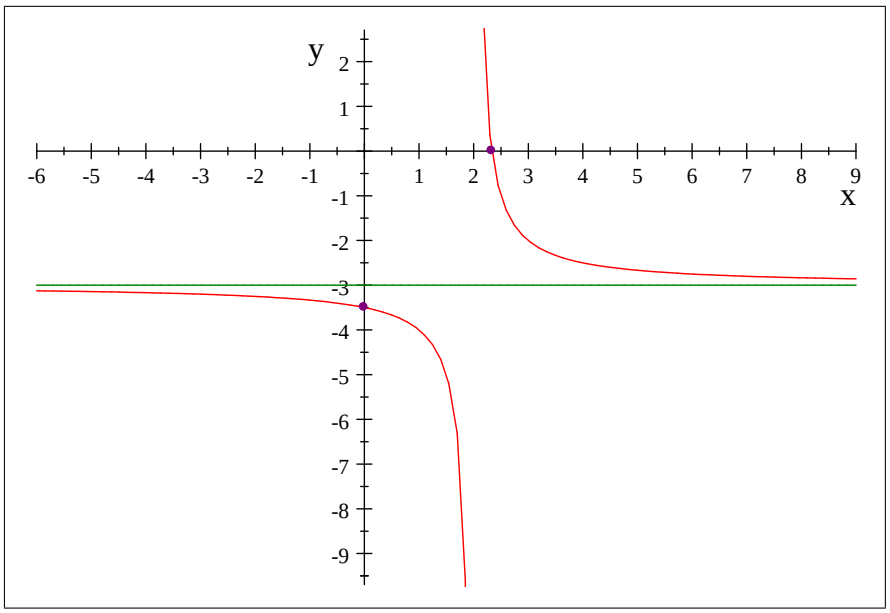
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} = 3$

$\Leftrightarrow 1 = 3(x-2)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$

Así, una gráfica de f con sus asíntotas es:



.