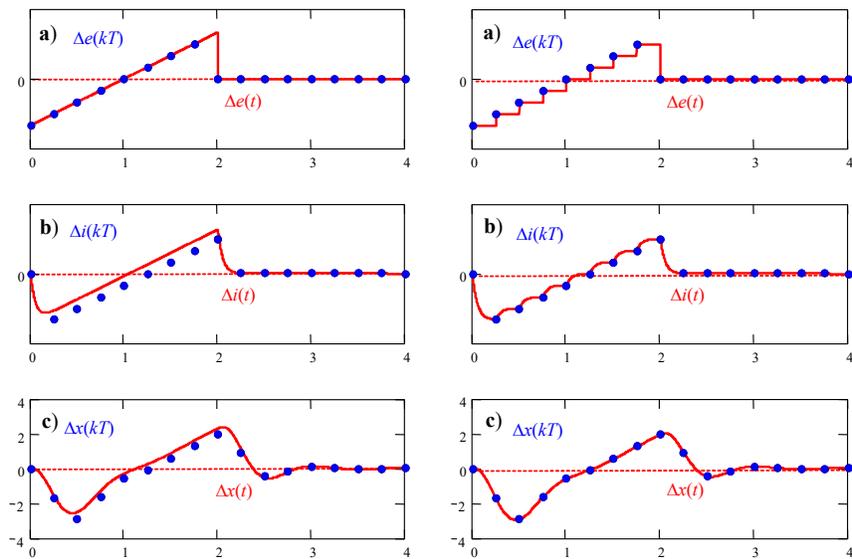




Apuntes

Sistemas Lineales Dinámicos - 547 309



23^{era} edición

© Prof. José R. Espinoza C. – Daniel G. Sbarbaro H.

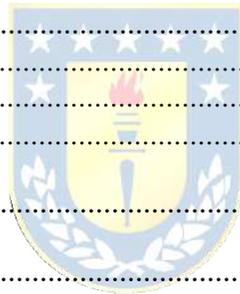
Enero 2025

Tabla de contenidos

PRÓLOGO	IV
NOMENCLATURA	V
ABREVIACIONES	VIII
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 <i>Proceso y Sistema</i>	1
1.2 <i>Modelo</i>	3
1.3 <i>Clasificación de Sistemas y Modelos</i>	5
1.4 <i>Principios Básicos de Modelación de Sistemas</i>	10
1.5 <i>Transformaciones de Similitud en Ecuaciones de Estado</i>	13
1.6 <i>Linealización</i>	14
1.7 <i>Alcances del Curso 543 214</i>	17
1.8 <i>Ejercicios Propuestos</i>	18
2 SEÑALES EN SISTEMAS	20
2.1 <i>Introducción</i>	20
2.2 <i>Señales de Prueba</i>	22
2.3 <i>Transformaciones sobre Señales</i>	25
2.4 <i>Señales de Prueba Discretas</i>	32
2.5 <i>Convolución continua y discreta</i>	34
2.6 <i>Ejercicios Propuestos</i>	37
3 TRANSFORMACIONES	42
3.1 <i>Introducción</i>	42
3.2 <i>Transformada de Laplace</i>	43
3.3 <i>Transformada de Fourier</i>	49
3.4 <i>Transformada de Fourier de Frecuencia Discreta</i>	54
3.5 <i>Transformada \mathcal{Z}</i>	57
3.6 <i>Transformada de Fourier de Tiempo Discreto</i>	61
3.7 <i>Transformada de Fourier Discreta</i>	63
3.8 <i>Ejercicios Propuestos</i>	66
4 CARACTERIZACIÓN MATEMÁTICA	69
4.1 <i>Introducción</i>	69
4.2 <i>Solución de Ecuaciones Diferenciales</i>	71
4.3 <i>Solución de Ecuaciones de Diferencias</i>	75
4.4 <i>Solución de Ecuaciones de Estados</i>	78
4.5 <i>Solución de Ecuaciones de Diferencias de Estado</i>	83
4.6 <i>Ejercicios Propuestos</i>	86
5 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA	89
5.1 <i>Introducción</i>	89
5.2 <i>En el Plano Continuo</i>	89
5.3 <i>En el Plano Discreto</i>	93
5.4 <i>Modelo en Espacio de Estados a partir de una F de T</i>	96



5.5	<i>Sistemas de Primer y Segundo Orden</i>	103
5.6	<i>Sistemas Equivalentes Discretos - Continuos</i>	105
5.7	<i>Ejercicios Propuestos</i>	108
6	ANÁLISIS EN FRECUENCIA	112
6.1	<i>Introducción</i>	112
6.2	<i>Diagrama de Bode</i>	113
6.3	<i>Diagrama de Bode Asintótico</i>	119
6.4	<i>Sistemas con Retardo</i>	121
6.5	<i>Sistemas de Fase No-Mínima</i>	122
6.6	<i>Diagrama de Bode de Sistemas Tiempo Discreto</i>	125
6.7	<i>Ejercicios Propuestos</i>	126
7	ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES.....	130
7.1	<i>Introducción</i>	130
7.2	<i>Estabilidad de Sistemas Continuos en Ecuaciones de Estado</i>	130
7.3	<i>Estabilidad Entrada-Salida en Sistemas Tiempo Continuo</i>	131
7.4	<i>Estabilidad de Sistemas Discretos en Ecuaciones de Estado</i>	138
7.5	<i>Estabilidad Entrada-Salida en Sistemas Tiempo Discreto</i>	140
7.6	<i>Ejercicios Propuestos</i>	142
A	ANEXO: MODELACIÓN DE SISTEMAS	145
A.1	<i>Modelo y Simulación</i>	145
A.2	<i>Analogías de Sistemas</i>	159
A.3	<i>Ejercicios Propuestos</i>	161
	BIBLIOGRAFÍA.....	164
	ÍNDICE ALFABÉTICO.....	165



Prólogo.

El curso "*Sistemas Lineales Dinámicos*" es obligatorio para alumnos de pre-grado de las carreras de Ingeniería Civil Eléctrica, Electrónica y Biomédica de la Universidad de Concepción. Este ramo es la base para el análisis desde una perspectiva matemática de los sistemas encontrados en las variadas disciplinas de la ingeniería; en particular, en la Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Biomédica. Específicamente, en esta asignatura se entregan herramientas para el *estudio de sistemas lineales continuos y discretos* tipo **SISO** y **MIMO**.

Los tópicos revisados en este texto permiten abordar sistemas que se caracterizan por tener estructuras lineales y que normalmente corresponden a una simplificación de la realidad. Se asume que se conoce o se puede obtener el modelo de éstos en forma fenomenológica y/o empírica. En particular, se tratan temas de *señales, transformaciones, discretización, Función de Transferencia, Diagrama de Bode y estabilidad*.

El lector debe tener dominio de los temas entregados en los cursos de *Modelación de Sistemas y Ecuaciones Diferenciales* para avanzar fluidamente en los tópicos de este documento. Además, un holgado manejo de programas de simulación es definitivamente necesario para seguir los ejemplos. Se recomienda, MatLab™, SimuLink™, MathCad™, PSim™ y PLECS™; sin embargo, la programación en otros lenguajes de alto nivel (por ejemplo, C) es también altamente recomendada.

El documento fue digitado enteramente en Word for Windows de MicroSoft™ y los ejemplos y ejercicios fueron desarrollados en MatLab™, SimuLink™, MathCad™, PSim™ y PLECS™.



Dr. José R. Espinoza C.

Profesor Titular
Depto. de Ingeniería Eléctrica, of. 220
Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción
Casilla 160-C, Correo 3
Concepción, CHILE
Tel: +56 41 2203512
Fax: +56 41 2246999
jose.espinoza@udec.cl
<http://www.udec.cl/jose.espinoza/>

Dr. Daniel G. Sbarbaro H.

Profesor Titular
Depto. de Ingeniería Eléctrica, of. 240
Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción
Casilla 160-C, Correo 3
Concepción, CHILE
Tel: +56 41 2204981
Fax: +56 41 2246999
dsbarbar@udec.cl
<http://www.udec.cl/~dsbarbar/>

Nomenclatura

Matrices

A	: matriz de parámetros de dimensión $n \cdot n$.
B	: matriz de parámetros de dimensión $n \cdot p$.
C	: matriz de parámetros de dimensión $q \cdot n$.
D	: matriz de parámetros de dimensión $q \cdot p$.
E	: matriz de parámetros de dimensión $n \cdot m$.
F	: matriz de parámetros de dimensión $q \cdot m$.
T	: matriz de transformación de dimensión de $n \cdot n$.
A_T	: matriz de parámetros transformada mediante T de dimensión $n \cdot n$. A_T = TAT ⁻¹
B_T	: matriz de parámetros transformada mediante T de dimensión $n \cdot p$. B_T = TB
C_T	: matriz de parámetros transformada mediante T de dimensión $q \cdot n$. C_T = CT ⁻¹
D_T	: matriz de parámetros transformada mediante T de dimensión $q \cdot p$. D_T = D
E_T	: matriz de parámetros transformada mediante T de dimensión $n \cdot m$. E_T = TE
F_T	: matriz de parámetros transformada mediante T de dimensión $q \cdot m$. F_T = F
T_{abc-αβ0}	: matriz de transformación de ejes <i>abc</i> a $\alpha\beta 0$, dimensión 3·3.
T_{αβ0-abc}	: matriz de transformación de ejes $\alpha\beta 0$ a <i>abc</i> , dimensión 3·3.
T_{αβ0-dq0}	: matriz de transformación de ejes $\alpha\beta 0$ a <i>dq0</i> , dimensión 3·3.
T_{dq0-αβ0}	: matriz de transformación de ejes <i>dq0</i> a $\alpha\beta 0$, dimensión 3·3.
T_{abc-dq0}	: matriz de transformación de ejes <i>abc</i> a <i>dq0</i> , dimensión 3·3.
T_{dq0-abc}	: matriz de transformación de ejes <i>dq0</i> a <i>abc</i> , dimensión 3·3.
H(s)	: matriz de transferencia. H(s) = C(sI - A) ⁻¹ B + D .
Ĥ(s)	: matriz de transferencia inversa. Ĥ(s) = H ⁻¹ (s).
H(s)^H	: matriz conjugada transpuesta de H(s) . H(s)^H = (H(s)) [*] T.
C	: matriz de controlabilidad.
O	: matriz de observabilidad.
L(s)	: matriz de transferencia en L.D.
Φ(t)	: matriz de transición.
Adj { P }	: matriz adjunta de la matriz P .
diag { x_1, \dots }	: matriz diagonal compuesta por los valores x_1, x_2, \dots
ℜe { X }	: matriz parte real de la matriz X .
ℑm { X }	: matriz parte imaginaria de la matriz X .
X̃	: matriz compuesta por elementos $\tilde{x}_{i,j}$ que son fasores.

Vectores

x	: vector de n variables de estados, x = $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$
u	: vector de p variables de entrada, u = $[u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]^T$
y	: vector de q variables de salida, y = $[y_1 \ y_2 \ \dots \ y_q]^T$
p	: vector de m perturbaciones, p = $[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m]^T$
x̂	: vector de n variables de estados, x̂ = $[\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \dots \ \hat{x}_n]^T$ (estimación de x).
ŷ	: vector de q variables de estados, ŷ = $[\hat{y}_1 \ \hat{y}_2 \ \dots \ \hat{y}_q]^T$ (estimación de y).
x̃	: vector de n variables de estados, x̃ = $[\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \dots \ \tilde{x}_n]^T$ (error de estimación de x̃ = x - x̂).
x^{abc}	: vector de tres variables de estados, x^{abc} = $[x^a \ x^b \ x^c]^T$ (ejes estacionarios <i>abc</i>).

$\mathbf{x}^{\alpha\beta 0}$: vector de tres variables de estados, $\mathbf{x}^{\alpha\beta 0} = [x^\alpha \ x^\beta \ x^0]^T$ (ejes estacionarios $\alpha\beta 0$).
\mathbf{x}^{dq0}	: vector de tres variables de estados, $\mathbf{x}^{dq0} = [x^d \ x^q \ x^0]^T$ (ejes rotatorios $dq0$).
\mathbf{x}_0	: condición inicial del vector de estados, $\mathbf{x}_0 = [x_{10} \ x_{20} \ \dots \ x_{n0}]^T$
\mathbf{x}_o	: vector de estados en el punto de operación, $\mathbf{x}_o = [x_{1o} \ x_{2o} \ \dots \ x_{no}]^T$
\mathbf{u}_o	: vector de entradas en el punto de operación, $\mathbf{u}_o = [u_{1o} \ u_{2o} \ \dots \ u_{po}]^T$
\mathbf{y}_o	: vector de salidas en el punto de operación, $\mathbf{y}_o = [y_{1o} \ y_{2o} \ \dots \ y_{qo}]^T$
\mathbf{y}_d	: vector deseado (referencia) de q variables de salida, $\mathbf{y}_d = [y_{1d} \ y_{2d} \ \dots \ y_{qd}]^T$
\mathbf{p}_o	: vector de perturbaciones en el punto de operación, $\mathbf{p}_o = [p_{1o} \ p_{2o} \ \dots \ p_{qo}]^T$
$\Delta \mathbf{x}$: variación del vector de estados \mathbf{x} en torno a \mathbf{x}_o , $\Delta \mathbf{x} = [\Delta x_1 \ \Delta x_2 \ \dots \ \Delta x_n]^T$
$\Delta \mathbf{u}$: variación del vector de entradas \mathbf{u} en torno a \mathbf{u}_o , $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1 \ \Delta u_2 \ \dots \ \Delta u_p]^T$
$\Delta \mathbf{y}$: variación del vector de salidas \mathbf{y} en torno a \mathbf{y}_o , $\Delta \mathbf{y} = [\Delta y_1 \ \Delta y_2 \ \dots \ \Delta y_q]^T$
$\Delta \mathbf{p}$: variación del vector de perturbaciones \mathbf{p} en torno a \mathbf{p}_o , $\Delta \mathbf{p} = [\Delta p_1 \ \Delta p_2 \ \dots \ \Delta p_m]^T$
$\mathbf{x}(s)$: Laplace de \mathbf{x} , $\mathbf{x}(s) = [x_1(s) \ x_2(s) \ \dots \ x_n(s)]^T$
$\mathbf{u}(s)$: Laplace de \mathbf{u} , $\mathbf{u}(s) = [u_1(s) \ u_2(s) \ \dots \ u_p(s)]^T$
$\mathbf{y}(s)$: Laplace de \mathbf{y} , $\mathbf{y}(s) = [y_1(s) \ y_2(s) \ \dots \ y_p(s)]^T$
$\mathbf{p}(s)$: Laplace de \mathbf{p} , $\mathbf{p}(s) = [p_1(s) \ p_2(s) \ \dots \ p_m(s)]^T$
\mathbf{v}_k	: k -ésimo vector propio de \mathbf{A} .
\mathbf{w}_k	: k -ésimo vector propio de \mathbf{A}^T .
\mathbf{v}_k^*	: conjugado del k -ésimo vector propio de \mathbf{A} .
\mathbf{x}_{ec}	: vector de estados para entrada cero.
\mathbf{x}_{ci}	: vector de estados para c.i. nulas.
\mathbf{y}_{ec}	: vector de salidas para entrada cero.
\mathbf{y}_{ci}	: vector de salidas para c.i. nulas.
\mathbf{c}_k	: k -ésima fila de la matriz \mathbf{C} .
\mathbf{b}_k	: k -ésima columna de la matriz \mathbf{B} .
$\nabla V(\mathbf{x})$: gradiente de la función $V(\mathbf{x})$. $\nabla V(\mathbf{x}) = \partial V(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$.
$\bar{\mathbf{x}}$: vector de fasores, $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_n]^T$.

Escalares

x_k	: k -ésima variable de estado.
$dx_k/dt = \dot{x}_k$: derivada de la k -ésima variable de estado.
a_k	: k -ésimo coeficiente del polinomio característico de \mathbf{A} .
λ_k	: k -ésimo valor propio de \mathbf{A} .
λ_k^*	: conjugado del k -ésimo valor propio de \mathbf{A} .
λ_{ij}	: ganancia relativa entre la entrada i -ésima y la salida j -ésima.
$l(s)$: función de transferencia en L.D.
d_{ij}	: elemento ij de la matriz \mathbf{D} .
$h_{ij}(s)$: elemento ij de la matriz $\mathbf{H}(s)$.
$\hat{h}_{ij}(s)$: elemento ij de la matriz $\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}^{-1}(s)$.
$\text{rango}\{\mathbf{P}(s)\}$: rango de la matriz $\mathbf{P}(s)$.
$\det\{\mathbf{P}(s)\}$: determinante de la matriz $\mathbf{P}(s)$.
$\arg\{x\}$: ángulo del número complejo x .
$\text{tr}\{\mathbf{P}(s)\}$: traza de la matriz $\mathbf{P}(s)$.
$\max_{ij}\{w_{ij}\}_l$: máximo elemento de la matriz \mathbf{W}_l .
$\max\{\}$: máximo valor.
$\min\{\}$: mínimo valor.
$\log\{\}$: logaritmo en base 10.

$u(t)$: entrada escalón.
$r(t)$: entrada rampa.
$\ e\ $: norma del elemento e .
$\sigma_l(\mathbf{A})$: l -ésimo valor singular de \mathbf{A} .
$\bar{\sigma}(\mathbf{A})$: máximo valor singular de \mathbf{A} .
$\underline{\sigma}(\mathbf{A})$: mínimo valor singular de \mathbf{A} .
$\rho(\mathbf{A})$: radio espectral de \mathbf{A} .
$\gamma(\mathbf{A})$: número de condición de \mathbf{A} .
$V(\mathbf{x})$: función de Lyapunov.
Ω	: vecindad en el espacio de estados de \mathbf{x} .
\mathbf{G}	: conjunto invariante.
\mathbf{R}	: conjunto invariante subconjunto de \mathbf{G} .
\mathbf{e}_{ss}	: vector de error en estado estacionario.
δ	: banda de asentamiento.
t_s	: tiempo de asentamiento.
V	: valor medio (RMS) de la señal continua (alterna) $v(t)$.
$f(t)$: función en el tiempo continuo.
$f(k)$: función en el tiempo discreto (también escrita $f(kT)$, con T el tiempo de muestreo).
$f(s)$: función en el plano de Laplace.
$f(\omega)$: función en frecuencia continua de tiempo continuo.
$f(\Omega)$: función en frecuencia continua de tiempo discreta.
$f(n)$: función en frecuencia discreta de tiempo continuo.
$f(m)$: función en frecuencia discreta de tiempo discreta.
\bar{x}	: fásor.



Abreviaciones.

Mayúsculas

L.A.	: lazo abierto.
L.C.	: lazo cerrado.
L.D.	: lazo directo.
L.I.T.	: lineal invariante en el tiempo.
S.P.I.	: semi-plano izquierdo.
S.P.D.	: semi-plano derecho.
F. de T.	: función de transferencia.
F.D.	: función descriptora.
M. de T.	: matriz de transferencia.
B.W.	: ancho de banda.
E.S.	: entrada/salida.
S.S.	: estado estacionario.
SISO	: sistema de una entrada y una salida (single input single output).
MIMO	: sistema de varias entradas y varias salidas (multiple inputs multiple outputs).
L.G.R.	: lugar geométrico de las raíces.
P.I.D.	: controlador proporcional integral derivativo.
<i>S.P.</i>	: sobrepaso.
<i>M.G.</i>	: margen de ganancia.
<i>M.F.</i>	: margen de fase.
FCD	: forma canónica diagonal.
FCC	: forma canónica controlable.
FCO	: forma canónica observable.
FCJ	: forma canónica de Jordan.
T.L.	: Transformada de Laplace.
T.F.	: Transformada de Fourier.
T.F.F.D.	: Transformada de Fourier de Frecuencia Discreta.
T.Z.	: Transformada \mathcal{Z} .
T.F.T.D.	: Transformada de Fourier de Tiempo Discreta.
T.F.D.	: Transformada de Fourier Discreta.
D. de B.	: Diagrama de Bode



Minúsculas

c.i.	: condiciones iniciales.
l.i.	: linealmente independiente.
l.d.	: linealmente dependiente.
c.c.	: corriente continua (en inglés es d.c.).
c.a.	: corriente alterna (en inglés es a.c.).
a.c.a.	: abscisa de convergencia absoluta.

1 Introducción

En este capítulo se introducen formalmente los conceptos de *proceso*, *sistema* y *modelo*, como también la relación entre ellos. Especial importancia se da a la identificación de las cantidades asociadas a un sistema y a la clasificación de éstas en variables de *estado*, *entradas*, *salidas*, *perturbaciones* y *parámetros*. Además, se proponen varias clasificaciones de sistemas de acuerdo a sus principales características. Los tópicos son ilustrados con ejemplos extraídos de las variadas disciplinas de la ingeniería.

1.1 Proceso y Sistema

Def.: Por **proceso** se entenderá una realidad física cualquiera que conlleva, en algún intervalo de tiempo, un cambio de estado que exhiben sus componentes esenciales.

El análisis de procesos tiene por finalidad conocer el comportamiento que exhibe un cierto aspecto asociado a un proceso. Este aspecto y el estudio a realizar quedan determinados por los objetivos de análisis que se hayan establecidos.

Def.: Un **sistema** es una abstracción de una realidad física de acuerdo a los objetivos de estudio planteados.

De este modo, a un mismo proceso pueden asociarse variados sistemas. La asociación depende de cuáles sean los objetivos de análisis considerados.

Ejemplo 1.1. Considere el sistema de generación hidroeléctrico que se muestra en la Fig. 1.1. Los posibles objetivos de estudio asociado a este proceso podrían ser:

- Pérdidas de fluido en las cañerías.
- Rendimiento del generador.
- Aumento de la temperatura del agua.
- Generación de tensión constante.

Como era de esperar, dependiendo de la perspectiva, los objetivos pueden ser muy distintos. ♣

Es así entonces, que cada objetivo hará necesario extraer un aspecto restringido de la realidad física concreta, tendiente a focalizar y por tanto simplificar el análisis a realizar.

A. Cantidades en sistemas

Los sistemas se caracterizan de acuerdo a cómo están constituidos y como interactúan con el medio, para ello se definen los siguientes conceptos:

Def.: Las **variables de entrada** son aquellas mediante las cuales se actúa desde el exterior sobre el proceso y a total voluntad. Éstas permiten determinar las principales características de comportamiento del proceso.

Def.: Las **variables de salida** constituyen el medio que permite efectuar el análisis del proceso, mediante la evaluación directa de los objetivos de estudio.

Def.: Las **perturbaciones** son variables que también actúan desde el exterior pero que no son manejables a voluntad y cuyo efecto sobre el proceso siempre es conocido. Introducen una componente de incertidumbre en el estudio.

Def.: Las **variables de estado** son aquellas variables que definen totalmente la condición del sistema, desde el punto de vista de los objetivos de estudio, en cuanto a la información contenida en éste y a su evolución frente a una acción del medio.

Def.: Los **parámetros** son cantidades que fijan ciertas características del proceso, estableciendo un marco al cual estará condicionado su comportamiento; se consideran fijos cuando el resto está sujeto a variaciones.

Ejemplo 1.2. Considere el sistema de generación hidroeléctrico de la Fig. 1.1. Para este caso se puede identificar las siguientes cantidades:

- u : Porcentaje de apertura de la válvula de escape.
- f_e : Flujo de alimentación del estanque.
- f_{s1} : Flujo de vaciado no alterable.
- f_{s2} : Flujo de vaciado manipulable.
- h_1 : Altura de la columna de agua del estanque.

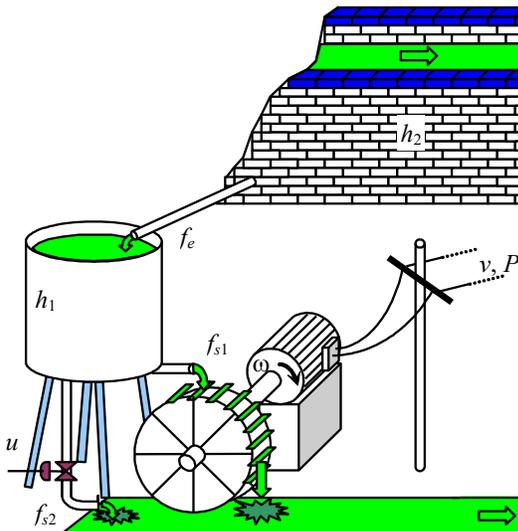


Fig. 1.1 Sistema de generación hidroeléctrica.

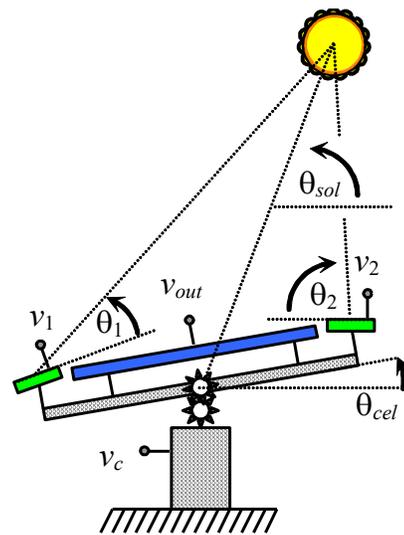


Fig. 1.2 Sistema de generación solar.

- v : Voltaje en los terminales del generador.
- ω : Velocidad de giro del generador.
- P : Potencia consumida por la red.
- h_2 : Altura del canal de alimentación.
- ... ♣

Ejemplo 1.3. Considere el sistema de posicionamiento de un generador solar presentado en la Fig. 1.2.

Los objetivos de estudio que se pueden plantear son:

- v_{out} v/s ángulo del sol.
- Regulación de tensión.
- Generación de tensión máxima.
- Generación de tensión constante.
- ...

Además, podemos identificar las siguientes cantidades:

- θ_1 : Ángulo del sensor 1.
- θ_2 : Ángulo del sensor 2.
- θ_{sol} : Ángulo del sol.
- θ_{cel} : Ángulo de la celda mayor.
- v_1 : Voltaje del sensor 1.
- v_2 : Voltaje del sensor 2.
- v_{out} : Voltaje de celda mayor.
- v_c : Voltaje de alimentación del motor posicionador.
- ... ♣

1.2 Modelo

Un modelo es una representación de un sistema. Cabe destacar que para efectuar un análisis de un proceso es necesario conocerlo. En general, se desea llegar a conocer factores (internos y externos) que condicionan el comportamiento del mismo, tales como interrelaciones entre variables, el efecto de las perturbaciones, rangos de estabilidad, el efecto de la variación de parámetros, etc. El mayor conocimiento del proceso se obtiene mediante la experimentación, la cual generalmente no se puede desarrollar con profundidad en plantas industriales, debido a esta situación se debe recurrir a medios alternativos tales como la simulación de los experimentos en modelos del proceso completo o en modelos parciales de los fenómenos de interés.

Dentro de los factores que normalmente limitan la experimentación en plantas industriales se pueden citar los siguientes:

Factibilidad tecnológica, que dice relación con los medios disponibles para realizar los experimentos: instrumentación, posibilidad de acceso a todos los puntos de variables que requiera medir, precisión exigida, etc.

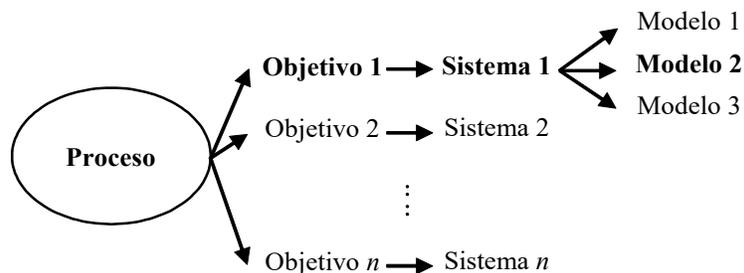


Fig. 1.3 Relación entre proceso-objetivo-sistema-modelo.

Costos asociados a la experimentación tanto en recursos humanos, uso de equipos, materiales, alteraciones del proceso o su operación, tiempo de experimentación, etc.

Tiempo de experimentación que permite obtener información útil a los propósitos del estudio en particular, adecuado para detectar variaciones en el medio.

Características de los medios y herramientas existentes para la experimentación.

La importancia de los modelos reside, principalmente, en que proporcionan un medio más simple para conocer el comportamiento del proceso. Es decir, son sustitutos del proceso para el análisis, en relación tanto a los efectos que el medio ejerza sobre éste, como también de aquellos derivados de las modificaciones de sus características internas. En otras palabras, el modelo es una herramienta usada para el análisis de procesos, a través del análisis de sistemas. En la Fig. 1.3 se presenta la relación entre proceso y modelos.

Dependiendo de la naturaleza de los modelos se pueden clasificar en:

Conceptuales describe al sistema en forma global, permiten la transferencia de ideas o conceptos en forma clara y precisa, generalmente los modelos conceptuales toman la forma de diagramas.

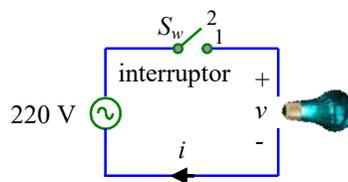
Matemáticos los cuales a su vez se podrían clasificar en: *Analíticos* los cuales representan un conjunto de ecuaciones asociadas a la descripción de un sistema, y *Numéricos* que representan un conjunto de algoritmos que no tiene necesariamente un equivalente analítico.

Lingüísticos que son un conjunto de reglas que describen a un sistema.

Ejemplo 1.4. En la Fig. 1.4 se muestra un sistema compuesto por una fuente, un interruptor y una lámpara conformando un circuito eléctrico Fig. 1.4(a), también se muestra el modelo conceptual Fig. 1.4(b), el modelo matemático Fig. 1.4(c), y el modelo lingüístico Fig. 1.4(d) asociado a este sistema. ♣

Existen consideraciones generales en la práctica que deben tenerse en cuenta al modelar un sistema:

Complejidad versus representabilidad. La complejidad del modelo muchas veces está asociada a los objetivos de estudio, y conlleva al uso de herramientas sofisticadas de análisis. Es por eso, que es siempre deseable tener modelos lo más simple posible, pero que representen el fenómeno que se quiere estudiar. Lamentablemente, muchos fenómenos que se presentan en los procesos industriales son complejos, y así será necesario tener un modelo que sea un balance entre complejidad y representabilidad.



a) circuito eléctrico



b) modelo conceptual

$$\begin{aligned} S_w = 1 &\Rightarrow v = Ri \\ S_w = 2 &\Rightarrow i = 0 \end{aligned}$$

c) modelo matemático

Si S_w está en 1 entonces la lámpara se enciende
Si S_w está en 2 entonces la lámpara se apaga

d) modelo lingüístico

Fig. 1.4 Circuito eléctrico y los diferentes modelos asociados.

Simplificaciones. Para reducir la complejidad de los modelos se puede recurrir a simplificaciones tales como:

- *Reducción de orden:* en este caso se eliminan algunos parámetros o ecuaciones que tienen poca influencia en la variable que se está modelando.
- *Concentración de parámetros:* en sistemas con parámetros distribuidos se puede resumir (concentrar) los efectos en tan solo un punto.
- *Linealización:* se considera el sistema operando en un rango pequeño de variaciones, donde una aproximación en serie de primer orden da una muy buena aproximación. Cabe destacar que esta simplificación sustenta gran parte de este curso.

Rango de validez El rango de validez determina la zona donde el modelo es válido; es decir, donde concuerda con el comportamiento del proceso. Dentro de los factores que podemos citar y que afectan el rango de validez están las suposiciones simplificadoras.

Ejemplo 1.5. En la Fig. 1.5 se muestra el diagrama de bloques asociado al sistema de generación hidroeléctrica del Ejemplo 1.2. En este caso no se conoce cómo está relacionada la salida y entrada de cada bloque. Se espera que las leyes físicas nos permitan obtener tales expresiones. Esta alternativa es conocida como **modelación fenomenológica**. Por último, se puede utilizar la experimentación para obtener el modelo de aquellos sistemas en donde no es posible escribir ecuaciones físicas, metodología conocida como **modelación empírica**. Este es el caso de la presión arterial y/o el ritmo cardiaco del cuerpo humano en función de variables de entrada como puede ser la aplicación de algún medicamento. ♣

1.3 Clasificación de Sistemas y Modelos

Los sistemas así como los modelos se pueden clasificar de acuerdo a las características de los elementos que los componen.

A. Lineal y no-lineal

Los sistemas y modelos lineales cumplen con el principio de superposición y homogeneidad. Es decir, si $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son las respuestas del sistema H a las entradas $u_1(t)$ y $u_2(t)$, respectivamente; entonces, el sistema será lineal si y sólo si se cumplen las siguientes igualdades:

$$H(u_1(t) + u_2(t)) = y_1(t) + y_2(t) \quad \text{y} \quad H(\alpha u_1(t)) = \alpha y_1(t),$$

donde, $y_1(t) = H(u_1(t))$, $y_2(t) = H(u_2(t))$ y α es un número real. Estas representaciones pueden tomar la forma de expresiones algebraicas, ecuaciones de diferencias, ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones diferenciales parciales.

Ejemplo 1.6. Considere el circuito eléctrico de la Fig. 1.6(a), el modelo obtenido considerando las cantidades R y L constantes (parámetros) es,

$$e = Ri + \frac{d}{dt}(Li) = Ri + L \frac{di}{dt},$$

el cual corresponde a un modelo lineal; sin embargo, si se considera el efecto de la corriente sobre la inductancia $L = L(i)$, el modelo obtenido es,

$$e = Ri + \frac{d}{dt}(Li) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{dL}{dt}i,$$

resultando un modelo no-lineal. Este es el caso de inductores que operan con corrientes muy elevadas y que no han sido diseñados para operar a tales niveles, este fenómeno es conocido como saturación. ♣

B. Continuos y discretos

Hay procesos cuyas variables son discretas por naturaleza como por ejemplo el valor de la U.F. la cual tiene un valor cada día (variable discreta en el tiempo), a diferencia por ejemplo de una planta papelera donde se puede saber a cada instante la cantidad de papel producida (variable continua en el tiempo). En este curso se utilizarán los términos continuos y discretos para referirse a la calidad de la variable independiente que es el tiempo. Así en un sistema de evolución continua las variables de interés asumen algún valor en cada instante, mientras que en sistemas discretos los valores de las variables, cambian tan sólo en ciertos instantes.

Ejemplo 1.7. Para un depósito $P(0)$ se tiene que al cabo de un mes la cantidad es $P(T) = (1 + I)P(0)$, donde I es el interés mensual y T es un mes. Así, la cantidad de dinero al cabo de un mes arbitrario kT denotada por $P(kT + T)$ esta dada por $P(kT + T) = (1 + I)P(kT)$ o equivalentemente,

$$P(kT + T) - (1 + I)P(kT) = 0.$$

Esta expresión corresponde al modelo del proceso y es claramente discreto, pues sólo hay valores para los instantes kT , que en este caso corresponden a meses. Se sabe que la solución de esta ecuación es $P(kT) = (1 + I)^k P(0)$. En este curso se revisarán técnicas matemáticas para resolver ecuaciones como las anteriores. ♣

Ejemplo 1.8. Hay un par inicial (macho y hembra) de conejos, Fig. 1.7. Suponer que los conejos nunca mueren y que cada hembra gesta una pareja cada mes a partir del segundo mes de nacida. ¿ Cuántos pares de conejos hay en un mes arbitrario k ?. **R.:** Al escribir la cantidad para los meses iniciales se puede determinar que si $y(kT)$ es los pares de conejos que hay en un mes arbitrario k , con $T = 1$ mes; entonces, $y(kT) = y(kT - T) + y(kT - 2T)$ o equivalentemente,

$$y(kT + 2T) - y(kT + T) - y(kT) = 0,$$

con $y(0) = y(T) = 1$. La expresión analítica para $y(kT)$ se determinará con las herramientas a estudiar en este curso. ♣

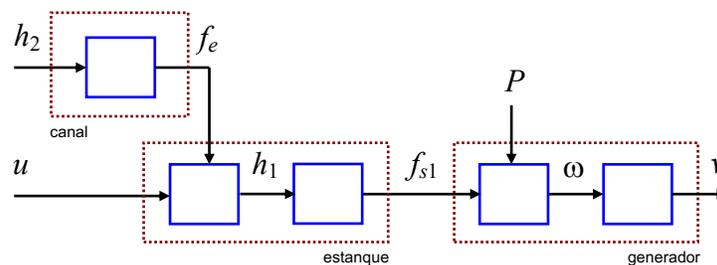


Fig. 1.5 Modelo de la mini-central de la Fig. 1.1.

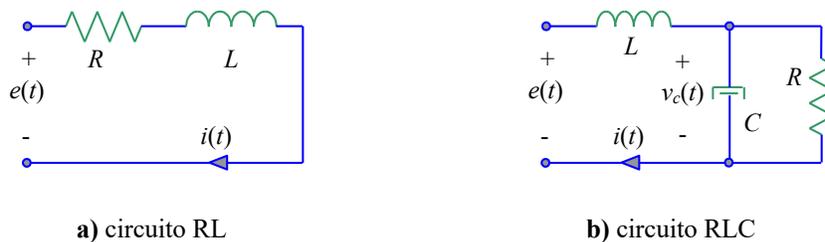


Fig. 1.6 Clasificación de modelos; a) lineales y no-lineales, b) dinámicos y estáticos.

Las ecuaciones discretas no son dominio exclusivo de los sistemas financieros o de población. Por el contrario, cualesquier realidad física “abordada” mediante un sistema digital queda mejor representada por ecuaciones discretas; en particular y en ingeniería, los sistemas eléctricos y electrónicos que son operados mediante computadoras (microprocesadores en general).

C . Estáticos y Dinámicos

Esta clasificación es consecuencia de los objetivos de análisis que se hayan planteado. Así por ejemplo, si el objetivo de análisis es conocer los valores que toman las diferentes variables de un proceso cuando las entradas son fijas, el modelo deberá ser estático, por cuanto no interesa el comportamiento temporal de las variables. Sin embargo, si el objetivo de análisis es conocer lo que sucede a las variables del proceso luego de provocarse un cambio en las condiciones de operación (entradas y/o perturbaciones), se deberá considerar un modelo dinámico.

Un proceso está normalmente en evolución, por lo tanto, no puede hablarse de un proceso estático, pero sí puede decirse respecto de su modelo. El análisis mediante modelos estáticos es realmente útil en la práctica, puesto que resulta conveniente para simplificar el análisis y el empleo de técnicas de solución de modelos.

Los modelos estáticos generalmente se representan mediante ecuaciones algebraicas lineales y/o no lineales, y en derivadas parciales (respecto a la ubicación espacial). Por otro lado, los modelos dinámicos son representados matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (respecto del tiempo) o parciales (respecto del tiempo y ubicación espacial).

Ejemplo 1.9. En la Fig. 1.6(b) se muestra un circuito eléctrico RLC. El modelo dinámico de este circuito esta dado por:

$$e = L \frac{di}{dt} + v_c \quad i = C \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R},$$

y el modelo estático asociado será tan sólo

$$e = v_c \quad i = \frac{v_c}{R}.$$

Es posible notar que la diferencia entre el modelo dinámico y el estático es que en este último no se consideran variaciones en las variables. Nótese que se obtiene haciendo las derivadas nulas o bien “abriendo” los capacitores y “cortocircuitando” los inductores del circuito. ♣

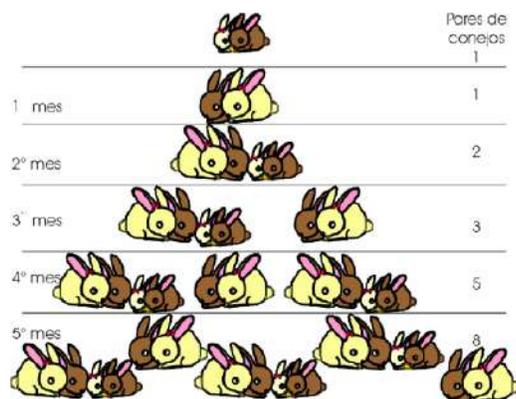


Fig. 1.7 Clasificación de modelos. Sistema discreto: población de pares de conejos, Ejemplo 1.8.

D. Causales y no-causales

Un sistema causal es aquel cuya salida es una consecuencia del valor actual y pasado de la señal de entrada. Los sistemas no causales generalmente surgen de algoritmos matemáticos y son representaciones abstractas, el ejemplo más simple es el filtro promediador revisado a continuación.

Ejemplo 1.10. Considere el conjunto de puntos que se muestran en la Fig. 1.8(a). Si se quisiera promediar tres datos adyacentes se tendría – entre otras – las siguientes opciones:

$$y_{med1}(k) = \frac{y(k) + y(k-1) + y(k-2)}{3},$$

$$y_{med2}(k) = \frac{y(k-1) + y(k) + y(k+1)}{3}.$$

La primera representa un sistema causal, Fig. 1.8(b), en cambio, el segundo filtro, Fig. 1.8(c), es no causal puesto que la señal de salida depende de los valores futuros de la señal de entrada. Esto impide su implementación en tiempo-real; sin embargo, no es difícil aceptar que el caso no-causal no introduce retardo entre la señal de salida y la señal de entrada. Esta es una característica muy deseada en sistemas de filtrado. ♣

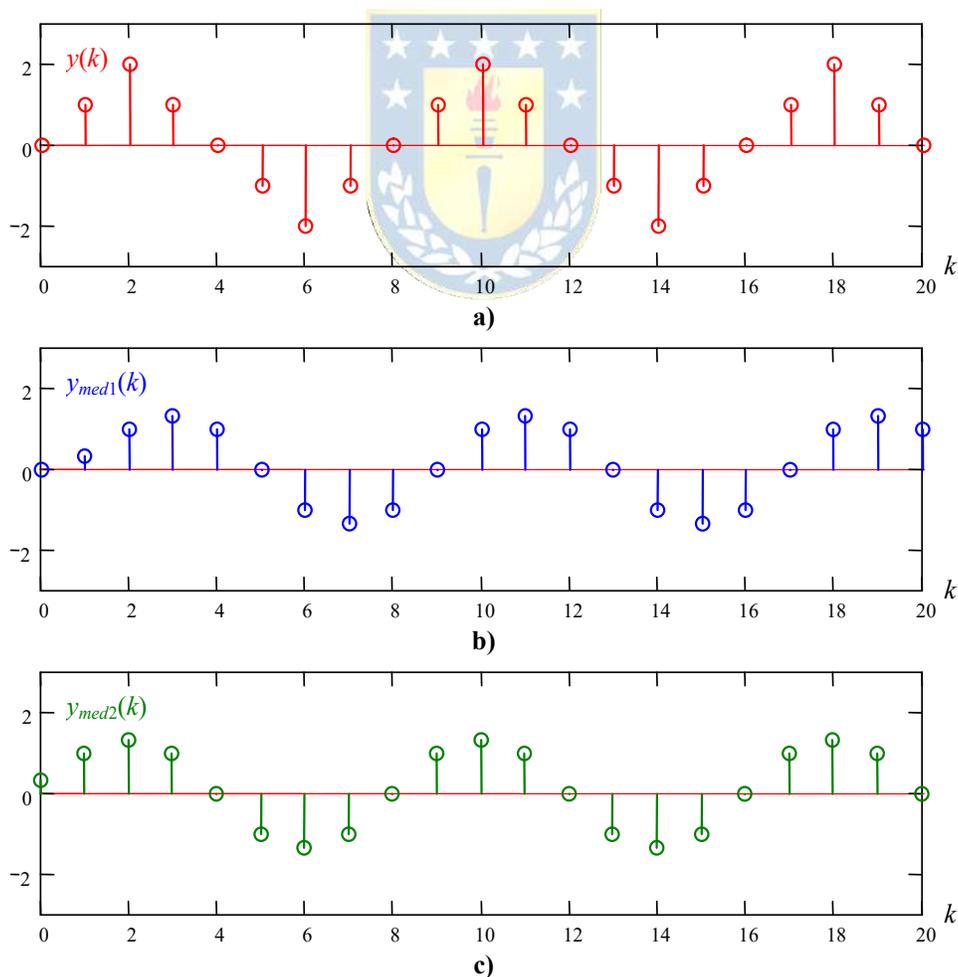


Fig. 1.8 Promediador; **a)** señal de entrada, $y(k)$, **b)** salida del promediador causal, $y_{med1}(k)$, **c)** salida del promediador no-causal, $y_{med2}(k)$.

E. Tiempo invariantes y variantes

Todo proceso real, con mayor o menor rapidez, sufre modificaciones en sus características, en particular en sus parámetros. Sin embargo, si estos cambios son suficientemente lentos respecto a las características que se desea estudiar mediante el análisis, los parámetros pueden ser considerados constantes con el fin de obtener un modelo de este proceso. Estos modelos, cuyos parámetros no son dependientes del tiempo son llamados invariantes en el tiempo. Si por el contrario, el modelo desarrollado considera en forma explícita la dependencia temporal de los parámetros, se les llama variantes en el tiempo.

Ejemplo 1.11. En un estudio del movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza, la masa de éste puede ser considerada un parámetro. Si el cuerpo es, por ejemplo, el trasbordador espacial, Fig. 1.9(a), su masa estará variando constantemente a causa del combustible consumido; por este hecho, es un sistema cuyo modelo deberá considerar la variación de la masa en forma explícita en función del tiempo. ♣

F. Parámetros concentrados y distribuidos

Un modelo de parámetros concentrados considera que las propiedades en un proceso asumen valores que son independientes de su ubicación espacial, ya sea porque se considera homogénea o porque se define una característica representativa de ella. Por el contrario, un modelo distribuido pone en evidencia explícita la dependencia espacial de estas propiedades. Los primeros se rigen, ya sea por ecuaciones algebraicas o diferenciales ordinarias; los segundos por ecuaciones diferenciales parciales.

La solución de modelos de parámetros concentrados es bastante más simple que aquellas usadas en la solución de modelos de parámetros distribuidos. En algunos casos, la solución de éstos se logra luego de resolver un conjunto de aproximaciones a modelos de parámetros concentrados.

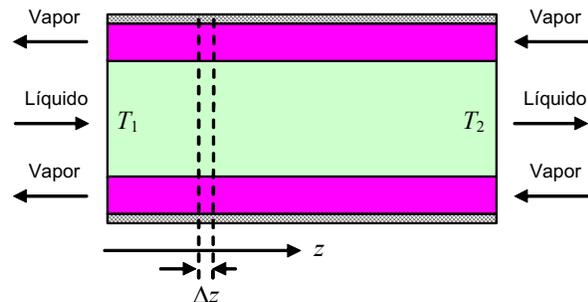
Ejemplo 1.12. Considere un intercambiador de calor como se muestra en la Fig. 1.9(b). En este caso la ecuación que describe el comportamiento del sistema en función de la longitud del intercambiador esta dada por la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales,

$$\rho c_p A \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p v A \frac{\partial T}{\partial z} = \pi D U (T_{st} - T),$$

donde v es la velocidad media del fluido, U es el coeficiente de transferencia entre el vapor y el líquido en el tubo, T_{st} es la temperatura del vapor saturado, D diámetro interno del intercambiador, A es el área transversal del intercambiador, c_p calor



a) transbordador espacial



b) intercambiador de calor

Fig. 1.9 Clasificación de modelos; a) tiempo variante e invariante, b) parámetros concentrados y distribuidos.

específico del líquido y ρ su densidad. En el caso de parámetros concentrados está descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$$\rho c_p A \frac{dT_2}{dt} = \pi DU (T_{st} - T_1) - c_p v A (T_2 - T_1),$$

donde se considera que la temperatura de salida T_2 es la misma temperatura dentro del reactor. ♣

1.4 Principios Básicos de Modelación de Sistemas

La experimentación es la herramienta principal para obtener modelos de procesos, pero este conocimiento obtenido de los fenómenos que rigen el comportamiento de muchos procesos ha sido formalizado mediante expresiones matemáticas. Las expresiones matemáticas obtenidas pueden ser usadas, a su vez, para el propósito de modelación. Es así como se distinguen los modelos fenomenológicos y los empíricos.

Modelos fenomenológicos, se obtienen mediante la aplicación de leyes que rigen los fenómenos de interés en el proceso. Es decir, se aplica la experiencia acumulada respecto a determinado fenómeno, traducida a leyes que sintetizan un comportamiento en particular.

Modelos empíricos, son los que se determinan de la observación directa de los resultados de excitar un proceso con entradas conocidas, y posterior correlación de la información obtenida. En estos casos se hace total abstracción de los patrones de comportamiento internos al proceso. La metodología usada para obtener modelos empíricos se le denomina identificación de sistemas.

El uso de la modelación fenomenológica requiere del conocimiento de los fenómenos que ocurren en el proceso, y de las leyes que rigen su comportamiento. Es por ello que un modelo de este tipo, desarrollado para un proceso en particular, puede ser representativo de otro proceso equivalente, luego de un ajuste apropiado de sus parámetros.

Dado que esta modelación puede realizarse conociendo la naturaleza de los fenómenos, es posible desarrollar modelos en ausencia del proceso. La obtención de modelos fenomenológicos se basa principalmente, en la aplicación de las leyes de conservación (balance) y del principio de mínima acción.

A. Ecuaciones de balance

En procesos industriales, los balances de materia y energía son de particular interés. La forma general que tienen los balances de una propiedad $P(t)$ en el sistema en un intervalo de tiempo es:

$$\frac{[\text{acumulación de } P]}{\text{período de tiempo}} = \left[\frac{\text{flujo de } P}{\text{que entra}} \right] - \left[\frac{\text{flujo de } P}{\text{que sale}} \right] + \frac{[\text{cantidad de } P \text{ generada}]}{\text{período de tiempo}} - \frac{[\text{cantidad de } P \text{ consumida}]}{\text{período de tiempo}}.$$

Haciendo el período de tiempo muy pequeño, $\Delta t \rightarrow 0$, bajo los supuestos de continuidad de las funciones involucradas se obtiene:

$$\frac{dP(t)}{dt} = F_e(t) - F_s(t) + C_g(t) - C_c(t).$$

Existen dos maneras de aplicar las ecuaciones de balance con el fin de determinar la estructura del modelo:

Balance macroscópico. El proceso en cuestión se caracteriza por propiedades globales que no representan variaciones espaciales. Así $F_e(t)$, $F_s(t)$, $C_g(t)$ y $C_c(t)$ son sólo función del tiempo y la ecuación anterior es sólo una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. El modelo obtenido corresponde a un sistema de parámetros concentrados.

Balance microscópico. En este caso el balance descrito por la ecuación anterior se realiza en un elemento de volumen dV , resultando la dependencia espacial de F y C . Estos balances dan lugar a un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales tanto con dependencia espacial como temporal. Tales modelos corresponden a un sistema con parámetros distribuidos.

B . Principio de Mínima Acción

Según este principio, que nació con la mecánica clásica, todo proceso está caracterizado por una función de energía $L\{\mathbf{x}(t)\}$ cuya evolución entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 es tal que su integral,

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L\{\mathbf{x}(t)\} dt ,$$

tiene el valor mínimo posible. El vector $\mathbf{x}(t)$ representa el vector de variables de estado del sistema. La función L en sistemas mecánicos se le llama Lagrangiano, el cual corresponde a la diferencia entre la energía cinética y potencial. La condición necesaria de mínimo para la función J es,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n ,$$

donde los Q_i representan las señales externas (fuerzas o torques) asociadas a la variable de estado x_i .

C . Ecuación Diferencial y Ecuaciones de Estado

La **ecuación diferencial** corresponde a la representación de un sistema a través de una ecuación diferencial de orden n y sobre una variable de estado,

$$a_n' \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}' \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1' \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m' \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}' \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1' \frac{du}{dt} + b_0 u ,$$

donde y es la variable de estado. Es normal considerar que se divide por a_n' , lo que resulta en,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u ,$$

o en forma resumida como $\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u}{dt^i}$, donde $a_n = 1$.

Ejemplo 1.13. Escriba una ecuación diferencial que describa el circuito de la Fig. 1.10. **R.:** En este caso se tiene que $e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_c(t)$ y además que $i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$. Por lo tanto, $e(t) = RC \frac{dv_c(t)}{dt} + LC \frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + v_c(t)$, lo que se puede escribir ordenadamente como, $\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_c(t) = \frac{1}{LC} e(t)$, por lo que $n = 2$, $m = 0$, $a_1 = R/L$, $a_0 = 1/(LC)$ y $b_0 = 1/(LC)$. ♣

En el caso de las **ecuaciones de estado**, el sistema se representa por un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ilustrar el concepto de estado de un sistema consideremos el circuito mostrado en la Fig. 1.10 y definiendo,

- variables de estado: $x_1(t) = v_c(t), x_2(t) = i(t)$,
- entrada: $u(t) = e(t)$,
- salida: $y(t) = i(t)$,

el modelo se puede escribir como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

De esta forma se puede ver que cualquier variable de salida que se quiera definir estará determinada por estas variables de estado. El número de variables de estado es el orden del sistema y está íntimamente ligado con el número de acumuladores de energía que son l.i.. En forma general la ecuación de estado de un sistema queda representada por,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}),$$

o en sus componentes,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \\ \vdots \\ h_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \end{bmatrix}.$$

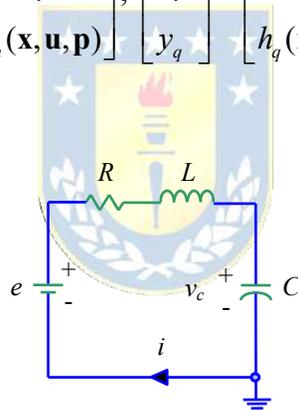


Fig. 1.10 Circuito serie RLC.

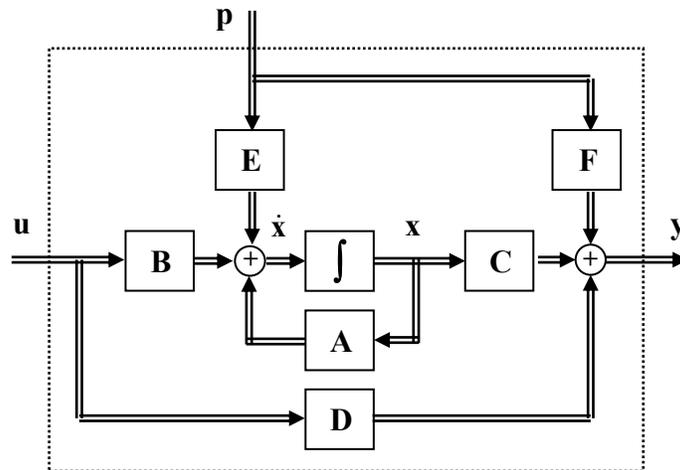


Fig. 1.11 Diagrama en bloques de las ecuaciones lineales dinámicas generalizadas.

en donde, $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T$ es el vector de variables de estado, $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_p]^T$ es el vector de entradas, $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_q]^T$ es el vector de salidas, $\mathbf{p} = [p_1 \dots p_m]^T$ es el vector de perturbaciones. La segunda ecuación siempre representa las mediciones que podemos realizar, ya sea ficticias o reales. En el caso lineal se puede escribir,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{p}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{p},$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} , y \mathbf{F} son matrices de parámetros con dimensiones apropiadas. Si hay n variables de estados, entonces siempre se cumple que las dimensiones de cada componente son; \mathbf{x} : n , \mathbf{u} : p , \mathbf{p} : m , \mathbf{y} : q , \mathbf{A} : $n \cdot n$, \mathbf{B} : $n \cdot p$, \mathbf{C} : $q \cdot n$, \mathbf{D} : $q \cdot p$, \mathbf{E} : $n \cdot m$, y \mathbf{F} : $q \cdot m$, respectivamente. Una representación en diagrama de bloques se muestra en la Fig. 1.11.

1.5 Transformaciones de Similitud en Ecuaciones de Estado

Las transformaciones de similitud representan un cambio de coordenadas de las variables de estado, y están expresadas por una matriz invertible de manera que $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, donde \mathbf{x} es el vector de estados original y \mathbf{z} es el nuevo vector de estados, por lo tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}$ y por ende $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{T}^{-1}d\mathbf{z}/dt$ con lo que la representación original $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{p}$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{p}$, queda,

$$\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{p}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{p},$$

multiplicando la primera ecuación - por la izquierda - por \mathbf{T} , se obtiene finalmente,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{p}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{p},$$

Normalmente se acostumbra definir nuevas matrices de parámetros. Es decir, $\mathbf{A}_T = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{B}_T = \mathbf{T}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_T = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{D}_T = \mathbf{D}$, $\mathbf{E}_T = \mathbf{T}\mathbf{E}$, $\mathbf{F}_T = \mathbf{F}$. Por lo que la representación alternativa quedaría,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_T\mathbf{z} + \mathbf{B}_T\mathbf{u} + \mathbf{E}_T\mathbf{p}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}_T\mathbf{z} + \mathbf{D}_T\mathbf{u} + \mathbf{F}_T\mathbf{p},$$

Es importante destacar que los vectores de entrada \mathbf{u} , perturbaciones \mathbf{p} y la salida \mathbf{y} no son alterados, tan sólo las matrices de parámetros y las variables de estado originales han sido modificadas. Un caso particular interesante y útil es la transformación de similitud que trasforma la matriz \mathbf{A} en una matriz diagonal $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, así debemos encontrar \mathbf{T} tal que, $\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{\Lambda}$ o bien $\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Lambda}$. Sea, $\mathbf{T}^{-1} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$, por lo tanto, $\mathbf{A}[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, lo que resulta en $[\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2, \dots, \lambda_n\mathbf{v}_n]$, por lo tanto, los \mathbf{v}_i que componen \mathbf{T}^{-1} son los que cumplen con,

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

es decir, las columnas de \mathbf{T}^{-1} son los vectores propios de \mathbf{A} .

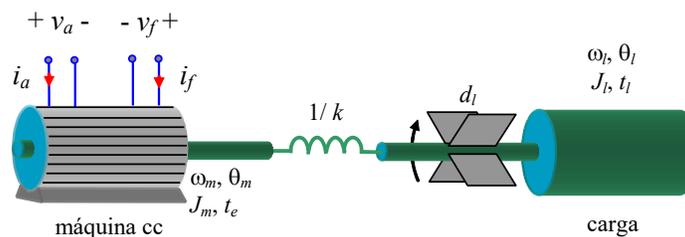


Fig. 1.12 Accionamiento en c.c. con eje flexible.

Ejemplo 1.14. El sistema de la Fig. 1.12 tiene el modelo dado por, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/J_m & k_m/J_m \\ 0 & -d_l/J_l & 1/J_l & 0 \\ k & -k & 0 & 0 \\ -k_m/L & 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$,

y $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ver anexo), considerando a $x_1 = \omega_m$, $x_2 = \omega_l$, $x_3 = t$, $x_4 = i_a$, $u = v_a$, $p = t$. Si por el contrario, las variables de

estado requeridas son $z_1 = \omega_l$, $z_2 = \omega_m - \omega_l$, $z_3 = t$, $z_4 = i_a$, entonces, \mathbf{T} es, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y por lo tanto las matrices de la

nueva representación son, $\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} -d_l/J_l & 0 & 1/J_l & 0 \\ d_l/J_l & 0 & -1/J_m - 1/J_l & k_m/J_m \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -k_m/L & -k_m/L & 0 & -R/L \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$, y $\mathbf{e}_T = \begin{bmatrix} -1/J_l \\ 1/J_l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ♣

1.6 Linealización

Como se mencionó en el capítulo anterior la linealización es una técnica para simplificar un modelo y tiene por objetivo en particular la obtención de un modelo lineal. La ventaja de los modelos lineales reside en la abundante cantidad de herramientas para el análisis de éstos y la posibilidad de obtener una solución en forma analítica de su comportamiento.

Analicemos el caso de un sistema monovariante descrito por la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x),$$

y consideremos un punto cualquiera x_o en la trayectoria de x . Así desarrollando en serie de Taylor la parte derecha de la ecuación se obtiene:

$$f(x) = \frac{1}{0!} f(x)|_{x=x_o} + \frac{1}{1!} \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_o} (x-x_o) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_o} (x-x_o)^2 + \dots,$$

considerando tan sólo el término de primer orden, tenemos,

$$\dot{x} = f(x) = \frac{1}{0!} f(x)|_{x=x_o} + \frac{1}{1!} \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_o} (x-x_o) = f(x_o) + \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_o} (x-x_o).$$

Si se define la variable desviación $\Delta x = x - x_o$ como la diferencia entre la variable x y el punto donde se hizo la linealización x_o . En particular, si se supone que el punto de linealización corresponde a un punto de equilibrio del sistema, es decir

$$\dot{x}|_{x_o} = \frac{dx}{dt} \Big|_{x_o} = f(x)|_{x_o} = f(x_o) = 0,$$

entonces, al derivar la expresión $\Delta x = x - x_0$ se tiene,

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \dot{x} - \dot{x}_0 \\ &= \cancel{f(x_0)} + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) \\ &= \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x \\ &= a(x_0) \Delta x\end{aligned}$$

el cual corresponde a un modelo lineal en Δx .

En general, si consideramos un sistema no-lineal MIMO como,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}),$$

o en sus componentes,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \\ \vdots \\ h_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \end{bmatrix},$$

una representación lineal en torno a un punto de operación dado por \mathbf{u}_0 , \mathbf{x}_0 , \mathbf{p}_0 , \mathbf{y}_0 es,

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{E} \Delta \mathbf{p}, \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F} \Delta \mathbf{p},$$

donde, $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}},$

$\mathbf{E} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}}, \quad \mathbf{F} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0 \\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0}};$ y $\Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{p}$, y $\Delta \mathbf{y}$, son variaciones de \mathbf{x} , \mathbf{u} , \mathbf{p} e \mathbf{y} ,

respectivamente, en torno al punto de operación dado por \mathbf{u}_0 , \mathbf{x}_0 , \mathbf{p}_0 , \mathbf{y}_0 . Nótese que en el caso no-lineal \mathbf{u}_0 , \mathbf{x}_0 , y \mathbf{p}_0 satisfacen,

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{p}_0).$$

En general, al tener un valor para las entradas \mathbf{u}_0 y \mathbf{p}_0 , se encuentran los valores de \mathbf{x}_0 que satisfacen la expresión anterior, los valores de \mathbf{y}_0 se determinan de,

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{p}_0).$$

Ejemplo 1.15. Considere el estanque piramidal invertido de la Fig. 1.13(a), cuyo modelo dinámico está dado por, $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a^2(p_1 + u - k_v \sqrt{gx_1}) / x_1^2 \\ 3a^2(p_1 p_2 - (p_1 + u)x_2) / x_1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \end{bmatrix},$$

donde x_1 es la altura de la columna de agua en el estanque h , x_2 es la concentración de producto c_s , u es el flujo de entrada del líquido sin producto f_a , p_1 es el flujo de entrada de líquido con producto f_m y p_2 es la concentración del producto en este último c_m . Este modelo es claramente no lineal, para linealizarlo encontramos sus derivadas con respecto a las variables de estado, entrada y perturbaciones para obtener el modelo,

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 \end{bmatrix}_{u_o, p_o, x_o} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u \\ \partial f_2 / \partial u \end{bmatrix}_{u_o, p_o, x_o} \Delta u + \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial p_1 & \partial f_1 / \partial p_2 \\ \partial f_2 / \partial p_1 & \partial f_2 / \partial p_2 \end{bmatrix}_{u_o, p_o, x_o} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \end{bmatrix},$$

cuyo resultado es,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{u_o, p_o, x_o} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2 g k_v}{2x_{1o}^2 \sqrt{g x_{1o}}} - \frac{2a^2(p_{1o} + u_o - k_v \sqrt{g x_{1o}})}{x_{1o}^3} & 0 \\ -\frac{9a^2(p_{1o} p_{2o} - (p_{1o} + u_o)x_{2o})}{x_{1o}^4} & -\frac{3a^2(p_{1o} + u_o)}{x_{1o}^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2 g k_v}{2x_{1o}^2 \sqrt{g x_{1o}}} & 0 \\ 0 & -\frac{3a^2(p_{1o} + u_o)}{x_{1o}^3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{u_o, p_o, x_o} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{x_{1o}^2} \\ -\frac{3a^2 x_{2o}}{x_{1o}^3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \end{bmatrix}_{u_o, p_o, x_o} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{x_{1o}^2} & 0 \\ \frac{3a^2(p_{2o} - x_{2o})}{x_{1o}^3} & \frac{3a^2 p_{1o}}{x_{1o}^3} \end{bmatrix}.$$

Nótese que el modelo resultante, $\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u + \mathbf{E}\Delta \mathbf{p}$, tiene matrices \mathbf{A} , \mathbf{b} y \mathbf{E} dependientes del punto de operación. Resultados de la simulación del sistema se muestran en el Fig. 1.13(b). La linealización corresponde a una entrada $u_o = 1$ lt/s. Claramente, el sistema lineal indica otro punto de operación y otra dinámica al alterar la entrada del sistema. Esto era esperable dado que la linealización es un método aproximado, que es más exacto en la medida que se está cerca del punto de operación.



Ejemplo 1.16. Linealizar y simular el circuito elevador ilustrado en la Fig. 1.14(a). **R.:** El circuito de la Fig. 1.14(a) tiene

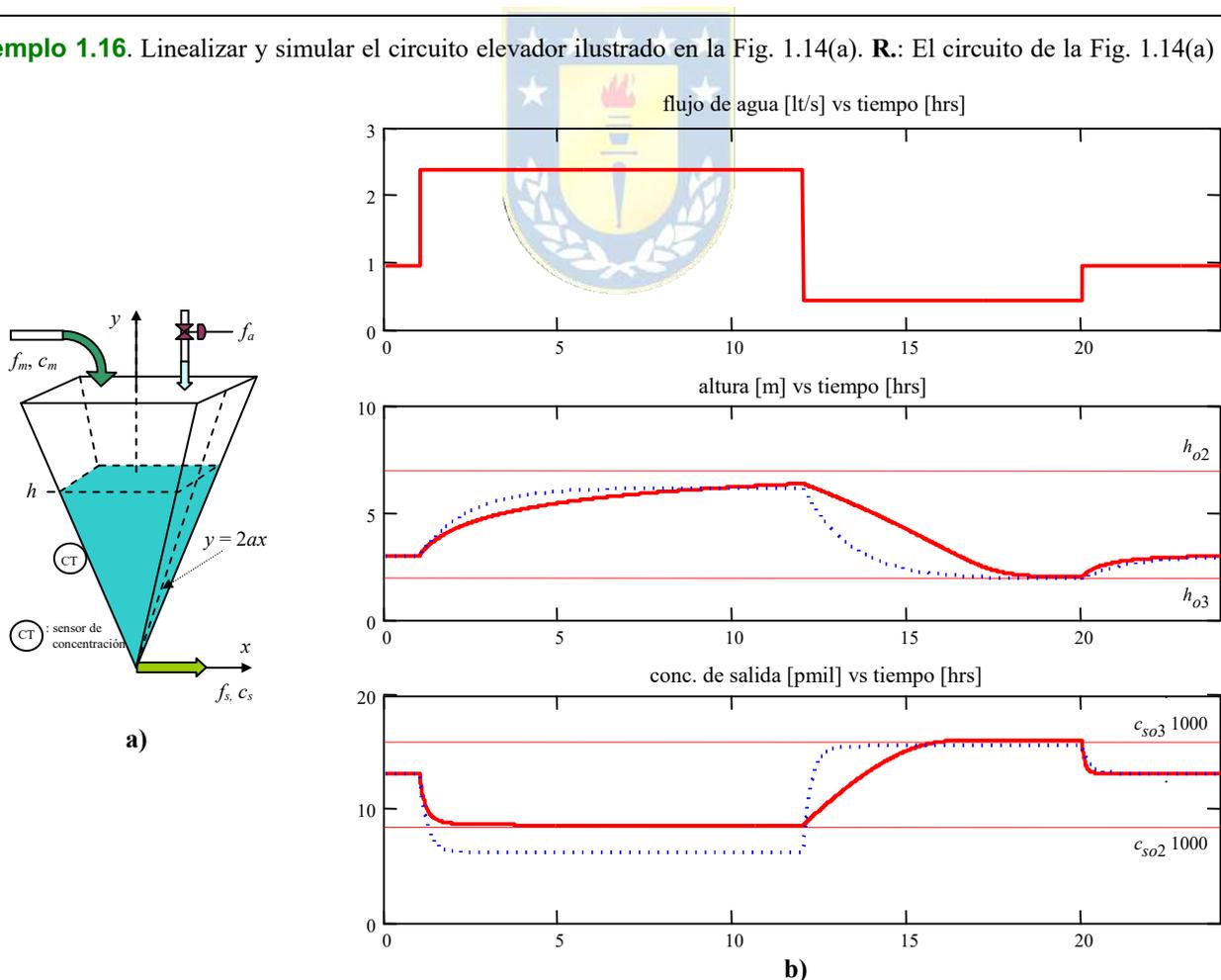


Fig. 1.13 Estanque piramidal invertido; **a)** estanque, **b)** simulación del sistema original (línea continua) y del sistema linealizado (línea segmentada).

por modelo promedio a $e = L \frac{di}{dt} + v(1-d)$ e $i(1-d) = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$ (parámetros en el anexo). Al linealizarlo se encuentra que,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1-d_o}{C} \\ -\frac{1-d_o}{L} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{i_o}{C} \\ \frac{v_o}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}.$$

Nótese que el modelo resultante, $\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u + \mathbf{e}\Delta \mathbf{p}$, tiene matrices \mathbf{A} y \mathbf{b} dependientes del punto de operación. Los cuales están dados por $e_o = v_o(1-d_o)$ e $i_o(1-d_o) = \frac{v_o}{R}$, por lo que dados e_o y d_o (entradas) se puede encontrar v_o e i_o . Resultados de la simulación se encuentran también en la Fig. 1.14(b) y (c). Nótese que la linealización entrega resultados equivocados tanto dinámica como estáticamente; sin embargo, ante cambios de la perturbación (señal e), es exacta, lo que se debe al efecto lineal que tiene la perturbación sobre el sistema real. ♣

1.7 Alcances del Curso 543 214 - 547 309

En este curso se estudiarán sistemas lineales del tipo continuo y discreto. Será de especial importancia la modelación de éstos mediante el análisis fenomenológico, para lo cual se revisarán las leyes físicas básicas de la ingeniería. Los sistemas mecánicos, hidráulicos, electromecánicos y térmicos serán revisados acuciosamente. La modelación de sistemas eléctricos se asume conocida.

Las señales serán analizadas formalmente en este curso para dar paso al estudio de las transformaciones de éstas, comenzando por la *Transformada de Laplace* para señales continuas. Las señales discretas serán analizadas como el resultado de una transformación de señales continuas. Para el estudio de éstas se utilizará la *Transformada Z*. La *Transformada de Fourier* de señales continuas y discretas será introducida sobre la base de la necesidad de un operador de uso fácil para señales periódicas.

Los modelos de sistemas estarán basados en ecuaciones diferenciales de orden n o en n ecuaciones de estado. Se revisarán distintos métodos de solución de estas ecuaciones con el ánimo de introducir algunos conceptos nuevos como lo es la *Matriz de Transición* de sistemas y sus propiedades. Los resultados anteriores darán paso al concepto de *Función de Transferencia* – uno de los más importantes en sistemas

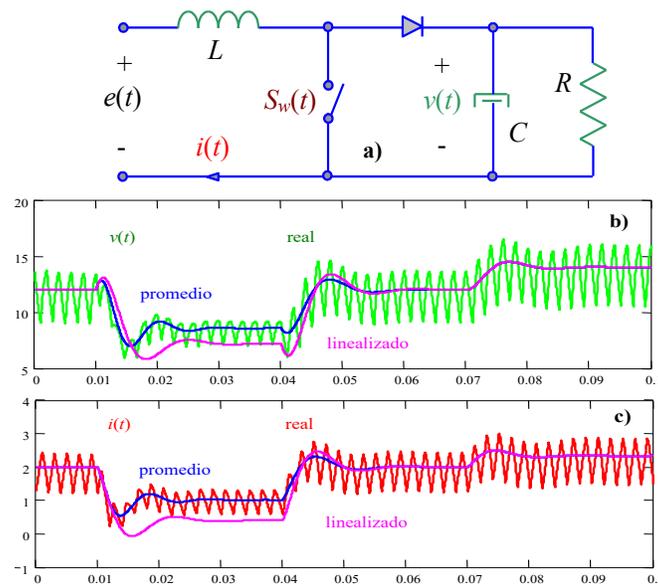


Fig. 1.14 Convertidor dc/dc elevador; a) circuito, b) comparación de voltajes, c) comparación de corrientes.

– y con ello los conceptos de *polos* y *ceros*, para finalmente presentar una alternativa de representación gráfica de la Función de Transferencia conocido como *Diagrama de Bode*.

Finalmente, se revisarán los conceptos de *estabilidad* de acuerdo al tipo de representación del sistema. Con esto nace el concepto de *estabilidad de entrada/salida* – relacionado con los polos del sistema – y el de *estabilidad interna*, este último relacionado con los *valores propios* de la representación en variables de estado.

1.8 Ejercicios Propuestos.

Resuelva los problemas siguientes. Anote todo su trabajo.

A . Nivel básico.

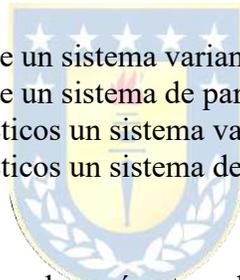
- 1.- Indique por lo menos tres objetivos de estudio en las realidades físicas ilustradas en la Fig. 1.15.
- 2.- Identifique para las realidades físicas anteriores todas las cantidades posibles asociadas a cada uno de los objetivos de estudio propuestos.
- 3.- Clasificar las cantidades anteriores – para cada objetivo – en variables de estado $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots]^T$, salidas $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots]^T$, entradas $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots]^T$, perturbaciones $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots]^T$ y parámetros.
- 4.- Clasifique los sistemas anteriores en lineal/no-lineal, continuo/discreto, estático/dinámico, causal/no-causal, variante/invariante, concentrado/distribuido.

B . Nivel intermedio.

- 1.- Cómo se identifica matemáticamente un sistema variante/invariante.
- 2.- Cómo se identifica matemáticamente un sistema de parámetros concentrados/distribuidos.
- 3.- Cómo se identifica en términos prácticos un sistema variante/invariante.
- 4.- Cómo se identifica en términos prácticos un sistema de parámetros concentrados/distribuidos.

C . Nivel avanzado.

- 1.- Detalle lo más posible cinco sistemas de parámetros distribuidos que se pueden encontrar en las variadas disciplinas de la ingeniería.
- 2.- Detalle o más posible cinco sistemas que sean intrínsecamente discretos o que contengan alguna componente discreta importante.
- 3.- Discuta si un computador personal es un sistema de parámetros concentrados o distribuidos.
- 4.- Discuta si una tarjeta de red es variante o invariante en el tiempo.



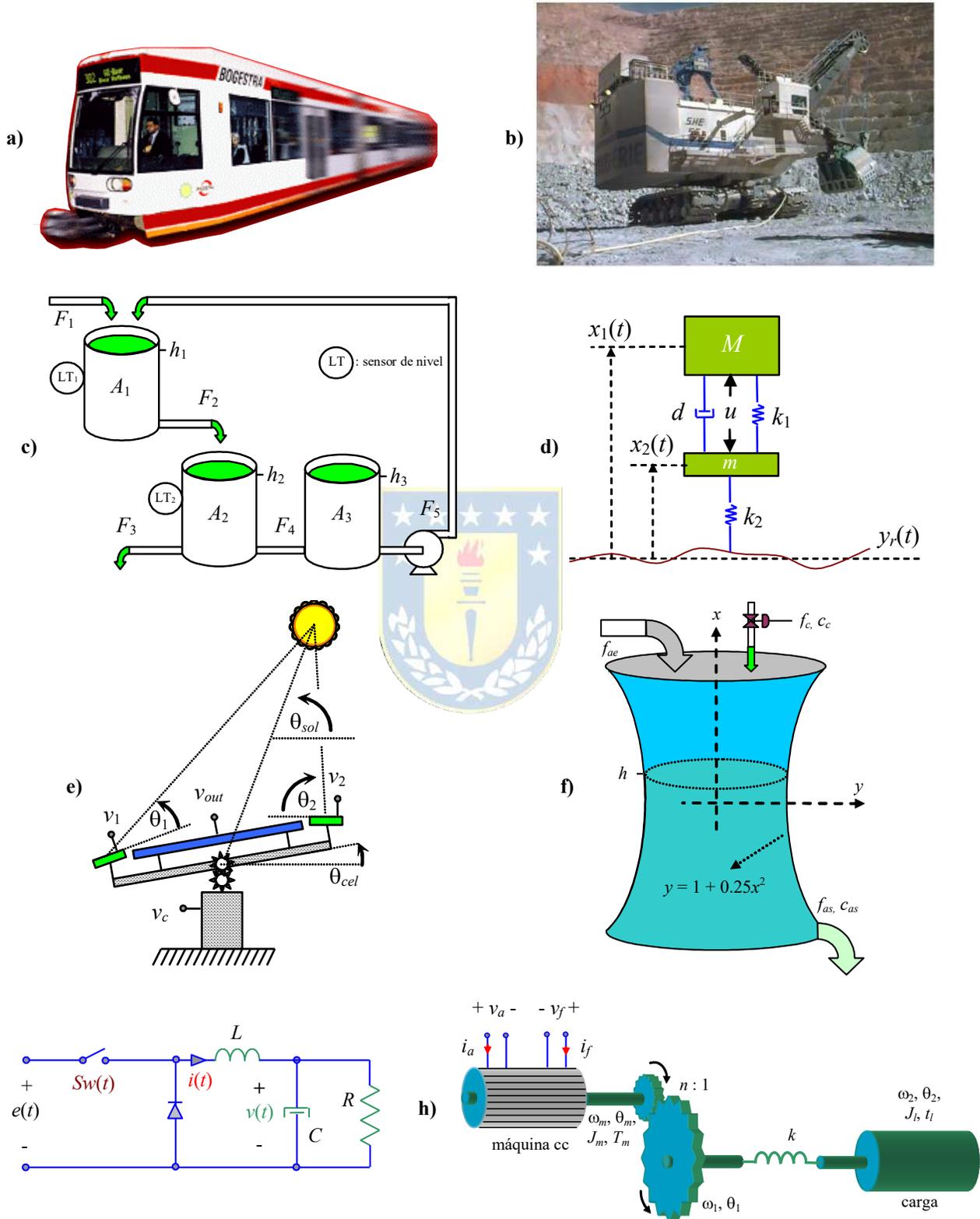


Fig. 1.15 Sistemas para ejercitar; **a)** tren, **b)** pala eléctrica, **c)** estanques, **d)** amortiguación de un automóvil, **e)** generación solar, **f)** estanque diluidor, **g)** circuito reductor de tensión, **h)** motor de cc con eje flexible

2 Señales en Sistemas

Las variables en sistemas son señales que evolucionan de acuerdo a las de entrada. Para caracterizar los sistemas se introducen señales estándar que son revisadas en este capítulo. Se destaca las señales escalón, rampa y sinusoidal. Se introduce la señal delta tanto continua como discreta como una necesidad matemática para el análisis de sistemas. Se revisa la transformación más recurrida en el análisis de señales como son la Transformada de Laplace y se introduce y revisa en profundidad la Transformada Z para sistemas discretos.

2.1 Introducción

En este capítulo se introduce formalmente el concepto de señal y se definen las señales normalizadas. A partir de operatorias sobre señales continuas se introducen las señales discretas y por dualidad se definen las señales discretas normalizadas.

A. Conceptos

Entre los conceptos más importantes está el de señal y el de soporte de ésta.

Def.: **Señal** es una función matemáticamente definida que representa la evolución de una magnitud de un proceso, Fig. 2.1, Fig. 2.2.

Def.: El **soporte** de una señal corresponde al rango de la variable independiente en el cual la señal no es idénticamente nula. Así, D es el soporte de $f(t)$ si:

$$f(t) \begin{cases} = 0 & t \notin D \\ \neq 0 & t \in D \end{cases}$$

Def.: Una señal se dice con **soporte positivo** si no es equivalentemente nula para todo valor real *positivo* de la variable independiente.

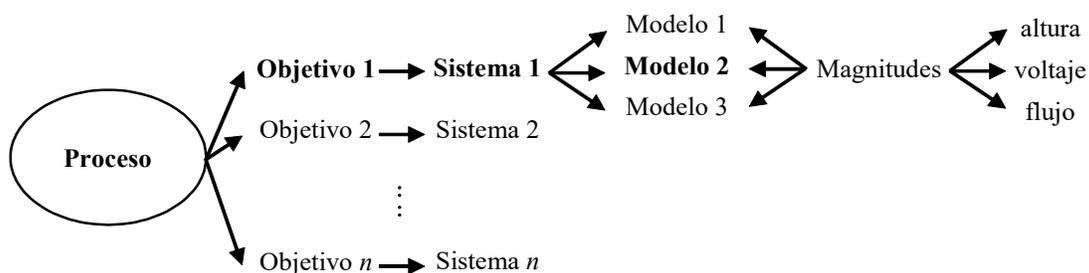


Fig. 2.1 Asociación de magnitudes a un sistema.

Def.: Una señal se dice con **soporte negativo** si no es equivalentemente nula para todo valor real *negativo* de la variable independiente.

Def.: Una señal se dice con **soporte compacto** si no es equivalentemente nula en un *rango determinado* de valores de la variable independiente.

Ejemplo 2.1. En la Fig. 2.3 se muestran las señales definidas por,

$$f_1(t) = \begin{cases} A \sin(2\pi ft - \pi) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad f_2(t) = \begin{cases} 2 & t \in [2, 3] \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

donde puede verse que la primera tiene soporte positivo mientras que la segunda tiene soporte compacto. ♣

B. Propiedades

Simetría. (Señales pares e impares, Fig. 2.4) .

La señal $x_p(t)$ es par si $x_p(t) = x_p(-t)$ (simetría c/r eje y).

La señal $x_i(t)$ es impar si $x_i(t) = -x_i(-t)$ (antisimetría c/r eje y).

En señales pares se cumple que: $\int_{-T}^T x_p(t) dt = 2 \int_0^T x_p(t) dt$, $\int_{-T}^0 x_p(t) dt = \int_0^T x_p(t) dt$.

En señales impares se cumple que: $\int_{-T}^T x_i(t) dt = 0$, $\int_{-T}^0 x_i(t) dt = -\int_0^T x_i(t) dt$.

Pro.: Toda señal $x(t)$ puede ser descompuesta en una señal par $x_p(t)$ y una impar $x_i(t)$, tal que $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$, donde,

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad \text{y} \quad x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

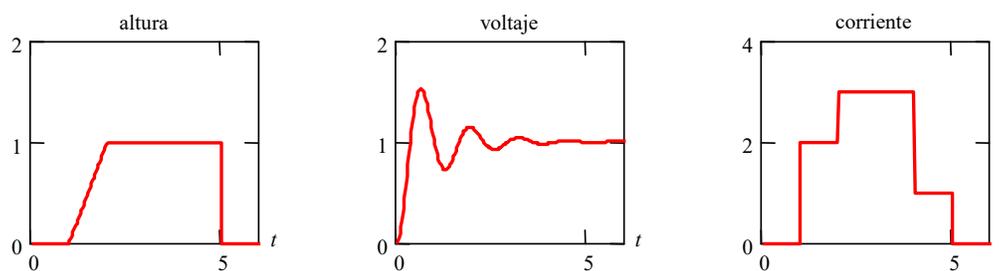


Fig. 2.2 Evolución de magnitudes en el tiempo.

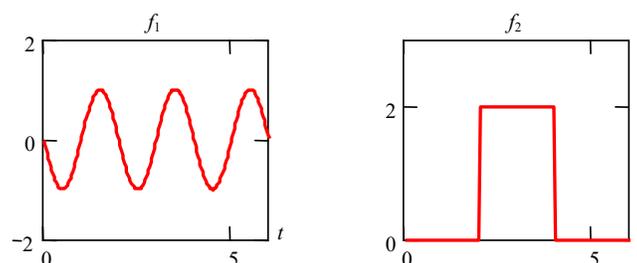


Fig. 2.3 Soporte en señales.

Periodicidad. $x_T(t)$ es periódica si $x_T(t) = x_T(t + kT)$, $k \in \mathbb{Z}$ de período T , o bien, $x_T(t) \in [a, b] \equiv x_T(t) \in [a + kT, b + kT]$.

Ortogonalidad. Dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son ortogonales en $[a, b]$ si $\int_a^b x_1(t)x_2(t)dt = 0$ ó $\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = 0$ ó $\|x_1(t)\| \|x_2(t)\| \cos(\alpha) = 0$.

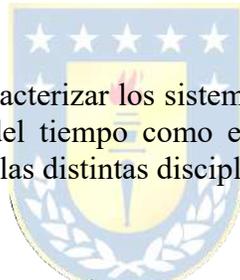
C . Índices de Señales

Son valores numéricos que tratan de describir una característica de la señal. Entre los más utilizados están:

Esperanza	Media: $f_{avg} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$	Momento estadístico 1 ^{ero}
Varianza	Momento estadístico 2 ^{do}	Energía
Potencia	Entropía	RMS: $f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t)dt}$

2.2 Señales de Prueba

Las señales de prueba se utilizan para caracterizar los sistemas. La señal se aplica a la entrada de éstos para estudiar la respuesta en el plano del tiempo como en el de la frecuencia. A continuación se introducirán las señales más utilizadas en las distintas disciplinas de la ingeniería.



A . Impulso

El impulso $\delta(t)$ es una función continua “inventada” para apoyar el análisis de sistemas lineales. Hay tres formas de definirla. Estas son,

Def.: El impulso $\delta(t)$ es una función de valor no nulo en $t = 0$ y de área unitaria; matemáticamente,

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$

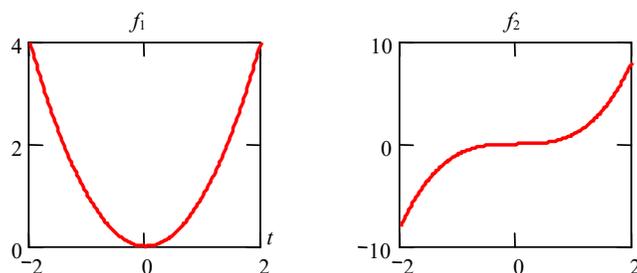
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$


Fig. 2.4 Señal par x^2 e impar x^3 .

Def.: El impulso $\delta(t)$ es una función definida en función de la función auxiliar $\delta_T(t)$ - ver Fig. 2.5(b) - como,

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta_T(t).$$

Def.: El impulso $\delta(t)$ es una función definida en función de sus valores instantáneos como,

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}.$$

Notar que, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) f(0) dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) dt = f(0)$.

B. Escalón

El escalón $u(t)$ es una función continua cuya definición se ajusta a la percepción intuitiva de ésta. Hay también tres formas de definirla; éstas son,

Def.: El escalón $u(t)$ se puede definir mediante una integral como $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$.

Def.: El escalón $u(t)$ se puede definir mediante una función auxiliar como $u(t) = \lim_{T \rightarrow 0} u_T(t)$, Fig. 2.6(b).

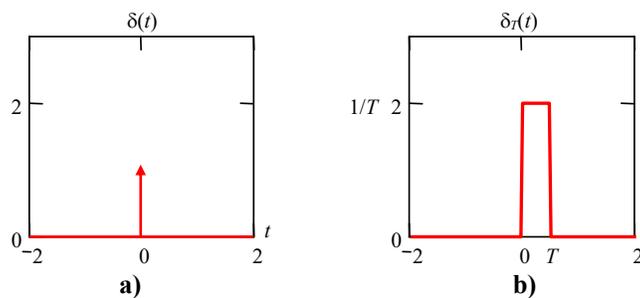


Fig. 2.5 Señales de prueba; a) impulso, b) función auxiliar $\delta_T(t)$.

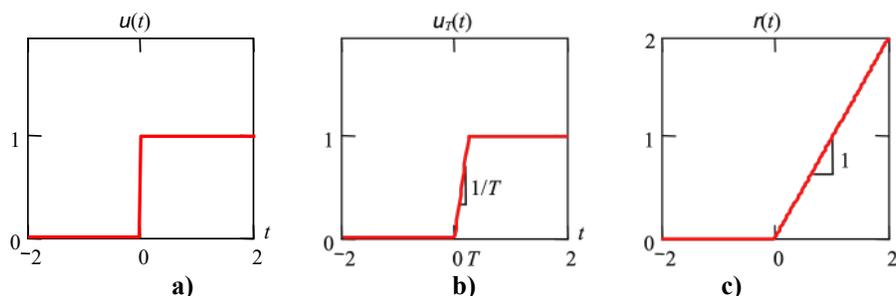


Fig. 2.6 Señales de prueba; a) escalón, b) función auxiliar, c) rampa.

Def.: El escalón $u(t)$ se puede definir por partes como $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$, Fig. 2.6(a).

C . Rampa

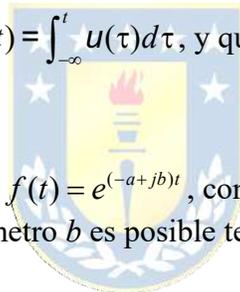
La rampa $r(t)$ es una función continua que se obtiene integrando el escalón. Sin embargo, otras definiciones también son válidas. Estas son,

Def.: La rampa $r(t)$ se puede definir mediante una integral como, $r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$.

Def.: La rampa $r(t)$ se puede definir por partes como $r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$, Fig. 2.6(c).

Def.: La rampa $r(t)$ se puede definir alternativamente como $r(t) = t u(t)$.

Notar que, $\frac{dr(t)}{dt} = u(t)$, $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$, $r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$, y que $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$.



D . Exponencial

La función exponencial se expresa como, $f(t) = e^{(-a+jb)t}$, con $j^2 = -1$.
Dependiendo del valor que posea el parámetro b es posible tener,

Con $b = 0$ exponencial real, $f(t) = e^{-at}$, Fig. 2.7.

- $a > 0$ exponencial decreciente.
- $a < 0$ exponencial creciente.

Con $b \neq 0$ exponencial compleja, $f(t) = e^{(-a+jb)t} = e^{-at} e^{jbt} = e^{-at} (\cos bt + j \sin bt)$, Fig. 2.8, donde el módulo es e^{-at} y la fase es bt .

E . Sinusoidal

La función sinusoidal se expresa como $f(t) = A \sin(\omega t + \phi) = A \sin(2\pi f t + \phi)$ y es mostrada en la Fig. 2.9; donde, A : amplitud, ω : frecuencia angular con $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, ϕ : fase.

F . Señales en sistemas

En esta sección se analiza la respuesta que presenta un sistema ante una entrada de prueba. En un primer caso analizamos el sistema mecánico lineal masa-resorte-amortiguador, al cual se le aplica en forma consecutiva aproximaciones de la función impulso. Estas aproximaciones son un pulso cuya duración disminuye mientras su amplitud aumenta manteniendo siempre el área unitaria. Los resultados son mostrados en la Fig. 2.10, donde se aprecia que la respuesta dada por el sistema converge a una oscilación de segundo orden.

Ahora se aplica una entrada que es una función sinusoidal de amplitud constante pero frecuencia variable. En la Fig. 2.11 puede verse que la respuesta del sistema es también una sinusoidal de igual frecuencia a la de entrada pero su amplitud depende de la frecuencia de entrada como se puede apreciar en la Fig. 2.11(b).

Finalmente se analiza el estanque cóncavo no lineal. A este sistema se le aplica una función de prueba sinusoidal de dos frecuencias distintas, y es posible apreciar que la respuesta del sistema ya no es una sinusoidal como se muestra en la Fig. 2.12, esto implica que en la salida existen frecuencias que no están en la entrada.

Además es posible apreciar que al aplicar la misma función de entrada pero en dos puntos de operación distintos la respuesta del sistema es diferente, lo que no ocurre en sistemas lineales.

2.3 Transformaciones sobre Señales

Las transformaciones se aplican sobre una o más señales para dar origen a otra señal. Entre las más conocidas están la normalización, discretización y convolución. Las transformaciones se dividen en simples como las aplicadas sobre una señal y las complejas (en el sentido de complicadas) como las aplicadas sobre dos señales.

A. Transformaciones Simples

Una función cualquiera puede ser modificada utilizando, $f(t) \rightarrow g(t) = \alpha f(at + b) + \beta$, con α , β , a , y b

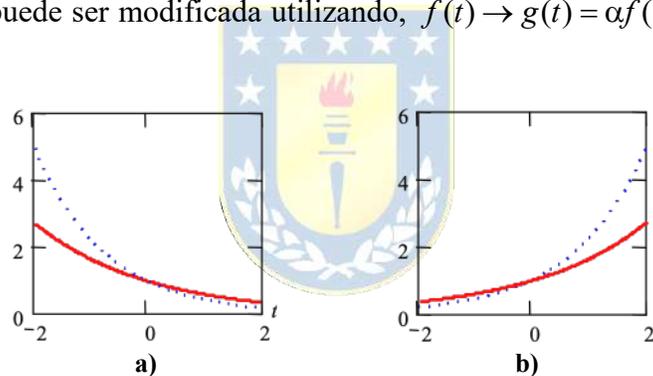


Fig. 2.7 Exponencial real, $b = 0$; **a)** decreciente ($a > 0$), **b)** creciente ($a < 0$).

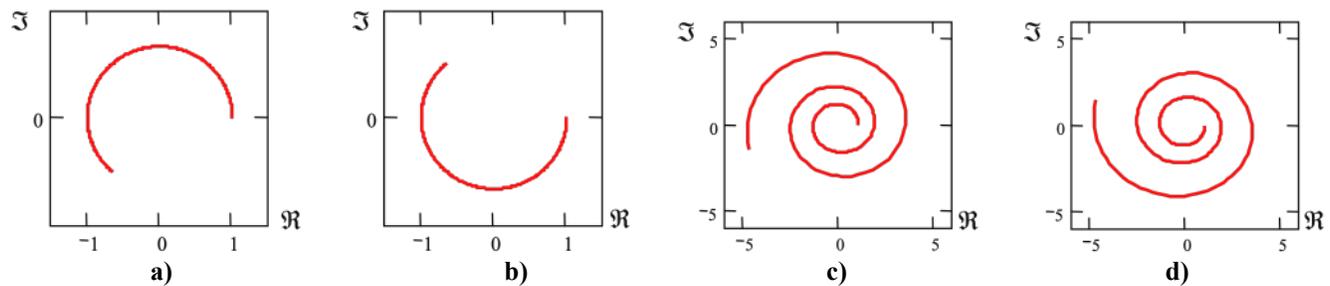


Fig. 2.8 Exponencial compleja; **a)** $a = 0, b > 0$, **b)** $a = 0, b < 0$; **c)** $a < 0, b > 0$, **d)** $a < 0, b < 0$.

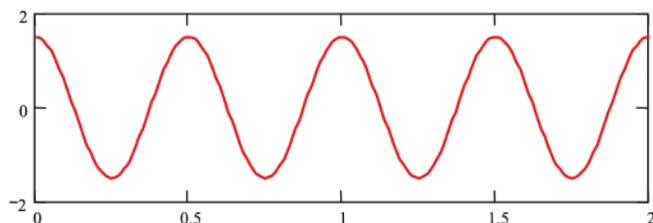


Fig. 2.9 Sinusoidal, $A = 1.5, T = 0.5, \phi = 90^\circ$.

como parámetros de la transformación.

Transformaciones sobre la variable dependiente, Fig. 2.13. Corresponden a $a = 1, b = 0$, por lo tanto,

$$f(t) \rightarrow g(t) = \alpha f(t) + \beta$$

$|\alpha| > 1$: Amplificación.

$|\alpha| < 1$: Atenuación.

$\alpha = 0$: Anulación.

$\alpha < 0$: Inversión, reflexión c/r eje $g(t) = \beta$.

$\beta > 0$: Corrimiento hacia arriba.

$\beta < 0$: Corrimiento hacia abajo.

Ejemplo 2.2. Normalización. Sea f_0 el mínimo de $f(t)$ y f_1 el máximo de $f(t)$, entonces, la señal $g(t) = \alpha f(t) + \beta$ es normalizada

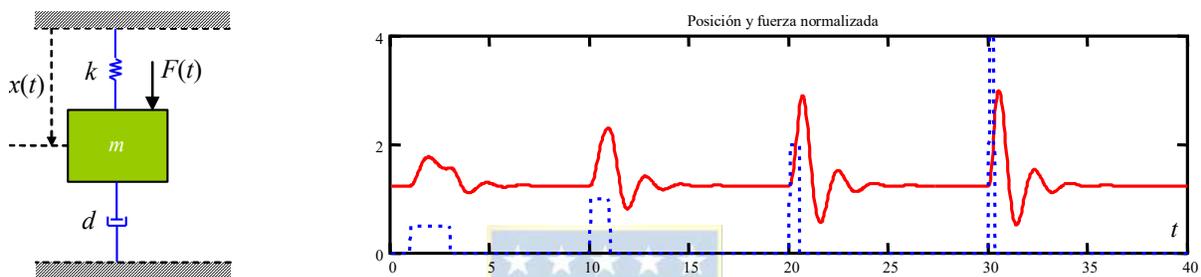


Fig. 2.10 Respuesta aproximada a impulso en $F(t)$; **a)** masa-resorte-amortiguador, **b)** respuesta.

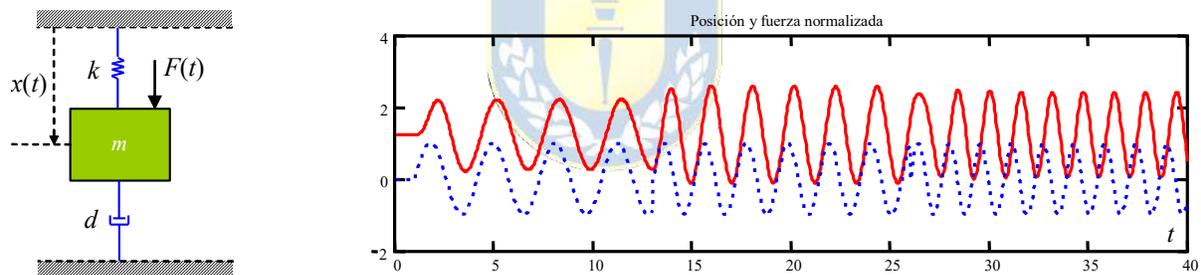


Fig. 2.11 Respuesta a entrada sinusoidal del sistema masa-resorte-amortiguador para varias frecuencias.

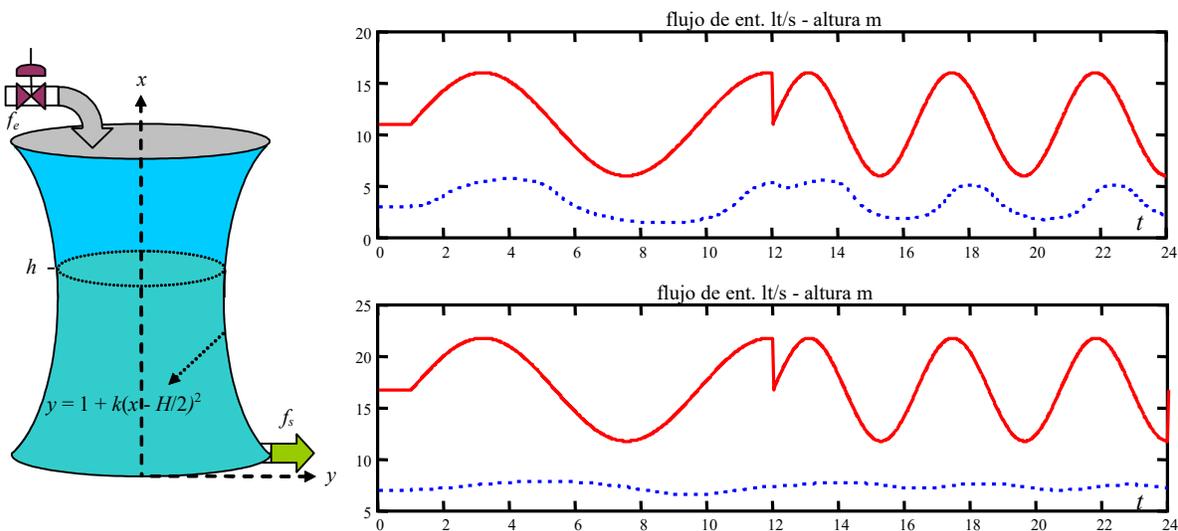


Fig. 2.12 Respuesta a entrada sinusoidal del sistema no-lineal (estanque) para dos puntos de operación.

entre sus máximos si $\alpha = \frac{1}{f_1 - f_0}$, $\beta = \frac{-f_0}{f_1 - f_0}$, quedando sus valores en el rango 0-1. Lo anterior es debido a que,

$$\begin{aligned} f(t) &\in [f_0, f_1] \\ f(t) - f_0 &\in [0, f_1 - f_0] \\ \frac{f(t) - f_0}{f_1 - f_0} &\in [0, 1] \\ \frac{f(t) - f_0}{f_1 - f_0} &= \frac{1}{f_1 - f_0} f(t) + \frac{-f_0}{f_1 - f_0} \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que la señal resultante es normalizada, pues su rango queda entre 0 y 1, Fig. 2.14. La normalización en muchos casos no se realiza entre el mínimo y el máximo, en cambio se realiza entre 0 y un valor nominal. ♣

Transformaciones sobre la variable independiente, Fig. 2.15. Corresponden a $\alpha = 1$, $\beta = 0$, por lo tanto,

$$f(t) \rightarrow g(t) = f(at + b)$$

$|a| < 1$: Dilatación.

$|a| > 1$: Compresión.

$a < 0$: Reflexión c/r eje $t = b$.

$b > 0$: Desplazamiento a la izquierda (derecha) con $a > (<) 0$.

$b < 0$: Desplazamiento a la derecha (izquierda) con $a > (<) 0$.

Ejemplo 2.3. Retardo. En este ejemplo se muestra el efecto de retardo que se produce en una correa transportadora, donde el flujo de entrada requiere un cierto tiempo t_r para llegar a la salida, como se muestra en la Fig. 2.16. Así, $f_e(t) = f_s(t - t_r)$ donde el retardo es posible calcularlo a partir del largo de la correa transportadora d y de la velocidad que esta posee v como $t_r = d/v$. Así la función de salida corresponde a una transformación sobre la variable independiente tiempo. ♣

Ejemplo 2.4. Desplazamiento. Una rampa desplazada queda como se muestra en la Fig. 2.17. La rampa es,

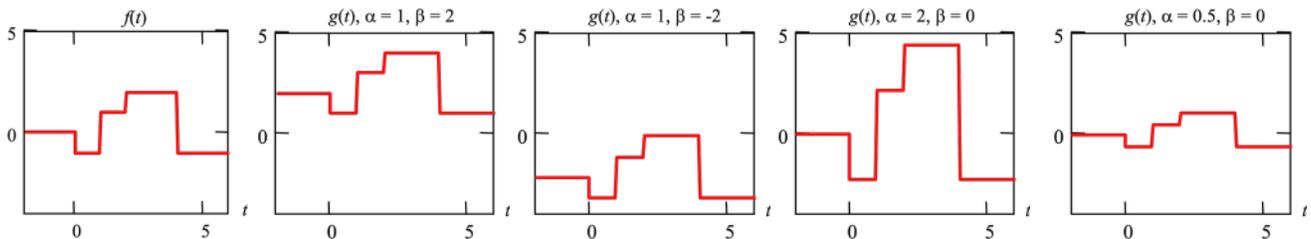


Fig. 2.13 Transformaciones sobre la variable dependiente.

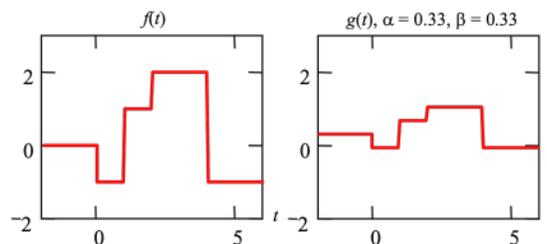


Fig. 2.14 Transformaciones sobre la variable dependiente: Normalización.

$$f(t) = r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases},$$

por lo que la rampa desplazada en 2 unidades de tiempo es,

$$g(t) = f(t-2) = r(t-2) = \begin{cases} 0 & t-2 < 0 \\ t-2 & t-2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ t-2 & t \geq 2 \end{cases},$$

en este caso se tiene, $b = -2$ (desplazamiento hacia la derecha). ♣

Ejemplo 2.5. Descomposición. Una señal puede ser escrita como combinación lineal de señales de prueba. En este caso se analiza la función ilustrada en la Fig. 2.18. En este caso, $f(t) = -u(t) + 2u(t-1) + u(t-2) - 3u(t-4)$, en donde la función original es compuesta por la suma de cuatro funciones escalón convenientemente amplificadas y desplazadas. ♣

Ejemplo 2.6. Una señal diente de sierra se puede descomponer como una suma de rampas como la ilustrada en la Fig. 2.19. La expresión general utilizando la expresión de cada diente es,

$$f(t) = 2r(t) - 2r(t-1) - 2u(t-1) + 2r(t-1) - 2r(t-2) - 2u(t-2) + \dots + 2r(t-k) - 2r(t-k-1) - 2u(t-k-1) + \dots,$$

esta señal, al igual que el caso anterior esta compuesta por una sumatoria de rampas y escalones que generan cada una de los dientes de la señal diente de sierra. Una expresión general es, $f(t) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} r(t-i) - r(t-i-1) - u(t-i-1)$. La expresión anterior es una representación alternativa a la Serie de Fourier de la señal periódica. ♣

B. Transformaciones Complejas

Convolución (Integral de Convolución)



Def.: Se llama **convolución** de $f(t)$ con $g(t)$ y se denota por $f(t)*g(t)$ a la integral,

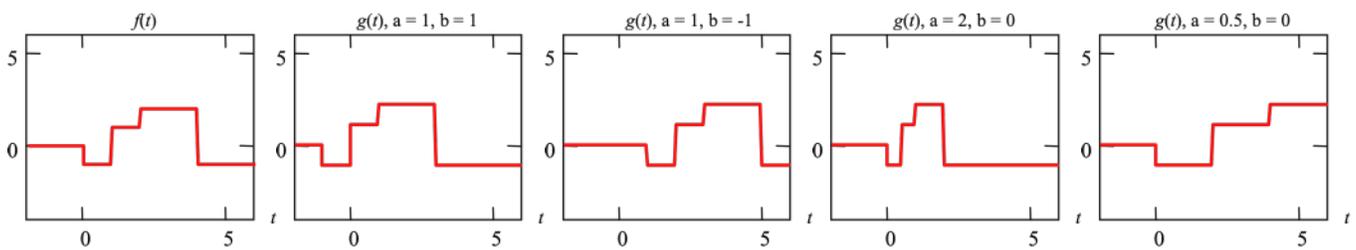


Fig. 2.15 Transformaciones sobre la variable independiente.

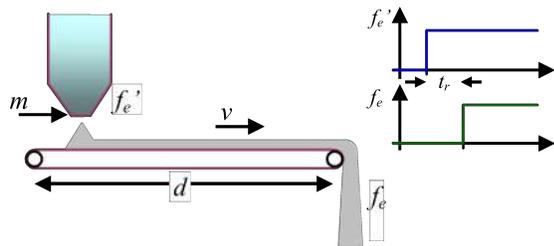


Fig. 2.16 Ejemplo de retardo.

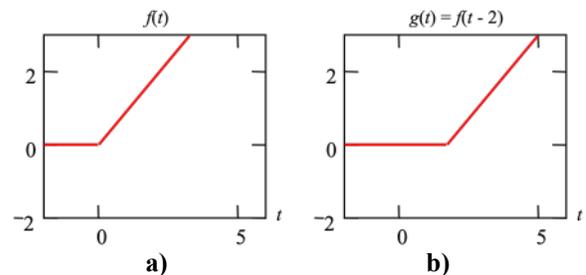


Fig. 2.17 Ejemplo de desplazamiento.

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = h(t).$$

Nótese que esta transformación utiliza dos señales para dar origen a otra señal.

Si $g(t)$ tiene *soporte positivo*, entonces,

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^0 f(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_0^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Si $f(t)$ tiene *soporte positivo*, entonces,

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_t^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

considerando que si $t - \tau = x$, entonces $-d\tau = dx$ y como $\tau|_t^{\infty}$, entonces $x|_0^{-\infty}$, por lo tanto,

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau - \int_0^{-\infty} f(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^0 f(x)g(t-x)dx.$$

Si $f(t)$ y $g(t)$ tienen *soporte positivo*, entonces,

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^0 f(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Importancia de la convolución

Si se aplica $f_e(t) = \delta(t)$ a un sistema; entonces, la salida del sistema es una función que llamaremos $h_{est}(t)$. Se encuentra que la salida $h(t)$ para una entrada arbitraria $f_e(t)$ cumple con $h(t) = f_e(t) * h_{est}(t)$. La demostración de esta importante propuesta se realizará más adelante.

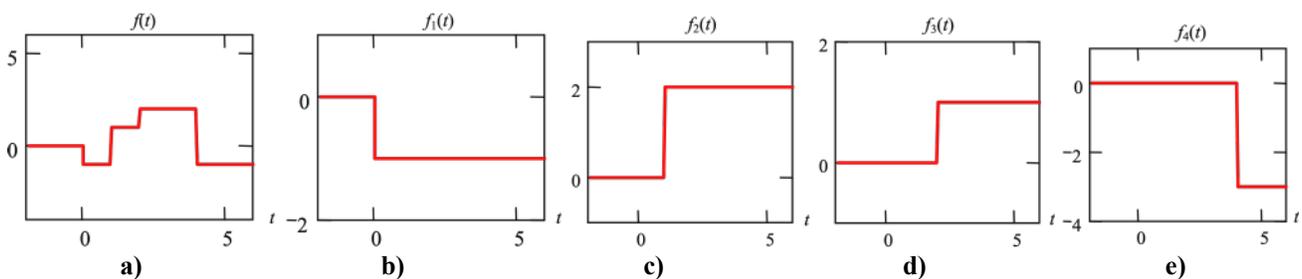


Fig. 2.18 Descomposición de señales; a) función compuesta, b)-c)-d)-e) señales básicas.

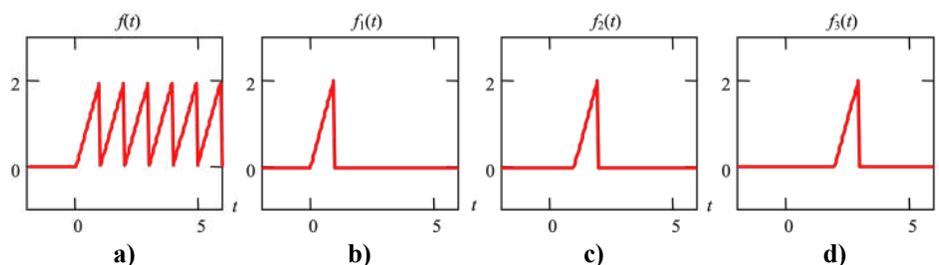


Fig. 2.19 Descomposición de señales; a) tren de rampas compuesta, b)-c)-d) rampas individuales.

Propiedades de la convolución

Conmutatividad,

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t).$$

Para demostrar la propiedad anterior se utiliza la definición de convolución,

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

considerando que si $t - \tau = x$, entonces $-d\tau = dx$ y como $\tau|_{-\infty}^{\infty}$, entonces $x|_{\infty}^{-\infty}$, por lo tanto,

$$f(t) * g(t) = -\int_{\infty}^{-\infty} f(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)dx = g(t) * f(t).$$

Distributividad con respecto a la suma,

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t).$$

Asociatividad,

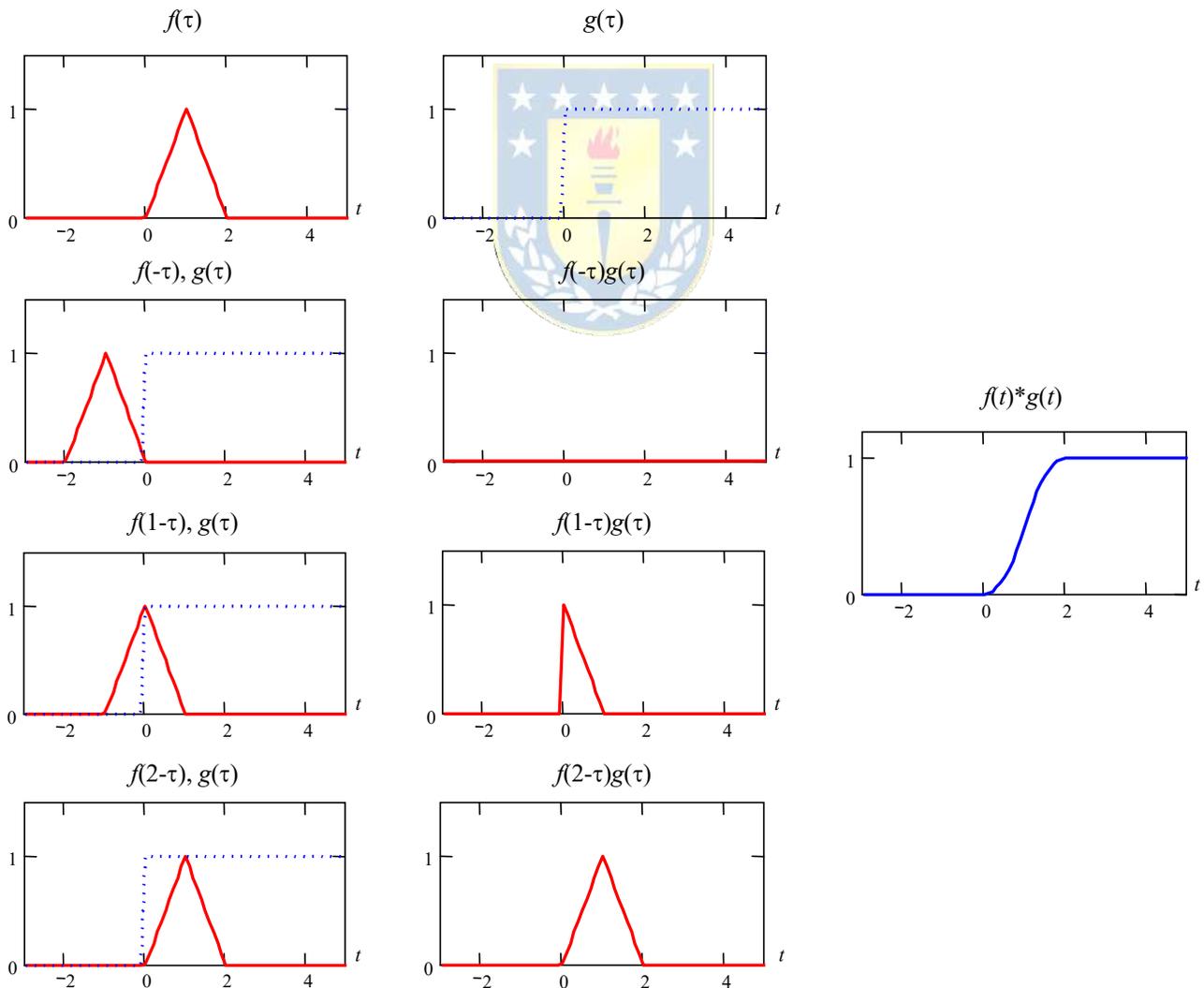


Fig. 2.20 Convolución de señales continuas.

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t).$$

Convolución con un Impulso,

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0).$$

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \delta(0) d\tau = f(t - t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) d\tau = f(t - t_0).$$

Convolución con un Escalón,

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

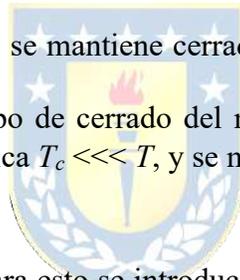
Ejemplo 2.7. Convolución de dos señales continuas como las ilustradas en la Fig. 2.20. ♣

Discretización

El proceso de convertir una señal continua en una discreta se conoce como muestreo; es decir, consiste en obtener muestras, un número finito de ellas (o por lo menos numerable), de una función continua. Es corriente que las muestras sean tomadas a distancias o intervalos regulares de tiempo.

Muestreador. Se considera un switch que se mantiene cerrado T_c unidades de tiempo de un total de T , como se muestra en la Fig. 2.21.

Muestreador ideal. En este caso el tiempo de cerrado del muestreador se hace tender a cero. Así, la definición es $S_i(t) = \lim_{T_c \rightarrow 0} S_T(t)$ en la práctica $T_c \ll T$, y se muestra en la Fig. 2.22.



Representación del muestreador ideal. Para esto se introduce la señal $\delta(kT) = \begin{cases} 1 & kT = 0 \\ 0 & kT \neq 0 \end{cases}$, donde T es

la distancia entre valores y k entero, entonces la señal $S_i(t) \equiv S_i(kT)$ se puede definir como

$S_i(kT) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(kT - iT)$, por lo tanto, la representación de la salida del muestreador ideal queda como,

$$y(kT) = \sum_{i=0}^{\infty} y(iT) \delta(kT - iT).$$

Muestreador con retención. Debido a razones tanto de orden práctico como teórico, se introduce el muestreo de área. En el muestreo de área las muestras no son iguales a la amplitud sino a un área, en el caso más simple y más común, esa área corresponde a la multiplicación del intervalo de muestreo T por la amplitud. La utilización del muestreador con retención se ilustra en la Fig. 2.23.

Representación muestreador con retención. La salida del muestreador con retención está dada por $y(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(iT)\delta_T(t-iT)T$. Nótese que de la Fig. 2.23 se puede observar que, $u(t) = \lim_{T \rightarrow 0} y(t)$, por lo tanto, $u(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(iT)\delta_T(t-iT)T = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = u(t) * \delta(t)$, como ya se conocía.

2.4 Señales de Prueba Discretas

La señal $\delta(kT)$ introducida para representar al muestreador ideal corresponde a una señal discreta conocida como impulso discreto. Similarmente, se introducen a continuación otras señales que son la base de generación de señales discretas.

A. Impulso Discreto

Def.: El impulso discreto se define como,

$$\delta(kT) = \begin{cases} 1 & kT = 0 \\ 0 & kT \neq 0 \end{cases}$$

y es mostrado en la Fig. 2.24.



B. Escalón Discreto

El escalón discreto es el muestreo del escalón continuo, por lo tanto, $u(kT) = \begin{cases} 1 & kT \geq 0 \\ 0 & kT < 0 \end{cases}$, y es mostrado en la Fig. 2.24.

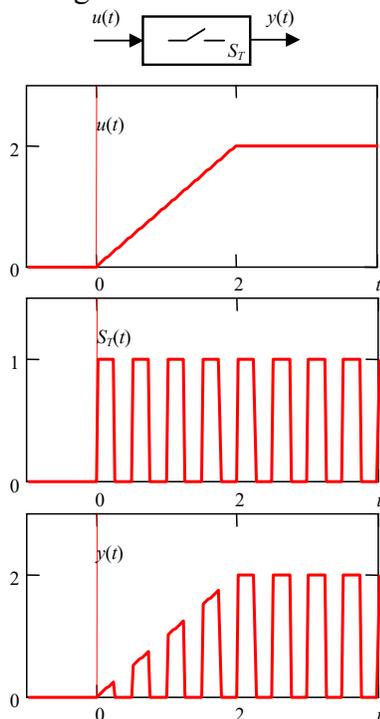


Fig. 2.21 Muestreador.

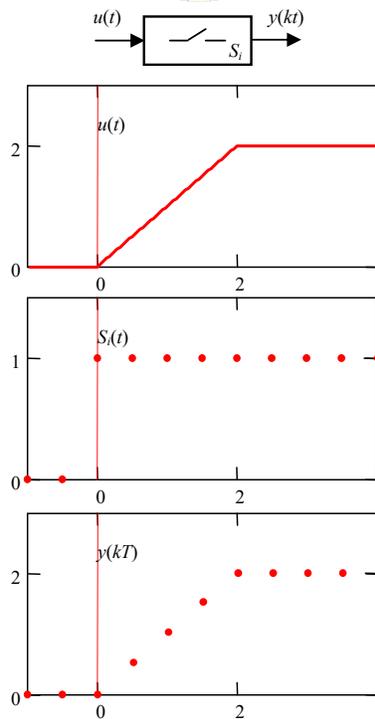


Fig. 2.22 Muestreador ideal.

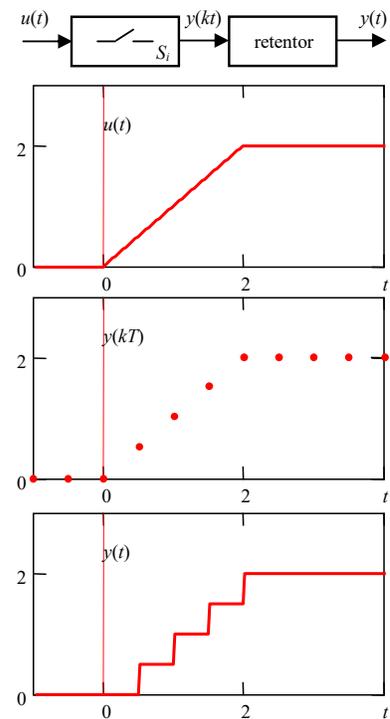


Fig. 2.23 Muestreador con retención.

C. Rampa Discreta

La rampa discreta es el muestreo de la rampa discreta, por lo tanto, $r(kT) = \begin{cases} kT & kT \geq 0 \\ 0 & kT < 0 \end{cases}$, y es mostrada en la Fig. 2.24.

Entre algunas de las propiedades de las señales discretas, Fig. 2.25, podemos citar,

$$\delta(kT) = u(kT) - u(kT - T) \quad u(kT) = [r(kT + T) - r(kT)] / T$$

$$u(kT) = \sum_{i=0}^k \delta(kT - iT) \quad r(kT) = T \sum_{i=0}^k u(kT - iT - T)$$

D. Exponencial Discreta

La exponencial discreta se define como, $f(kT) = Ce^{(-a+jb)kT}$, esta exponencial puede ser real como se muestra en la Fig. 2.26, o compleja como se muestra en la Fig. 2.27. También puede ser una combinación de componentes reales e imaginarias como se muestra en la Fig. 2.27.

E. Sinusoidal Discreta

La sinusoidal discreta, Fig. 2.28, se expresa como, $f(kT) = A \sin(\omega kT + \phi) = A \sin(2\pi f kT + \phi)$. La señal es periódica si para algún k^* y N enteros se cumple, $2\pi f k^* T = 2\pi N \rightarrow k^* = N / (fT)$, donde N es el menor entero positivo y k^* resulta ser el período discreto.

Otro fenómeno importante al muestrear una señal sinusoidal es la relación entre la frecuencia de la señal y la frecuencia de muestreo. En la Fig. 2.30 se muestran las señales análogas $f_1(t) = \cos(2\pi t)$, $f_2(t) = \cos(2\pi 5t)$ y las señales resultantes de muestrearlas cada $T = 0.25$. Claramente las señales discretas resultantes son iguales lo que llevaría a ambigüedades. Es evidente que la frecuencia de muestreo debe ser mayor que la frecuencia de la señal. Esto queda establecido por el siguiente teorema.

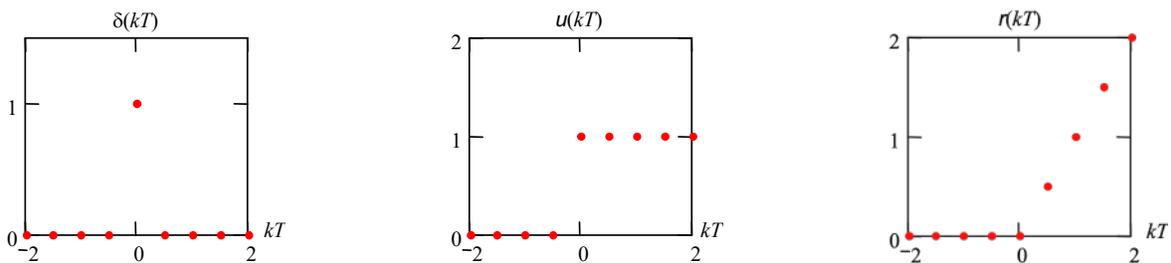


Fig. 2.24 Señales de prueba discretas.

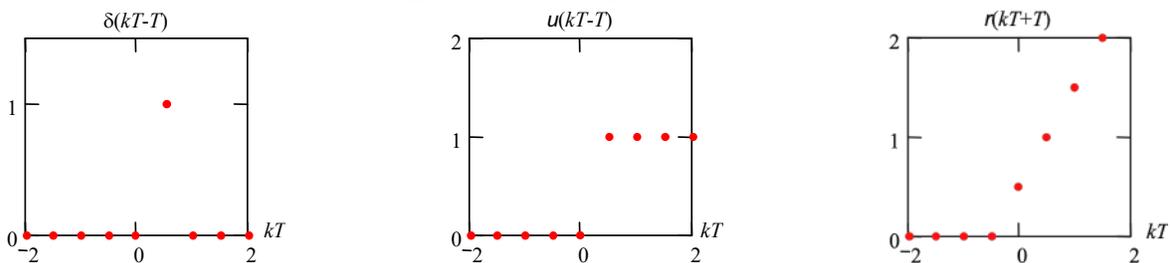


Fig. 2.25 Señales derivadas de las señales discretas.

Teorema: Teorema del Muestreo de Nyquist. Si la frecuencia más alta contenida en una señal análoga $f(t)$ es f_{max} y la señal se muestrea a una velocidad $1/T > 2f_{max}$, entonces la señal $f(t)$ se puede recuperar totalmente a partir de sus muestras.

En la práctica, antes de muestrear una señal análoga, ésta se filtra con filtros análogos de manera de asegurar que la señal resultante no contenga componentes de frecuencia mayores a la mitad de la frecuencia de muestreo a utilizar. En el caso de que esto no ocurra se produce el fenómeno de “aliasing”, cuyo nombre proviene del efecto visualizado en el plano de la frecuencia.

Ejemplo 2.8. Aplicar una señal discreta a un sistema continuo. **R.:** Una señal discreta no puede aplicarse directamente a un sistema continuo, en cambio, si se puede si se utiliza a la vez un retentor como el ilustrado en la Fig. 2.23. Este es el caso del motor c.c. como ilustrado en la Fig. 2.31 al cual se le aplica la entrada rampa generada por un muestreador con retención. Esta entrada es la que se puede esperar de un sistema digital como por ejemplo un PC o un microcontrolador, en donde la salida se actualiza a intervalos regulares quedando la tarea de generar una señal continua a un retentor. ♣

2.5 Convolución continua y discreta

Si la entrada es $\delta(t)$ en un sistema continuo, entonces sea $h(t)$ la salida, si en cambio, la entrada es $\delta_T(t)$,

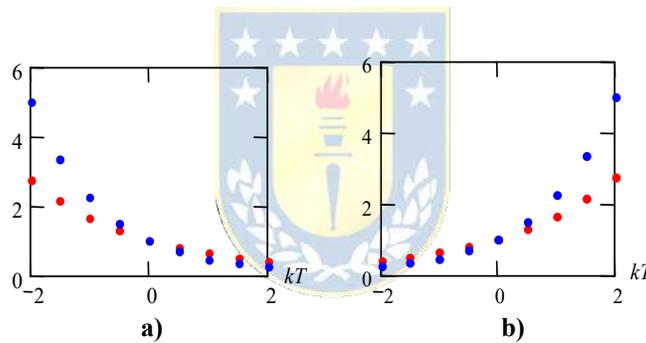


Fig. 2.26 Exponencial real, $b = 0$; **a)** decreciente ($a > 0$), **b)** creciente ($a < 0$).

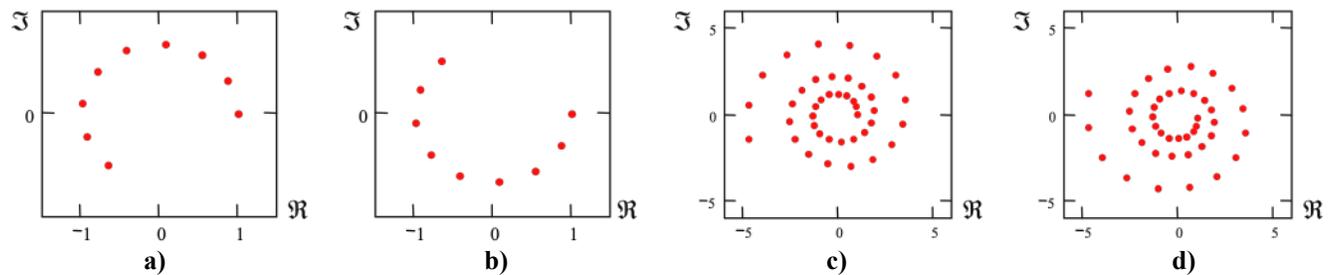


Fig. 2.27 Exponencial compleja; **a)** $a = 0, b > 0$, **b)** $a = 0, b < 0$, **c)** $a < 0, b > 0$, **d)** $a < 0, b < 0$.

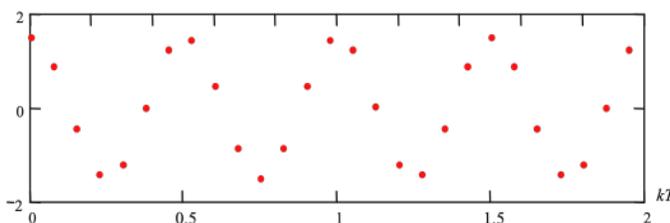


Fig. 2.28 Sinusoidal discreta.

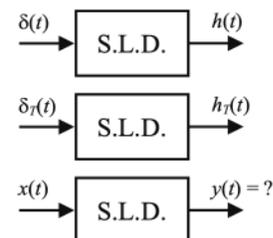


Fig. 2.29 Integral y suma de convolución.

entonces sea $h_T(t)$ la salida, como se muestra en la Fig. 2.29. La interrogante es ¿cuál es la salida para una entrada arbitraria $x(t)$? Dado que,

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT)\delta_T(t - iT)T$$

$$= \lim_{T \rightarrow 0} \{ \dots + x(-T)\delta_T(t + T)T + x(0)\delta_T(t)T + x(T)\delta_T(t - T)T + \dots \}$$

por lo tanto, la salida es,

$$y(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \{ \dots + x(-T)h_T(t + T)T + x(0)h_T(t)T + x(T)h_T(t - T)T + \dots \}$$

$$= \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT)h_T(t - iT)T = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Esta última expresión es la convolución continua o integral de convolución. Similarmente en el caso discreto se tiene que una señal discreta puede ser escrita como,

$$x(kT) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT)\delta(kT - iT)$$

$$\dots + x(-T)\delta(kT + T) + x(0)\delta(kT) + x(T)\delta(kT - T) + \dots$$

si la respuesta de un sistema discreto a entrada impulso $\delta(kT)$ es $h(kT)$, entonces, al someter a este sistema

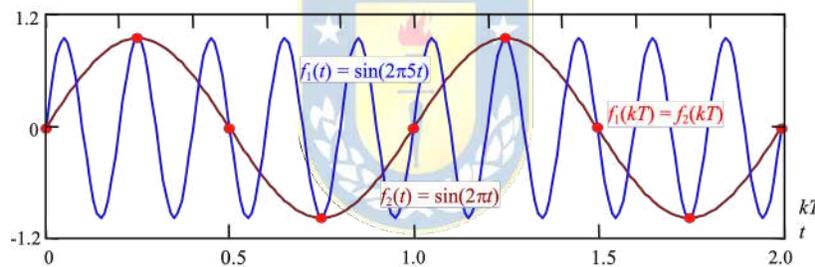


Fig. 2.30 Sinusoidales y su muestreo con $T = 0.25$.

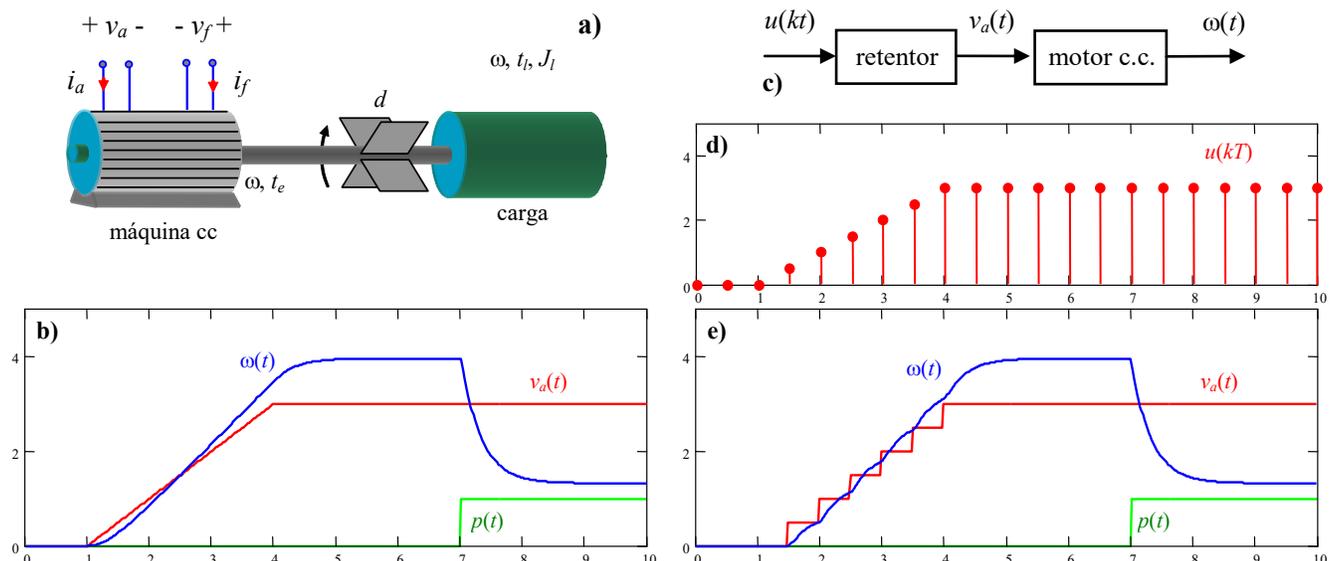


Fig. 2.31 Señales discretas en sistemas continuos; a) motor c.c., b) entrada rampa continua, c) diagrama, d) entrada rampa discreta, e) entrada rampa desde un muestreador con retención.

a la entrada arbitraria $x(kT)$ se tiene por salida a,

$$y(kT) = \dots + x(-T)h(kT + T) + x(0)h(kT) + x(T)h(kT - T) + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} x(iT)h(kT - iT)$$

A. Convolución Discreta (Suma de Convolución)

Por dualidad con el comportamiento de un sistema continuo, también se define la convolución discreta.

Def.: Se llama **convolución discreta** de $f(kT)$ con $g(kT)$ y se denota por $f(kT)*g(kT)$ a la sumatoria,

$$f(kT) * g(kT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(kT - iT)g(iT).$$

Por lo tanto, la salida de un sistema discreto a una entrada arbitraria $x(kT)$ puede ser expresada como,

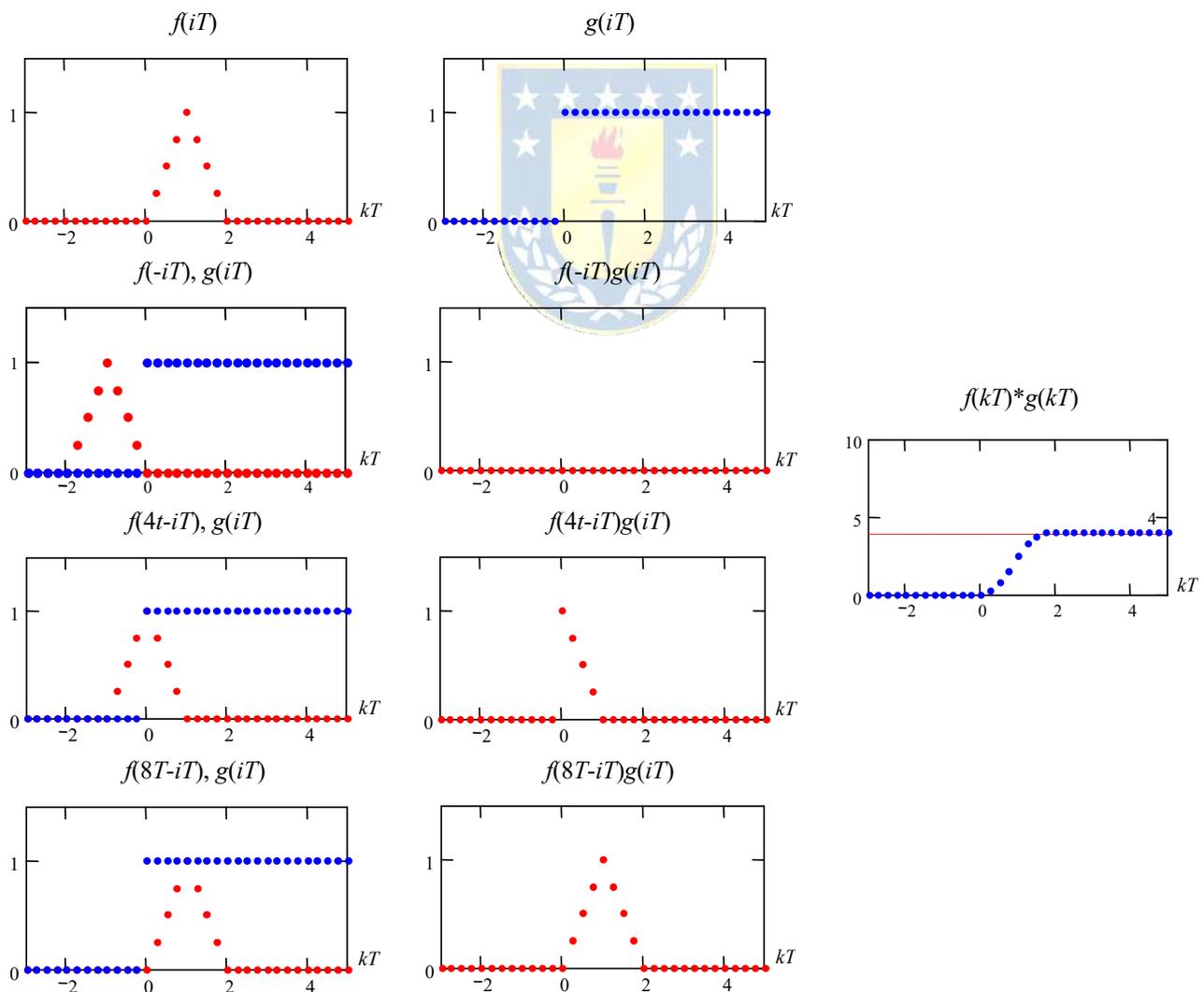


Fig. 2.32 Convolución de señales discretas.

$$y(kT) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT)h(kT - iT) = \sum_{i=0}^{\infty} h(kT - iT)x(iT) = h(kT) * x(kT).$$

donde $h(kT)$ es la respuesta a impulso del sistema discreto.

Ejemplo 2.9. Ejemplo de la convolución de las señales mostradas en la Fig. 2.32, las cuales corresponden a la discretización de las señales utilizadas en el ejemplo anterior. El proceso de convolución gráfica puede verse en la Fig. 2.32. ♣

B. Convolución Cíclica

La convolución lineal de dos señales periódicas generalmente diverge. Por lo tanto, es necesario definir una nueva forma de convolución para tales señales.

Def.: Se llama **convolución cíclica** de $f(kT)$ con $g(kT)$ y se denota por $f(kT) *_c g(kT)$ a la sumatoria,

$$f(kT) *_c g(kT) = \sum_{i=0}^{Q-1} f(kT - iT)g(iT),$$

donde se ha empleado el símbolo $*_c$ para especificar claramente que esta convolución es cíclica, en contraposición a la convolución lineal revisada anteriormente. El parámetro Q es el largo de las secuencias, que generalmente son iguales.

Nótese que la fórmula es directamente aplicable a señales periódicas si sólo se considera un período. La secuencia resultante también es periódica.

Ejemplo 2.10. Ejemplo de la convolución de las señales mostradas en la Fig. 2.33. Nótese que la señal resultante es una sinusoidal (casi). Esto se debe a que en este caso la convolución con la señal $g(kT)$ opera como un filtro pasa bajos, donde la señal filtrada es la escalonada. ♣

2.6 Ejercicios Propuestos.

Resuelva los problemas siguientes. Anote todo su trabajo.

A. Nivel básico.

1.- Grafique las siguientes señales continuas.

(a) $f(t) = u(t) + u(t-5)r(t-5)$

(b) $f(t) = u(-t) + u(t-5)r(t-5)$

(c) $f(t) = \delta(t) + u(t) + u(-t)$

(d) $f(t) = \sin(2\pi 50t)$

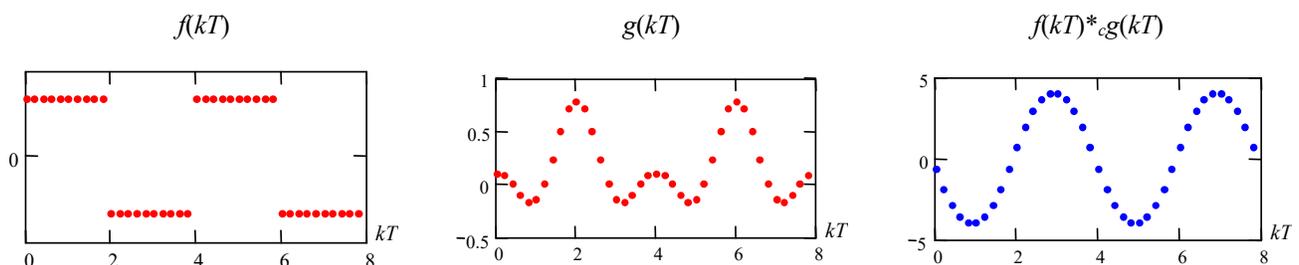


Fig. 2.33 Convolución cíclica de señales discretas periódicas.

(e) $f(t) = \sin(2\pi 50t - \pi/6)u(t)$

(g) $f(t) = \int_{-\infty}^{3t} (\delta(\tau) + u(\tau - 2))d\tau$

(i) $f(t) = e^{-10t}u(t)$

(k) $f(t) = e^{-10(t-2)}u(t-2)$

(m) $f(t) = e^{-j10t}u(t)$

2.- Grafique las siguientes señales discretas.

(a) $f(kT) = u(kT) + u(kT - 5T)r(kT - 5T)$

(c) $f(kT) = \delta(kT) + 2u(kT)$

(e) $f(kT) = 10\sin(2\pi 50kT - \pi/6)u(kT)$

(g) $f(kT) = \prod_{l=-\infty}^k u(lT)$

(f) $f(t) = \sin(2\pi 50t)^2 u(t)$

(h) $f(t) = \begin{cases} u(t+1) & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{otro} \end{cases} t$

(j) $f(t) = e^{-10t}u(t-2)$

(l) $f(t) = e^{-(10+j10)t}u(t)$

(n) $f(t) = e^{-(10+j10)t}r(t)$

(b) $f(kT) = u(-kT) + u(kT - 5T)$

(d) $f(kT) = \cos(2\pi 50kT) + 1$

(f) $f(kT) = \sin(2\pi 50kT)^3 u(kT)$

(h) $f(kT) = \begin{cases} r(kT + T) & -T < kT < T \\ 0 & \text{otro} \end{cases} k$

3.- Determine si las señales anteriores son pares o impares.

4.- Exprese las señales anteriores como la suma de una señal par y otra impar.

5.- Determine si las señales son periódicas. Si lo es, determine el periodo fundamental.

(a) $f(t) = \sin(2\pi 50t)$

(c) $f(t) = \sin(2\pi 50t)r(t-5)$

(e) $f(t) = \sin(2\pi 50t) + \cos(2\pi 50t)$

(g) $f(t) = e^{-j2\pi 50t}u(t)$

(i) $f(t) = e^{-j2\pi 50t^2}u(t)$

6.- Determine el periodo de las siguientes señales discretas.

(a) $f(kT) = \sin(2\pi 50kT)$

(c) $f(kT) = \sin(2\pi 50kT) + \cos(2\pi 50kT)$

(e) $f(kT) = \sin(50(k+1))$

(g) $f(kT) = e^{-j7\pi k}u(kT)$

(i) $f(kT) = e^{j3/5(k+1/2)}u(kT)$

(b) $f(t) = \sin(2\pi 50t - \pi/6)u(t)$

(d) $f(t) = \sin(2\pi 50t - \pi/6)^2 u(t)$

(f) $f(t) = \sin(2\pi 50t) + \cos(2\pi 100t)$

(h) $f(t) = e^{j2\pi 50t}u(t)$

(j) $f(t) = e^{-j2\pi 50t} + e^{-j2\pi 100t}$

(b) $f(kT) = \sin(50kT)u(t)$

(d) $f(kT) = \sin(2\pi 50kT - \pi/6)^2 u(t)$

(f) $f(kT) = \sin(50(k+1)/3)$

(h) $f(kT) = e^{j3\pi(k+1/2)/5}u(kT)$

(j) $f(kT) = e^{-j2\pi 50t} + e^{-j2\pi 100t}$

7.- Obtenga y grafique las siguientes señales donde $f(t)$ son las indicadas en la parte (1).

(a) $g(t) = 10f(t) + 2$

(c) $g(t) = f(-t + 2)$

(e) $g(t) = f(-t/2 + 2)$

(b) $g(t) = 10(f(t) + 2)$

(d) $g(t) = f(t/2)$

(f) $g(t) = f(4t + 2)$

8.- Normalice las señales indicadas en la parte (1) en el rango -10 a 10 para las no periódicas y en un periodo para las periódicas.

9.- Obtenga y grafique las siguientes señales donde $f(kT)$ son las indicadas en la parte (2).

(a) $g(kT) = 10f(kT) + 2$

(c) $g(kT) = f(-kT + 2)$

(e) $g(kT) = f(-kT/2 + 2)$

(b) $g(kT) = 10(f(kT) + 2)$

(d) $g(kT) = f(kT/2)$

(f) $g(kT) = f(4kT + 2)$

10.- Normalice las señales indicadas en la parte (2) en el rango -10T a 10T para las no periódicas y en un periodo para las periódicas.

B. Nivel intermedio.

1.- Realice la convolución entre las señales:

(a) $f(t) = u(t) - u(t-2)$

(b) $f(t) = u(t) - u(t-2)$

(c) $f(t) = r(t) - (t-2)r(t-2) - u(t-2)$

y $g(t) = u(t+2) - u(t)$

y $g(t) = \sin(2\pi 50t)u(t)$

y $g(t) = \sin(2\pi 50t)^2 u(t)$

- (d) $f(t) = e^{-t}u(t)$ y $g(t) = u(t) - u(t - 2)$
 - (e) $f(t) = e^{-t}u(t)$ y $g(t) = \sin(2\pi 50t)u(t)$
 - (f) $f(t) = e^{-t}u(t)$ y $g(t) = \sin(2\pi 50t)^2u(t)$
- 2.- Realice la convolución de una función arbitraria $f(t)$ con soporte positivo y un escalón retardado t_0 unidades de tiempo.
- 3.- Realice la convolución entre las señales:
- (a) $f(kT) = u(kT)$ y $g(kT) = (1/2)^k u(kT)$
 - (b) $f(kT) = u(kT) - u(kT - 2T)$ y $g(kT) = (1/2)^k u(kT)$
 - (c) $f(kT) = u(kT) - u(-kT)$ y $g(kT) = \sin(2\pi 50kT)u(kT)$
 - (d) $f(kT) = r(kT)$ y $g(kT) = (1/2)^k u(kT)$
 - (e) $f(kT) = \delta(kT - 5T)$ y $g(kT) = \sin(2\pi 50kT)u(kT)$
 - (f) $f(kT) = \delta(kT - 5T)r(kT)$ y $g(kT) = (1/2)^k u(kT)$

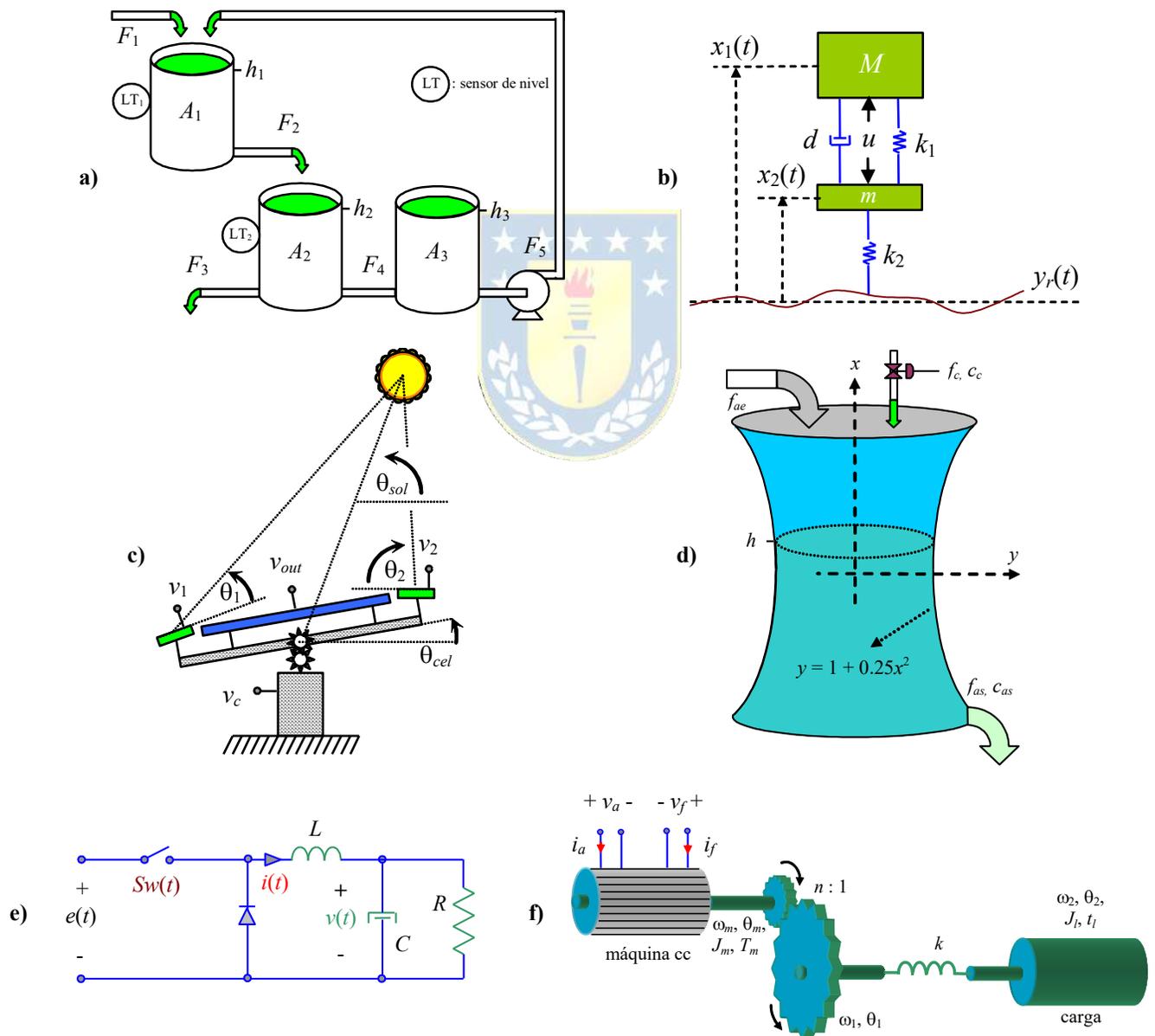


Fig. 2.34 Sistemas para ejercitar; **a)** estanques, **b)** amortiguación de un automóvil, **c)** generación solar, **d)** estanque diluidor, **e)** circuito reductor de tensión, **f)** motor de cc con eje flexible.

- 4.- Si la entrada $u(kT)$ y la salida $y(kT)$ están relacionadas por la expresión, $y(kT + T) = -a_0y(kT) + u(kT)$. Determine la salida (asuma $y(0) = 0$) si la entrada es un delta discreto y,
- (a) $a_0 = 0.5$ (b) $a_0 = -0.5$
 (c) $a_0 = 1.5$ (d) $a_0 = -1.5$
- 5.- Repita (4) pero ahora asuma que la entrada es un escalón discreto.
- 6.- Repita (4) pero ahora asuma que la entrada es un delta discreto sumado a un escalón discreto.
- 7.- Identifique la expresión de la señal $g(kT)$ de la Fig. 2.33 y luego realice la convolución cíclica de ésta con las señales $f(kT)$ dadas por,
- (a) $f(kT) = \sin(2\pi 4kT)$ (b) $f(kT) = \sin(2\pi 4kT)^2$
 (c) $f(kT) = r(kT) - 4r(kT - 2T)$ (d) $f(kT) = u(kT) + r(kT) - 4r(kT - 2T)$
- 8.- Para los sistemas ilustrados en la Fig. 2.34 – de los cuales usted tiene los modelos linealizados del capítulo anterior – se pide para su modelo lineal,
- (a) Obtener la expresión para la respuesta a impulso.
 (b) Simular el sistema para entrada impulso. Comparar con lo obtenido en (a).
 (c) Simular el sistema para entrada escalón. Compare esta respuesta con la obtenida en la parte (b). ¿Corresponde esta respuesta a la integral de la respuesta anterior ?
 (d) Simular el sistema para una entrada sinusoidal de frecuencia fija y para varias amplitudes. Para las señales en S.S. responder: ¿Cuál es la frecuencia de la señal de salida ? ¿Cuál es la amplitud de la señal de salida ? ¿Cuál es la fase de la señal de salida respecto de la de entrada ?
 (e) Simular el sistema para una entrada sinusoidal de amplitud fija y para varias frecuencias. Para las señales en S.S. responder: ¿Cuál es la frecuencia de la señal de salida ? ¿Cuál es la amplitud de la señal de salida ? ¿Cuál es la fase de la señal de salida respecto de la de entrada ?
- 9.- Si bien los sistemas ilustrados en la Fig. 2.34 son continuos, usted puede obtener su respuesta a entrada impulso, escalón, etc. discretos por medio del uso de un retentor de orden cero, como en la Fig. 2.31. Utilizando esta opción se pide para el modelo lineal de los sistemas,
- (a) Simular el sistema para entrada impulso discreto.
 (b) Simular el sistema para entrada escalón discreto.
 (c) En las respuestas anteriores: ¿Cómo influye el tiempo de muestreo T ? ¿ Si T es muy grande, se parece la respuesta a impulso discreto a la respuesta a escalón continuo ? ¿ Si T es muy pequeño, se parece la respuesta a impulso discreto a la respuesta a impulso continuo ? ¿Cuál es la relación exacta entre la respuesta a impulso discreto y la respuesta a escalón continuo ?

C . Nivel avanzado.

- 1.- Realice la convolución de una función arbitraria $f(t)$ con soporte positivo y su integral.
 2.- Realice la convolución de una función arbitraria $f(t)$ con soporte positivo y su derivada.
 3.- Demuestre que una señal discreta $f(kT)$ cumple con,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p^2(kT) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_i^2(kT),$$

donde, $x_p(kT)$ y $x_i(kT)$ son la parte par e impar de la señal $x(kT)$.

- 4.- Realice la convolución entre la señal $f(kT) = u(kT + T) - u(kT - T)$ con la señal tipo “peineta”,

$$\begin{aligned} g(kT) &= \dots + \delta(kT + 2lT) + \delta(kT + lT) + \delta(kT) + \delta(kT - lT) + \delta(kT - 2lT) + \dots \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(kT - iT) \end{aligned}$$

para $l = 4, 2$ y 1 . Grafique todas las señales y comente los resultados.

- 5.- Demuestre que las propiedades de distributividad, asociatividad, con un impulso y con un escalón encontradas en la convolución continua también se comprueban en la convolución discreta y en la convolución discreta cíclica.



3 Transformaciones

La solución de problemas en ingeniería pasa ineludiblemente por el uso de transformaciones. Por ejemplo, la *Transformada de Laplace* es utilizada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. En este capítulo se repasan las propiedades de la Transformada de Laplace y se introduce la *Transformada Z*, sus propiedades y aplicabilidad al tratamiento de sistemas que operan con señales discretas. Finalmente, se introduce la Transformada de Fourier para señales continuas y discretas, como también transformadas apropiadas para señales periódicas continuas y periódicas discretas.

3.1 Introducción

La forma natural de solucionar los problemas en un dominio (por ejemplo, el tiempo) es permanecer en ese dominio y utilizar alguna técnica particular, Fig. 3.1. Sin embargo, los siguientes ejemplos ilustran que el uso de transformaciones ha sido ampliamente utilizado en problemas de la ingeniería, Fig. 3.2.

Ejemplo 3.1. Considerar que se desea obtener la respuesta en el tiempo ante una entrada escalón del sistema descrito por, $\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = k\omega_n^2u(t)$, donde la entrada u es un escalón; es decir, $u(t) = u(t)$. Utilizando la T.L., se tiene, $s^2y(s) + 2\zeta\omega_nsy(s) + \omega_n^2y(s) = k\omega_n^2/s$. Despejando la salida, $y(s) = \frac{k\omega_n^2}{s(s^2y + 2\zeta\omega_nsy + \omega_n^2y)}$, y utilizando la T.L. Inversa se

obtiene la respuesta $y(t) = k \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta) \right\}$, para $0 < \zeta < 1$. Evidentemente, la T.L. es una transformación muy utilizada en S.L.D. dada la simplicidad en su aplicación. ♣

Ejemplo 3.2. Invertir la matriz A utilizando una transformación de similitud. Sea D una matriz diagonal tal que, $TAT^{-1} = D$, para lo cual T^{-1} debe estar compuesta por los vectores propios de A , lo que resulta en una matriz D compuesta por los valores propios de A ; es decir, $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Dado que $D^{-1} = \text{diag}\{1/\lambda_1, 1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n\}$, entonces la inversa de D , $(T^{-1}AT)^{-1} = D^{-1}$, $T^{-1}A^{-1}T = D^{-1}$, $A^{-1} = T D^{-1} T^{-1}$. No es evidente en este ejemplo que encontrar D y T sea más fácil que utilizar un método directo de inversión de A . ♣

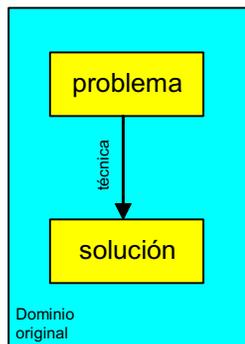


Fig. 3.1 Solución tradicional de un problema.

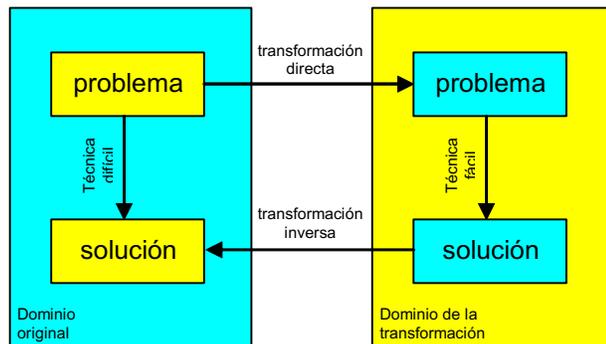


Fig. 3.2 Transformaciones en la solución de problemas.

En general, el uso de transformaciones se puede deber a:

- Transformar el problema original en uno más fácil de solucionar. Este es el caso de la T.L. aplicado a la solución de ecuaciones diferenciales. Se verá más adelante que su campo de aplicaciones no está limitado a ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, se utiliza también en la solución y análisis de ecuaciones de estado.
- Obtener información adicional que es difícil (o imposible) de obtener en el dominio original. Por ejemplo, el uso de la T.L. permite predecir la salida en S.S. de un sistema a una entrada sinusoidal de frecuencia ω , amplitud A , y fase ϕ . Dada su característica lineal también permite obtener la salida para una combinación lineal de sinusoidales, lo que corresponde a una señal periódica arbitraria.

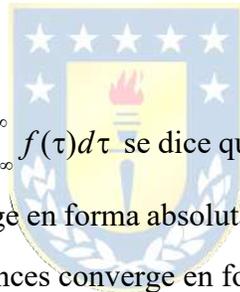
A continuación se revisará la T.L. para luego dar paso a la Transformada \mathcal{Z} , que aparece como alternativa dual de análisis pero para sistemas discretos.

3.2 Transformada de Laplace

Se utiliza en sistemas continuos. Su aplicación va desde la solución de ecuaciones diferenciales a su utilización en nuevas formas de análisis de S.L.D.. En particular, en la propuesta del concepto de Función de Transferencia.

A. Conceptos

Convergencia de integrales. La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau$ se dice que converge en forma simple si se tiene que $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right| \leq M < \infty$ y se dice que converge en forma absoluta si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \leq M < \infty$. Nótese que si una integral converge en forma absoluta, entonces converge en forma simple.



Ejemplo 3.3. Encuentre la convergencia de las siguientes funciones $f(t) = \sin(\omega t)$ y $g(t) = e^{at}u(t)$. **R.:** Para el primer caso se tiene que $\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) dt \right| \leq M < \infty$ por lo que hay convergencia simple; sin embargo, $\int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\omega t)| dt \rightarrow \infty$, por lo que no hay convergencia absoluta. Por otro lado, $\int_0^{\infty} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a} \left\{ e^{at} \Big|_{t \rightarrow \infty} - 1 \right\} = \begin{cases} -1/a & a < 0 \\ \infty & a \geq 0 \end{cases}$ por lo que hay convergencia simple y absoluta si $a < 0$. ♣

Estas definiciones nos permiten introducir la Transformada de Laplace.

Def.: Se define la **Transformada de Laplace** (T.L.) Unilateral de una función $f(t)$, como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

en donde, $f(t) \in \sim$, $t \in \sim$, $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$.

Notar que $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s)$ es una función de la variable s , $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt =$

$\int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$, la cual converge sólo para algunos valores de σ .

Def.: Se define la **abscisa de convergencia absoluta** (a.c.a.) de la T.L. de una función $f(t)$, al valor σ_c tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}$ converge $\forall \sigma > \sigma_c$.

Ejemplo 3.4. Determine la T.L. y la abscisa de convergencia de las siguientes funciones, **(a)** $f(t) = u(t)$, $f(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\infty}) = \frac{1}{s}(1 - e^{-(\sigma+j\omega)\infty}) = \frac{1}{s}(1 - e^{-\sigma\infty} e^{-j\omega\infty}) = \frac{1}{s} \forall \sigma > 0$. Por lo tanto, $\sigma_c = 0$. **(b)** $f(t) = e^{-at}u(t)$, $f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}(1 - e^{-(s+a)\infty}) = \frac{1}{s+a}(1 - e^{-(\sigma+a+j\omega)\infty}) = \frac{1}{s+a}(1 - e^{-(\sigma+a)\infty} e^{-j\omega\infty}) = \frac{1}{s+a} \forall \sigma + a > 0$. Por lo tanto, $\sigma_c = -a$. **(c)** $f(t) = 1/T_a(u(t) - u(t-T_a))$, $f(s) = \int_0^{\infty} 1/T_a(u(t) - u(t-T_a))e^{-st} dt = \frac{1}{T_a} \int_0^{\infty} e^{-st} dt - \frac{1}{T_a} \int_{T_a}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{sT_a}(1 - e^{-s\infty}) - \frac{1}{sT_a}(e^{-sT_a} - e^{-s\infty}) = \frac{1 - e^{-sT_a}}{sT_a} \forall \sigma$. Por lo tanto, $\sigma_c = -\infty$. **(d)** $f(t) = \delta(t) = \lim_{T_a \rightarrow 0} \{1/T_a(u(t) - u(t-T_a))\}$; por lo tanto, $f(s) = \lim_{T_a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - e^{-sT_a}}{sT_a} \right\} = 1$ y $\sigma_c = -\infty$. ♣

Lem: La a.c.a. de toda función acotada y con soporte compacto es $\sigma_c = -\infty$.

Consecuentemente, la T.L. Unilateral Inversa es,

Pro.: La T.L. Unilateral Inversa de una función $f(s)$, es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_1 - j\infty}^{c_1 + j\infty} f(s)e^{ts} ds,$$

en donde, $c_1 > \sigma_c$.

No es práctica la utilización de la definición de la T.L. Inversa y se recurre a simplificar (normalmente utilizando fracciones parciales) la expresión de $f(s)$ para luego reconocer funciones típicas.

Def.: Se define la T.L. Bilateral de una función $f(t)$, como:

$$\mathcal{L}_2\{f(t)\} = f_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

en donde, $f(t) \in \sim$, $t \in \sim$, $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 3.5. Determine la T.L. Bilateral de **(a)** $f(t) = e^{-|t|}$, $f_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{st} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1-s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(1+s)t} dt = -\frac{1}{1-s}e^{-(1-s)t} \Big|_0^{\infty} + -\frac{1}{1+s}e^{-(1+s)t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{1-s}\{e^{-(1-s-j\omega)\infty} - 1\} -$

$$-\frac{1}{1+s} \{e^{-(1+\sigma+j\omega)\infty} - 1\} = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} \quad \forall 1-\sigma > 0 \wedge 1+\sigma > 0 = \frac{1+s+1-s}{(1+s)(1-s)} \quad \forall 1 > \sigma \wedge \sigma > -1 = \frac{2}{1-s^2} \quad \forall \sigma < 1 \wedge \sigma > -1. \quad \mathbf{(b)}$$

$$f(t) = u(t+T_a) - u(t-T_a), \quad f_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (u(t+T_a) - u(t-T_a))e^{-st} dt = \int_{-T_a}^{T_a} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{-T_a}^{T_a} = -\frac{1}{s} e^{-sT_a} + \frac{1}{s} e^{sT_a} = \frac{e^{sT_a} - e^{-sT_a}}{s}, \quad \forall$$

σ , pues la función es acotada y de soporte compacto. ♣

B. Propiedades

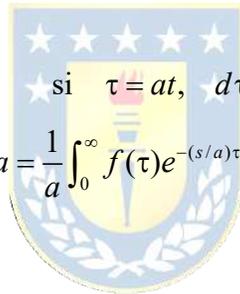
Linealidad. Sean $f_1(t)$ con T.L. $f_1(s)$, $f_2(t)$ con T.L. $f_2(s)$, α_1 y α_2 constantes reales, entonces la T.L. de $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$ es $\alpha_1 f_1(s) + \alpha_2 f_2(s)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= \alpha_1 \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \alpha_2 \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt. \\ &= \alpha_1 f_1(s) + \alpha_2 f_2(s) \end{aligned}$$

En el caso general, dadas $f_i(t)$ con T.L. dadas por $f_i(s)$ y coeficientes α_i reales, entonces la T.L. de $\sum_i \alpha_i f_i(t)$ es $\sum_i \alpha_i f_i(s)$.

Escalamiento en el tiempo. Sea $f(t)$ con T.L. $f(s)$ y a una constante real, entonces la T.L. de $f(at)$ es $f(s/a)/a$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt \quad \text{si } \tau = at, \quad d\tau = a dt, \quad t|_0^{\infty} \rightarrow \tau|_0^{\infty} \quad a > 0 \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau/a} d\tau / a = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(s/a)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a} f(s/a) \end{aligned}$$



Desplazamiento en el tiempo. Sea $f(t)$ (soporte positivo) con T.L. $f(s)$ y a una constante real, entonces la T.L. de $f(t-a)$ es $e^{-as}f(s)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)\} &= \int_0^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt \quad \text{si } \tau = t-a, \quad d\tau = dt, \quad t|_0^{\infty} \rightarrow \tau|_{-a}^{\infty} \quad a > 0 \\ &= \int_{-a}^{\infty} f(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} e^{-sa} d\tau = e^{-sa} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-sa} f(s) \end{aligned}$$

Desplazamiento en la frecuencia. Sea $f(t)$ con T.L. $f(s)$ y a una constante real, entonces la T.L. de $e^{-at}f(t)$ es $f(s+a)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-t(s+a)} dt \\ &= f(s+a) \end{aligned}$$

Derivación. Sea $f(t)$ con T.L. $f(s)$, entonces la T.L. de $\dot{f}(t)$ es $sf(s) - f(t)|_{t=0}$. Dem.:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt && \text{dado que } \int b \frac{da}{dt} dt = ab - \int a \frac{db}{dt} dt \\ &= -f(t) \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt && \text{con } \frac{da}{dt} = e^{-st}, \quad b = f(t), \quad a = -\frac{1}{s} e^{-st}. \\ &= f(t) \frac{1}{s} \Big|_{t=0} + \frac{1}{s} \mathcal{L}(\dot{f}(t))\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(t)|_{t=0} = sf(s) - f(t)|_{t=0}$. En general la T.L. de la derivada n -ésima es $\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n f(s) - s^{n-1} f(t)|_{t=0} - s^{n-2} \dot{f}(t)|_{t=0} - \dots - f^{(n-1)}(t)|_{t=0}$.

Integración. Sea $f(t)$ con T.L. $f(s)$, entonces la T.L. de $\int_0^t f(\tau) d\tau$ es $f(s)/s$. Dem.:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt && \text{dado que } \int b \frac{da}{dt} dt = ab - \int a \frac{db}{dt} dt \\ &= \int_0^t f(\tau) d\tau e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} s e^{-st} dt && \text{con } \frac{da}{dt} = f(t), \quad b = e^{-st}, \quad a = \int_0^t f(\tau) d\tau. \\ &= s \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} e^{-st} dt = s \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \mathcal{L}\{f(t)\} / s = f(s) / s$. En general, la T.L. de la n -ésima integral de $f(t)$ está dada por $\mathcal{L}\left\{ \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau_1 \dots d\tau_n \right\} = f(s) / s^n$.

Teorema del Valor Inicial. Sea $f(t)$ con T.L. $f(s)$, entonces $f(t)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$. Dem.:

$$\text{se sabe que } \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt = sf(s) - f(t)|_{t=0},$$

$$\begin{aligned}\text{por lo tanto } \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt \right\} &= \lim_{s \rightarrow \infty} (sf(s) - f(t)|_{t=0}) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) - f(t)|_{t=0}.\end{aligned}$$

$$\text{o bien } f(t)|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$$

Teorema del Valor Final. Sea $f(t)$ con T.L. $f(s)$, entonces $f(t)|_{t=\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s)$. Dem.:

$$\text{se sabe que } \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt = sf(s) - f(t)|_{t=0},$$

$$\begin{aligned}\text{por lo tanto } \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt \right\} &= \lim_{s \rightarrow 0} (sf(s) - f(t)|_{t=0}) \\ \int_0^{\infty} \dot{f}(t) dt &= \lim_{s \rightarrow 0} sf(s) - f(t)|_{t=0}.\end{aligned}$$

$$f(t)|_{t=\infty} - f(t)|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s) - f(t)|_{t=0}$$

$$f(t)|_{t=\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s)$$

Señales Periódicas. Sea $f_0(t)$ con T.L. $f_0(s)$ y la señal periódica $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_0(t - iT)$, entonces la T.L. de $f(t)$ es $f_0(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} f_0(t - iT)\right\} = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_0(t - iT) e^{-st} dt = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_0(t - iT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f_0(s) e^{-isT} = f_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} e^{-isT} = f_0(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}} \end{aligned}$$

Convolución. Sea $f(t)$ con T.L. $f(s)$ y $g(t)$ con T.L. $g(s)$, entonces $f(t)*g(t) = f(s)g(s)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s)g(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right\} g(s) e^{st} ds \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} g(s) e^{-s(t-\tau)} ds f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(t-\tau) f(\tau) d\tau = g(t) * f(t) \end{aligned}$$

Convolución Compleja (Modulación). Sea $f(t)$ con T.L. $f(s)$ y $g(t)$ con T.L. $g(s)$, entonces $f(t)g(t) = f(s)*g(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s-\omega)g(\omega)d\omega$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)g(t)\} &= \int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} g(\omega) e^{\omega t} d\omega e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-\omega)t} dt g(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s-\omega)g(\omega) d\omega = f(s) * g(s) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6. Para el sistema ilustrado en la Fig. 3.3 se tiene que $y(s) = h(s)x(s)$. Si $h(t) = e^{-at}u(t)$, determine la salida $y(t)$ para la entrada $x(t) = ku(t)$. **R.:** $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(h(s)x(s))$, dado que $h(s) = \mathcal{L}(h(t)) = \mathcal{L}(e^{-at}u(t)) = 1/(s+a)$ y $x(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}(ku(t)) = k/s$, entonces, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a} \frac{k}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{a} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right]\right\} = \frac{k}{a} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{k}{a} [u(t) - e^{-at}u(t)] = \frac{k}{a} [1 - e^{-at}]u(t)$. ♣

Ejemplo 3.7. Para el sistema ilustrado en la Fig. 3.4 determine la expresión que relaciona la salida $h(s)$ con la entrada $h_d(s)$. **R.:** En este caso $h(s) = f_e(s)/s$, $h(s) = (e(s)k_d s + e(s)/(Ts))/s$, $h(s) = e(s)(k_d s + 1/(Ts))/s$, $h(s) = (h_d(s) - h(s))(k_d s + 1/(Ts))/s$, por lo tanto, $h(s) = \{h_d(s) - h(s)\} \frac{1}{s} \left\{k_d s + \frac{1}{Ts}\right\}$, o bien $h(s) \left\{1 + \frac{1}{s} \left\{k_d s + \frac{1}{Ts}\right\}\right\} = h_d(s) \frac{1}{s} \left\{k_d s + \frac{1}{Ts}\right\}$, lo que puede ser reducido a

$$\frac{h(s)}{h_d(s)} = \frac{\frac{1}{s} \left\{k_d s + \frac{1}{Ts}\right\}}{1 + \frac{1}{s} \left\{k_d s + \frac{1}{Ts}\right\}} = \frac{s^2 k_d T + 1}{s^2 T (1 + k_d) + 1} \quad \clubsuit$$

Ejemplo 3.8. Para el sistema ilustrado en la Fig. 3.5(a) determine la expresión que relaciona la salida $h(s)$ con las entradas $h_d(s)$ y $f_s(s)$.

R.: En este caso $h(s) = \frac{1}{As} \{f_e(s) - f_s(s)\}$, $h(s) = \frac{1}{As} \left\{ v(s) \left\{ k_c + \frac{1}{T_i s} \right\} e(s) - f_s(s) \right\}$, $h(s) = \frac{1}{As} \left\{ v(s) \left\{ k_c + \frac{1}{T_i s} \right\} (h_d(s) - h(s)) - f_s(s) \right\}$, $h(s) \left[1 + \frac{1}{As} v(s) \left\{ k_c + \frac{1}{T_i s} \right\} \right] = \frac{1}{As} v(s) \left\{ k_c + \frac{1}{T_i s} \right\} h_d(s) - \frac{1}{As} f_s(s)$, $h(s) = \frac{\frac{1}{As} v(s) \left\{ k_c + \frac{1}{T_i s} \right\}}{1 + \frac{1}{As} v(s) \left\{ k_c + \frac{1}{T_i s} \right\}} h_d(s) + \frac{-\frac{1}{As} f_s(s)}{1 + \frac{1}{As} v(s) \left\{ k_c + \frac{1}{T_i s} \right\}}$. Si el controlador se caracteriza por, $c(s) = k_c + \frac{1}{T_i s}$, la planta por, $g(s) = \frac{1}{As}$, entonces la relación se reduce a, $h(s) = \frac{g(s)v(s)c(s)}{1 + g(s)v(s)c(s)} h_d(s) + \frac{-g(s)}{1 + g(s)v(s)c(s)} f_s(s)$. Finalmente, si

$h_1(s) = \frac{g(s)v(s)c(s)}{1 + g(s)v(s)c(s)}$ y $h_2(s) = \frac{-g(s)}{1 + g(s)v(s)c(s)}$, se tiene que $h(s) = h_1(s)h_d(s) + h_2(s)f_s(s)$, lo que se representa en la Fig. 3.5(b).

Nótese que si deseáramos que $h(s)$ respondiera fielmente a la nueva entrada $h_d(s)$ y no a la perturbación $f_s(s)$, entonces $h_1(s) \rightarrow 1$ y $h_2(s) \rightarrow 0$. Para esto debiéramos escoger apropiadamente $c(s)$ y podríamos denominar a $h_d(s)$ nuestra referencia de proceso; es decir, el valor deseado para $h(s)$. ♣

Ejemplo 3.9. Para el sistema ilustrado en la Fig. 3.6(a) determine la respuesta a impulso aproximada y exacta utilizando la T.L. Normalice el sistema en torno a un punto de operación nominal.

R.: El modelo promedio para el circuito elevador es $e = L \frac{di}{dt} + v(1-d)$, $i(1-d) = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$, linealizado es $\Delta e = L \frac{d\Delta i}{dt} + \Delta v - (v_o \Delta d + d_o \Delta v)$, $\Delta i - (i_o \Delta d + d_o \Delta i) = C \frac{d\Delta v}{dt} + \frac{\Delta v}{R}$. Al definir las variables normalizadas como $\Delta e_n = \Delta e/e_o$, $\Delta d_n = \Delta d/d_o$, $\Delta v_n = \Delta v/v_o$, e $\Delta i_n = \Delta i/i_o$, el modelo normalizado resultante es $\frac{d\Delta v_n}{dt} = -\frac{1}{RC} \Delta v_n + \frac{1}{RC} \Delta i_n + \frac{-d_o}{RC(1-d_o)} \Delta d_n$, $\frac{d\Delta i_n}{dt} = -\frac{R}{L} (1-d_o)^2 \Delta v_n + \frac{R}{L} (1-d_o) d_o \Delta d_n + \frac{R}{L} (1-d_o)^2 \Delta e_n$. Los

impulsos aproximados por δt se muestran en la Fig. 3.6(b) y la respuesta a esas entradas en la Fig. 3.6(c). Para obtener la respuesta exacta se aplica la T.L. al modelo anterior para obtener Δv_n en función de Δd_n para $\Delta e_n = 0$. Derivando la primera

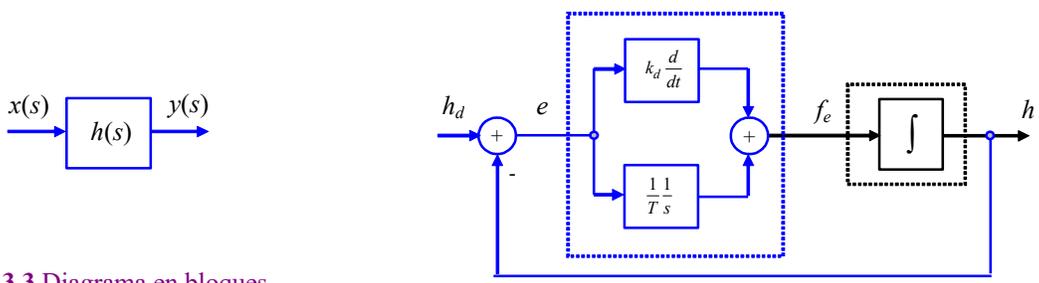


Fig. 3.3 Diagrama en bloques simple.

Fig. 3.4 Diagrama en bloques realimentado.

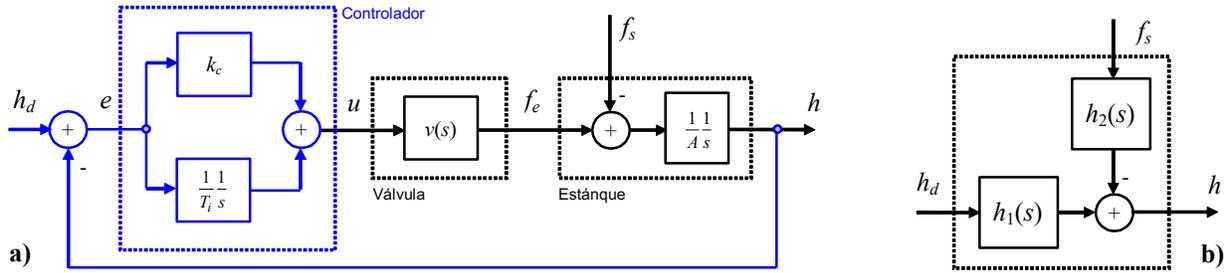


Fig. 3.5 Diagrama en bloques realimentado; a) sistema, b) equivalente.

ecuación se tiene, $\frac{d^2 \Delta v_n}{dt^2} = -\frac{1}{RC} \frac{d \Delta v_n}{dt} + \frac{1}{RC} \frac{d \Delta i_n}{dt} + \frac{-d_o}{RC(1-d_o)} \frac{d \Delta d_n}{dt}$, reemplazando la segunda ecuación en este resultado se tiene, $\frac{d^2 \Delta v_n}{dt^2} = -\frac{1}{RC} \frac{d \Delta v_n}{dt} + \frac{1}{RC} \left\{ -\frac{R}{L} (1-d_o)^2 \Delta v_n + \frac{R}{L} (1-d_o) d_o \Delta d_n + \frac{R}{L} (1-d_o)^2 \Delta e_n \right\} + \frac{-d_o}{RC(1-d_o)} \frac{d \Delta d_n}{dt}$, ordenando se llega a $\frac{d^2 \Delta v_n}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d \Delta v_n}{dt} + \frac{1}{LC} (1-d_o)^2 \Delta v_n = \frac{-d_o}{RC(1-d_o)} \frac{d \Delta d_n}{dt} + \frac{1}{LC} (1-d_o) d_o \Delta d_n + \frac{1}{LC} (1-d_o)^2 \Delta e_n$. Tomando T.L. y $\Delta e_n = 0$ se obtiene, $\left\{ s^2 + s \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} (1-d_o)^2 \right\} \Delta v_n = \left\{ \frac{-d_o}{RC(1-d_o)} s + \frac{1}{LC} (1-d_o) d_o \right\} \Delta d_n$. Definiendo, $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} (1-d_o)$, $\xi = \frac{\sqrt{LC}}{2RC(1-d_o)}$, y $k_p = \frac{d_o}{1-d_o}$, y considerando que si Δd_n es un impulso entonces su T.L. es 1, la expresión anterior se simplifica a, $\Delta v_n(s) = \Delta h_n(s) = k_p \frac{-2\xi \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$. Finalmente, la T.L. inversa de la expresión anterior resulta ser, $\Delta h_n(t) = k_p e^{-\xi \omega_n t} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{1+8\xi^2} \sin \left\{ \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \tan^{-1} \left[\frac{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}{1+2\xi^2} \right] \right\}$, ilustrada en la Fig. 3.6(d). Una vez conocida la respuesta a impulso se puede obtener la respuesta a entrada escalón $u(t)$ como su integral, así, considerando c.i. nulas se tiene que la respuesta a escalón es $\Delta y_{esc}(t) = 1 - k_p e^{-\xi \omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{1+8\xi^2} \sin \left\{ \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{3\xi} \right] \right\}$. Para una entrada entonces dada por $\Delta u_n(t) = u(t) - 2u(t - 0.015) + u(t - 0.030)$ la salida es $\Delta y_n(t) = \Delta y_{esc}(t) - 2\Delta y_{esc}(t - 0.015) + \Delta y_{esc}(t - 0.030)$ como ilustrado en la Fig. 3.6(e). ♣

3.3 Transformada de Fourier

A. Conceptos

Se define para señales continuas no-periódicas y tiene una relación directa con la T.L. de señales. La importancia y/o campo de aplicaciones se aclarará más adelante.

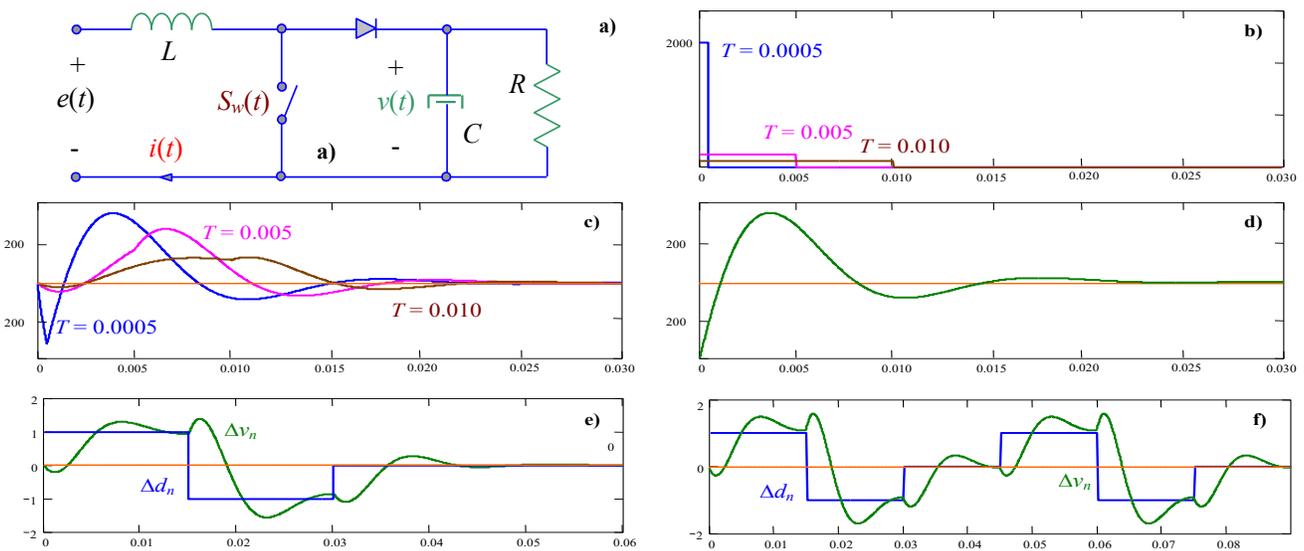


Fig. 3.6 Respuestas dinámicas; **a)** circuito, **b)** impulso aproximado, **c)** respuestas aproximadas a impulso, **d)** respuesta exacta a impulso, **e)** respuesta exacta a entrada arbitraria, **f)** respuesta exacta a entrada periódica.

Def.: Se define la **Transformada de Fourier** (T.F.) de una función $f(t)$, como:

$$F\{f(t)\} = f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

en donde, $f(t) \in \tilde{\sim}$, $t \in \tilde{\sim}$, $j\omega \in \mathbb{C}$.

Nótese que:

- $F\{f(t)\} = f(\omega)$ puede ser calculada como $\mathcal{L}_2\{f(t)\}|_{s=j\omega} = f_2(s)|_{s=j\omega}$.
- $F\{f(t)\} = f(\omega)$ existirá si $\sigma = 0$ pertenece a la banda de convergencia de $f_2(s)$. Es decir si $\sigma_c < 0$.
- Si $f(t)$ tiene soporte positivo entonces $\sigma_c < 0$.
- $e^{\pm j\omega t} = \cos(\omega t) \pm j\sin(\omega t)$.
- $\cos(\omega t) = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$.
- $\sin(\omega t) = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})/(2j)$.

Ejemplo 3.10. Determinar y graficar la T.F. de: **(a)** $f(t) = e^{-|t|}$, como $f_2(s) = \frac{2}{1-s^2}$, entonces, $F\{f(t)\} = f(\omega) = \frac{2}{1-s^2}|_{s=j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$. La gráfica se muestra en la Fig. 3.7(a). **(b)** $f(t) = u(t+T_a) - u(t-T_a)$, como $f_2(s) = \frac{e^{sT_a} - e^{-sT_a}}{s}$, entonces, $f(\omega) = \frac{e^{j\omega T_a} - e^{-j\omega T_a}}{j\omega} = \frac{2\sin(\omega T_a)}{\omega}$. La gráfica se muestra en la Fig. 3.7(c). **(c)** $f(t) = \delta(t - a)$, $f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega a}$.

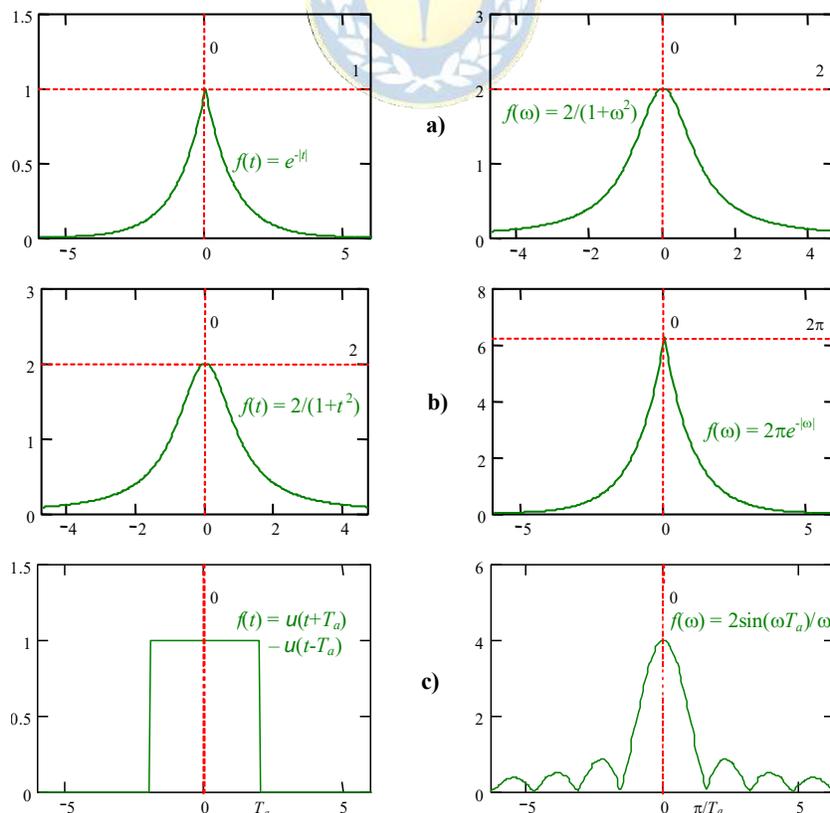


Fig. 3.7 Señales y sus T.F..

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(0)e^{-j\omega a} dt = e^{-j\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) dt = e^{-j\omega a}$. En particular, para $a = 0$, se tiene que $f(t) = \delta(t), f(\omega) = 1$. ♣

Similarmente a la T.L., se cuenta con la T.F. inversa.

Pro.: La T.F. Inversa de una función $f(\omega)$, es:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(t)\} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

en donde, $f(t) \in \sim$, $t \in \sim$, $j\omega \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 3.11. Determine la función $f(t)$ si su T.F. es $f(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$. **R.:** $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) e^{j\omega_0 t} d\omega = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) d\omega = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi}$. Nótese que si $\omega_0 = 0$; entonces la T.F. de $f(t) = \frac{1}{2\pi}$ es $\delta(\omega)$. ♣

Ejemplo 3.12. Determine la T.F. de $f(t) = \cos(\omega_0 t)$. **R.:** Como $f(t) = \cos(\omega_0 t) = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2$, y utilizando el resultado anterior se tiene que $f(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$, Fig. 3.8(b). ♣

Ejemplo 3.13. Determine la T.F. de $f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_0)$. **R.:** Como la señal es periódica, se puede escribir como $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$, donde $\omega_0 = 2\pi/T_0$ y $c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = 1/T_0$; por lo tanto, $f(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$ y $f(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$, Fig. 3.9(b). ♣

B. Propiedades

Simetría de la T.F.: Sea $f(t)$ con T.F. $f(\omega)$, si $g(t) = f(\omega)|_{\omega=t}$, entonces, $g(\omega) = 2\pi f(t)|_{t=-\omega}$, Fig. 3.7(a) y (b). Dem.:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)|_{\omega=t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) e^{j(-\omega)\Omega} d\Omega = 2\pi f(t)|_{t=-\omega} \end{aligned}$$

Convención. Sea $f(t)$ con T.F. $f(\omega)$ y $g(t)$ con T.F. $g(\omega)$, entonces, $f(t)*g(t) = f(\omega)g(\omega)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)g(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)g(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau g(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) f(\tau) d\tau = g(t) * f(t) \end{aligned}$$

Producto. Sea $f(t)$ con T.F. $f(\omega)$ y $g(t)$ con T.F. $g(\omega)$, entonces, $f(t)g(t) = f(\omega)*g(\omega)/(2\pi)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\psi)e^{j\psi t} d\psi e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\psi)t} dt g(\psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega-\psi)g(\psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} f(\omega) * g(\omega) \end{aligned}$$

Modulación AM (caso especial del producto, Fig. 3.8). Sea $f(t)$ con T.F. $f(\omega)$, entonces, la T.F. de $f(t)\cos(\omega_o t)$ es, $1/2f(\omega - \omega_o) + 1/2f(\omega + \omega_o)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\cos(\omega_o t)\} &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\{\cos(\omega_o t)\} = \frac{1}{2\pi} f(\omega) * \{\pi\delta(\omega - \omega_o) + \pi\delta(\omega + \omega_o)\} \\ &= \frac{1}{2} \{f(\omega - \omega_o) + f(\omega + \omega_o)\} \end{aligned}$$

Muestreo con Impulsos (caso especial del producto, Fig. 3.9). Sea $f(t)$ con T.F. $f(\omega)$, entonces, la T.F. de $f(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t-lT_0)$ es $\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega - n\omega_0)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0)\right\} &= \frac{1}{2\pi} f(\omega) * \mathcal{F}\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t-lT_0)\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} f(\omega) * \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

Teorema de la Potencia. Sea $f(t)$ con T.F. $f(\omega)$ y $g(t)$ con T.F. $g(\omega)$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t) dt =$

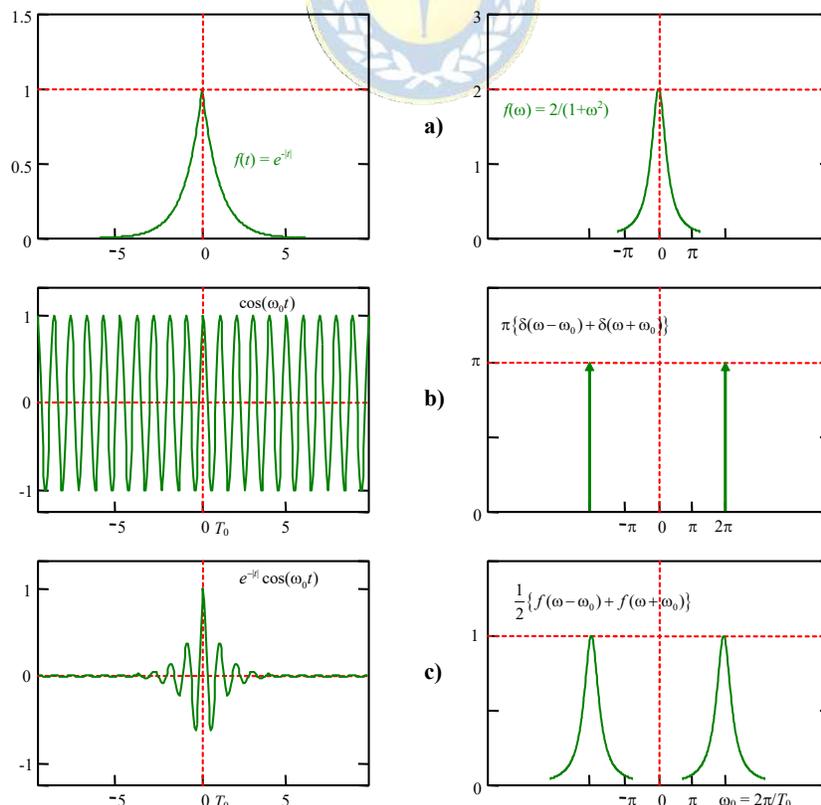


Fig. 3.8 Modulación AM; **a)** señal y su T.F., **b)** coseno y su T.F., **c)** señal resultante y su T.F..

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)g^*(\omega)d\omega . \text{ Dem.:}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right\}^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)^* e^{-j\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)^* f(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)g(\omega)^* d\omega \end{aligned}$$

Teorema de la Energía (Teorema de Rayleigh y caso especial del Teorema de Potencia). Sea $f(t)$ con T.F. $f(\omega)$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega$. Dem.:

Dado que $|f(x)|^2 = f(x)f(x)^*$ se demuestra con el teorema anterior.

Ejemplo 3.14. Dado que $f(t) = e^{-|t|}$, tiene una T.F. dada por $f(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, entonces, la función $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$ tiene una T.F. dada por $g(\omega) = 2\pi e^{-|\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|}$. Las gráficas se muestran en la Fig. 3.7(a) y (b). ♣

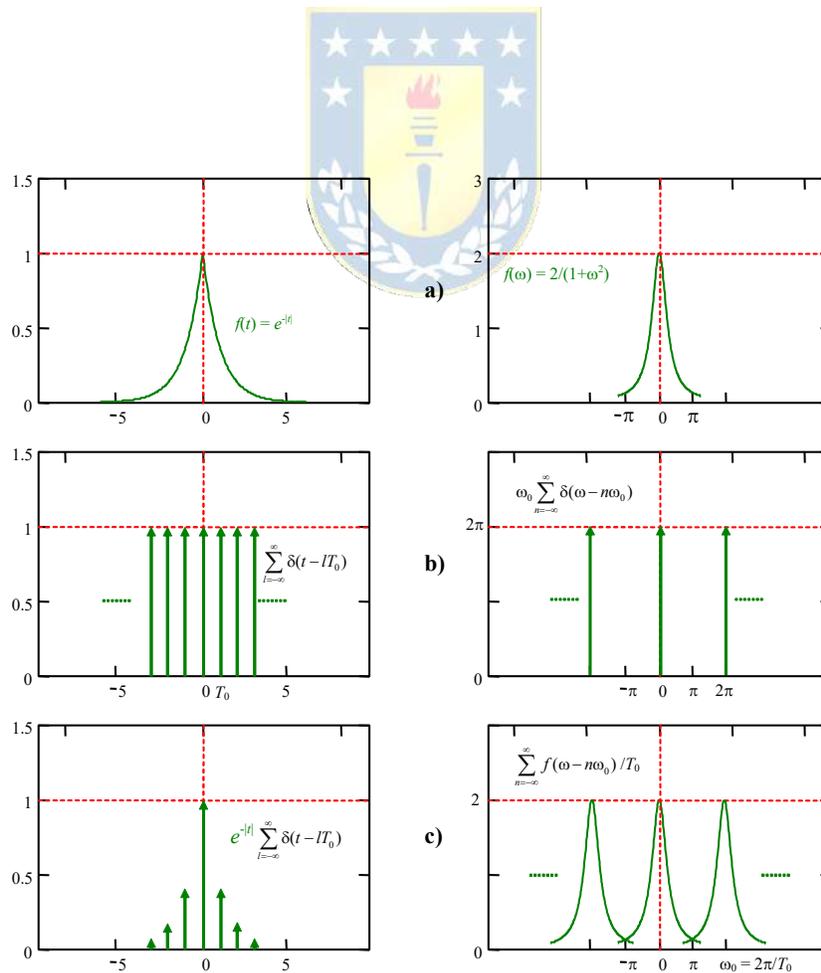


Fig. 3.9 Muestreo por impulsos, $T_0 = 1$; **a)** señal y su T.F., **b)** tren de impulsos y su T.F., **c)** señal resultante y su T.F..

3.4 Transformada de Fourier de Frecuencia Discreta

La señal $f(t)$ tiene por T.F. a $f(\omega)$ si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ converge. Dado que $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-j\omega t}| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$, entonces, una condición suficiente para que la T.F. exista es que $f(t)$ sea integrable en forma absoluta. Esto no sucede con la mayoría de las señales periódicas. Para estas señales se tiene la Transformada de Fourier de Frecuencia Discreta (T.F.F.D.).

Def.: Se define la **Transformada de Fourier de Frecuencia Discreta** (T.F.F.D.) de una señal $f(t)$ con periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$, como:

$$f(n) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt,$$

en donde, $f(t) \in \sim$, $t \in \sim$, $jn\omega_0 \in \mathbb{C}$.

Nótese que la definición anterior corresponde al muestreo de la T.F. de un período de la señal $f(t)$ dividida por T_0 . es decir,

$$f(n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} f(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=n\omega_0},$$

por lo tanto, si se dispone de la T.F. de un periodo de la señal $f(t)$, entonces, la T.F.F.D. es inmediata, por cuanto se requiere sólo de un reemplazo. También se tiene la existencia de la Transformada de Fourier

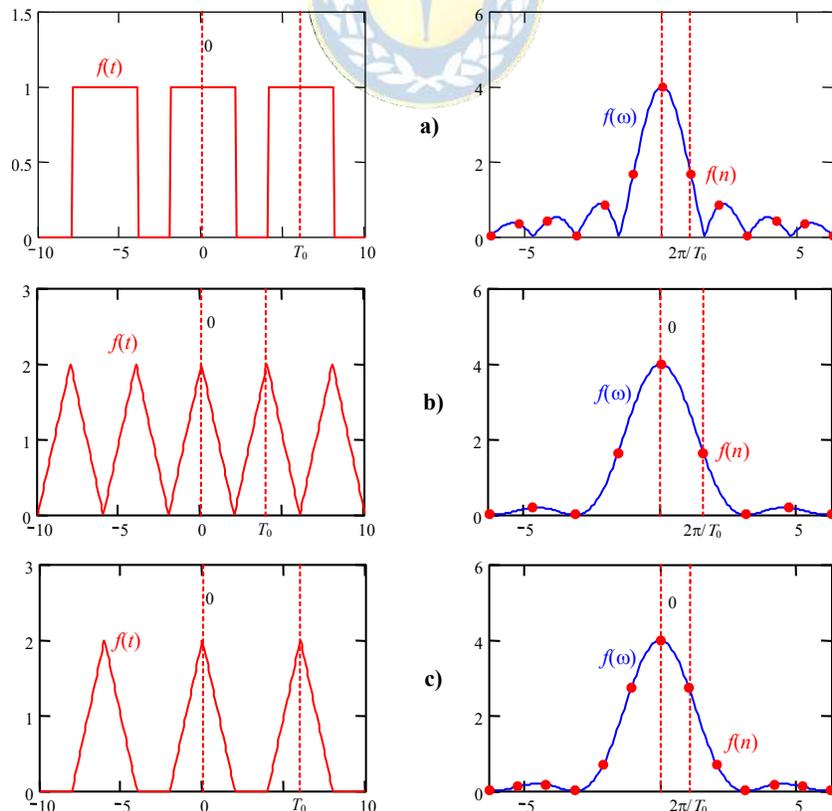


Fig. 3.10 Señales y sus T.F.F.D..

de Frecuencia Discreta Inversa.

Pro.: La T.F.F.D. Inversa de una señal $f(t)$ con periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$, es:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n)e^{jn\omega_0 t},$$

en donde, $f(t) \in \sim$, $t \in \sim$, $jn\omega_0 \in \mathbb{C}$.

El parecido de la expresión anterior con la serie de Fourier de un señal periódica no es coincidencia. Es más, una señal periódica puede ser escrita como, $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c(n)e^{jn\omega_0 t}$, donde $c(n)$ son los Coeficientes de Fourier dados por $c(n) = [a_n - jb_n]/2$, con $a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$ y $b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$. Por lo tanto, se espera que $f(n)$ corresponda a los Coeficientes de Fourier de la señal $f(t)$.

Ejemplo 3.15. Dada la señal de pulsos periódica $f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_0(t - lT_0)$ con $f_0(t) = u(t+T_a) - u(t-T_a)$ se determina la T.F.F.D. de $f(t)$ como el muestreo de la T.F. de la señal $f_0(t)$. Como $f_0(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_a)}{\omega}$, entonces, la T.F.F.D. de $f(t)$ es $f(n) = f_0(\omega)|_{\omega = n\omega_0/T_0} = \frac{1}{T_0} \frac{2 \sin(n\omega_0 T_a)}{n\omega_0} = \frac{1}{T_0} \frac{2 \sin(2\pi n T_a / T_0)}{2\pi n / T_0}$. La gráfica se muestra en la Fig. 3.10(a). ♣

Ejemplo 3.16. Dada la señal de dientes de sierra periódica $f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_0(t - lT_0)$ con $f_0(t) = (t+T_a)u(t+T_a) - 2tu(t) + (t-T_a)u(t-T_a)$ se determina la T.F.F.D. de $f(t)$ como el muestreo de la T.F. de la señal $f_0(t)$. Como $f_0(\omega) = \frac{2(1 - \cos(\omega T_a))}{\omega^2}$, entonces, la T.F.F.D. de $f(t)$ es $f(n) = f_0(\omega)|_{\omega = n\omega_0/T_0} = \frac{1}{T_0} \frac{2(1 - \cos(n\omega_0 T_a))}{(n\omega_0)^2} = \frac{1}{T_0} \frac{2(1 - \cos(2\pi n T_a / T_0))}{(2\pi n / T_0)^2}$. La gráfica se muestra en la Fig.

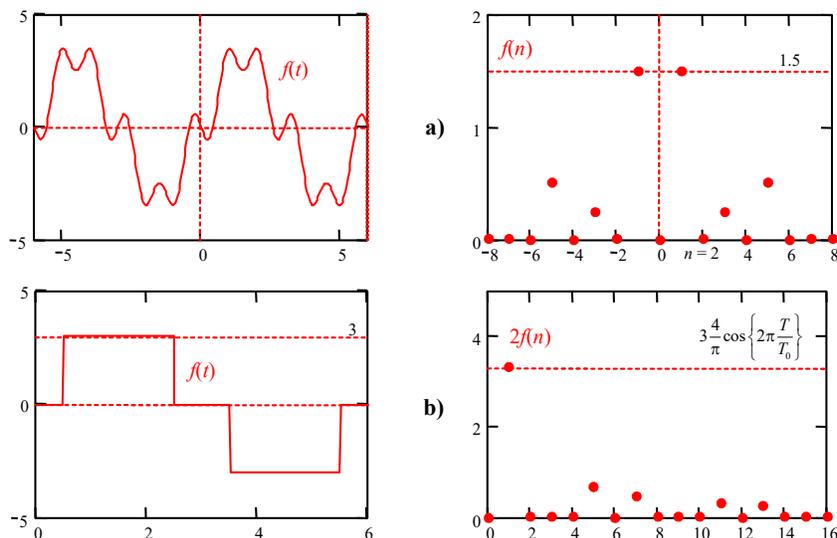


Fig. 3.11 Señales periódicas conocidas y sus T.F.F.D..

3.10(b) y (c) para dos valores de T_0 . ♣

Ejemplo 3.17. Dada la señal periódica $f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_0(t-lT_0)$ donde $f_0(t) = 3\sin(2\pi t/T_0) - 0.5\sin(3 \cdot 2\pi t/T_0) - \sin(5 \cdot 2\pi t/T_0)$ que contiene una fundamental, una tercera y una quinta componente. Se obtiene su T.F.F.D. numéricamente y se muestra en la Fig. 3.11(a). Se puede apreciar que $f(n)$ con $n = 1$ es 1.5 que corresponde a la mitad del valor de amplitud del primer armónico de $f(t)$. Similarmente, $f(n)$ con $n = 5$ es 0.5 que corresponde a la mitad del valor de amplitud del quinto armónico de $f(t)$. Esto corrobora la relación entre $f(n)$ y los coeficientes de Fourier de la señal $f(t)$. ♣

Ejemplo 3.18. Dada la señal periódica $f(t)$ como mostrada en la Fig. 3.11(b). Al obtener su T.F.F.D. numéricamente y graficarla ampliada por un factor de dos y sólo para valores positivos de n , se encuentra que $2f(n)$ con $n = 1$ es $3 \frac{4}{\pi} \cos\left\{2\pi \frac{T}{T_0}\right\}$ que corresponde al valor de amplitud del primer armónico de $f(t)$. ♣

Ejemplo 3.19. Para el sistema ilustrado en la Fig. 3.12(a) determine los primeros cuatro coeficientes de la serie de Fourier de la respuesta a la entrada periódica $\Delta u_n(t) = \Delta d_n(t) = u(t) - 2u(t - 0.015) + u(t - 0.030)$ con periodo $T_o = 0.045$. **R.:** La T.L. de un periodo de la entrada es $\Delta u_n(s) = (1 - 2e^{-0.015s} + e^{-0.030s})/s$, la T.L. de la respuesta a impulso es $\Delta h_n(s) = k_p(-2\xi\omega_n s + \omega_n^2)/(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$, por lo que la T.L. de un periodo de la salida normalizada es $\Delta y_n(s) = (1 - 2e^{-0.015s} + e^{-0.030s})/s \cdot k_p(-2\xi\omega_n s + \omega_n^2)/(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$. Por lo tanto, la T.F. de un periodo de la señal de salida es $\Delta y_n(\omega) = (1 - 2e^{-0.015j\omega} + e^{-0.030j\omega})/(j\omega) \cdot k_p(-2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2)/(-\omega^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2)$, Fig. 3.12(b) y (c). La T.F.F.D. para la señal de salida periódica se encuentra reemplazando ω en $\Delta y_n(\omega)$ por $2n\pi F_o$, (con $T_o = 1/F_o$) y dividiéndola por T_o , así, $\Delta y_n(n) = 1/T_o(1 - 2e^{-0.015j2n\pi F_o} + e^{-0.030j2n\pi F_o})/(j2n\pi F_o) \cdot k_p(-2\xi\omega_n j2n\pi F_o + \omega_n^2)/(-(2n\pi F_o)^2 + 2\xi\omega_n j2n\pi F_o + \omega_n^2)$. La gráfica para varios valores de n y ω se muestran en la Fig. 3.12(b) para la magnitud y Fig. 3.12(c) para la fase. Finalmente, los

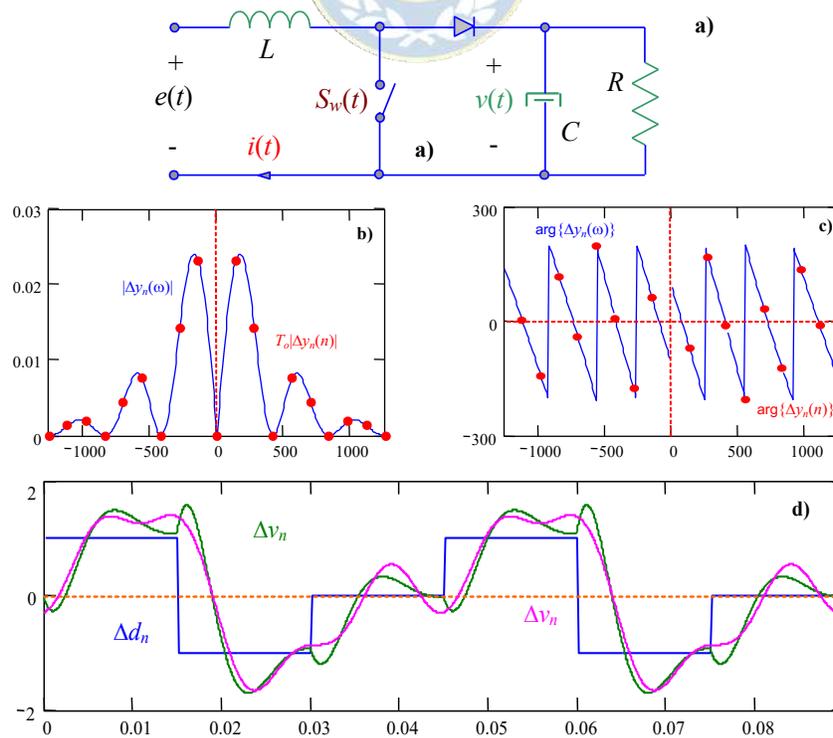


Fig. 3.12 Coeficientes de Fourier; **a)** circuito, **b)** módulo de la T.F. y T.F.F.D., **c)** fase de la T.F. y T.F.F.D., **d)** entrada, respuesta aproximada y exacta.

coeficientes serán la evaluación de $\Delta y_n(n)$ con $n = 1, 2, 4, \text{ y } 5$. Por lo tanto, una aproximación a la señal periódica de salida considerando los primeros cuatro armónicos es $\Delta y_n(t) = 2|\Delta y_n(1)|\cos(2\pi F_o t + \arg\{\Delta y_n(1)\}) + 2|\Delta y_n(2)|\cos(2 \cdot 2\pi F_o t + \arg\{\Delta y_n(2)\}) + 2|\Delta y_n(4)|\cos(4 \cdot 2\pi F_o t + \arg\{\Delta y_n(4)\}) + 2|\Delta y_n(5)|\cos(5 \cdot 2\pi F_o t + \arg\{\Delta y_n(5)\})$. La gráfica de la entrada periódica y las salidas exacta y aproximada se muestran en la Fig. 3.12(d). ♣

3.5 Transformada \mathcal{Z}

La Transformada \mathcal{Z} se introduce como el dual de la Transformada de Laplace. Es decir, como alternativa de análisis para sistemas que trabajan con señales discretas.

A. Conceptos

La serie dada por $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots = \frac{1}{1-r}$, con $r \in \mathbb{C}$ converge si $|r| < 1$. Por otro lado, se

tiene que $\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} r^k \right\}^2 = (1 + r + r^2 + \dots)(1 + r + r^2 + \dots) = 1 + r + r^2 + \dots + r + r^2 + r^3 + \dots + r^3 + r^4 + r^5 + \dots =$

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 5r^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)r^k = \left[\frac{1}{1-r} \right]^2 = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Estas definiciones son preliminares para la introducción de la Transformada \mathcal{Z} .

Def.: Se define la **Transformada \mathcal{Z}** (T.Z.) de una secuencia de valores $f(kT)$, donde, $k = 0, 1, \dots$ y T es el período de muestreo como,

$$\mathcal{Z}\{f(kT)\} = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k},$$

en donde, $f(kT) \in \sim$, $k \in \bullet_0$, $z = u + jv \in \mathbb{C}$.

Notar que $f(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$, por lo que su convergencia dependerá de z . Esto es equivalente a la convergencia en la T.L. de señales continuas $f(t)$, donde sólo para algunos valores de s la T.L. $f(s)$ converge. En particular, se encontró en el plano s que las regiones de convergencia eran paralelas al eje imaginario. Si el límite inferior de la sumatoria en la definición de la T.Z. se considera a $-\infty$, entonces se dice T.Z. Bilateral.

Ejemplo 3.20. Para la señal discreta $f(kT) = e^{-kT}u(kT)$ determine su T.Z.. **R.:** En este caso, $\mathcal{Z}\{f(kT)\} = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT}u(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-T}z^{-1})^k = \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}}$, que converge si $|e^{-T}z^{-1}| < 1$, que es equivalente a $|e^{-T}| < |z|$.

Notar que la región donde $f(z)$ converge es el complemento de un círculo de radio $|e^{-T}|$. ♣

Ejemplo 3.21. Calcule la T.Z. de, **(a)** $f(kT) = \delta(kT)$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT)z^{-k} = \delta(0) + \delta(T)z^{-1} + \dots = 1$, **(b)** $f(kT)$

$$= u(kT), f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}. \quad \text{(c)} f(kT) = r(kT), f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kT u(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} kT z^{-k} = Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) = Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots) = Tz^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^{-k} = Tz^{-1} \frac{1}{(1-z^{-1})^2}.$$

$$\text{(d)} f(kT) = \sin(\omega kT), f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\omega kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}}{2j} \right\} z^{-k} = \frac{1}{2j} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} e^{j\omega kT} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega kT} z^{-k} \right\} = \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right\} = \frac{z^{-1} \sin(\omega T)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega T) + z^{-2}}. \clubsuit$$

Al igual que los casos anteriores, para obtener la T.Z. Inversa se puede utilizar,

Pro.: La T.Z. Inversa de una función $f(z)$, es:

$$f(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\{f(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(z) z^{k-1} dz,$$

donde, T es el período de muestreo y $f(kT) \in \sim$, $k \in \bullet_0$, $z = u + jv \in \mathbb{C}$ y Γ es un contorno cerrado donde $f(z)$ converge.

Al igual que en la T.L. no es práctico la utilización de la definición de la T.L. Inversa y se recurre a simplificar (normalmente utilizando fracciones parciales) la expresión de $f(z)$ para luego reconocer funciones típicas.

Ejemplo 3.22. Calcule la T.Z. Inversa de $f(z) = \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}$. **R.:** La expresión para $f(z)$ se puede escribir como

$$f(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}, \text{ por lo que reconociendo términos se puede encontrar que } f(kT) = u(kT) - e^{-kT}u(kT). \clubsuit$$

B. Propiedades

Linealidad. Sean $f_1(kT)$ con T.Z. $f_1(z)$, $f_2(kT)$ con T.Z. $f_2(z)$, α_1 y α_2 constantes reales, entonces la T.Z. de $\alpha_1 f_1(kT) + \alpha_2 f_2(kT)$ es $\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\alpha_1 f_1(kT) + \alpha_2 f_2(kT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_1 f_1(kT) + \alpha_2 f_2(kT)) z^{-k} \\ &= \alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) z^{-k} + \alpha_2 \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT) z^{-k} \\ &= \alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z) \end{aligned}$$

En el caso general, dadas $f_i(kT)$ con T.Z. dadas por $f_i(z)$ y coeficientes α_i reales, entonces la T.Z. de $\sum_i \alpha_i f_i(kT)$ es $\sum_i \alpha_i f_i(z)$.

Escalamiento en el tiempo. Sea $f(kT)$ con T.Z. $f(z)$ y a una constante real, entonces la T.Z. de $f(akT)$ es $f(z^{1/a})$. Dem.:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f(akT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(akT)z^{-k} && \text{si } n = ak, \quad k|_0^{\infty} \rightarrow n|_0^{\infty} \quad a > 0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n/a} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)(z^{1/a})^{-n} \\ &= f(z^{1/a})\end{aligned}$$

Desplazamiento en el tiempo. Sea $f(kT)$ con T.Z. $f(z)$ y a una constante real positiva, entonces la T.Z. de $f(kT - aT)$ es $z^{-a} \left\{ f(z) + \sum_{n=-a}^{-1} f(nT)z^{-n} \right\}$ y la de $f(kT + aT)$ es $z^a \left\{ f(z) - \sum_{n=0}^{a-1} f(nT)z^{-n} \right\}$. Dem.:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f(kT - aT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - aT)z^{-k} && \text{si } n = k - a, \quad k|_0^{\infty} \rightarrow n|_{-a}^{\infty} \quad a > 0 \\ &= \sum_{n=-a}^{\infty} f(nT)z^{-(n+a)} = \sum_{n=-a}^{\infty} f(nT)z^{-n}z^{-a} - \sum_{n=-a}^{-1} f(nT)z^{-n}z^{-a} + \sum_{n=-a}^{-1} f(nT)z^{-n}z^{-a} \\ &= z^{-a} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} + \sum_{n=-a}^{-1} f(nT)z^{-n} \right\} = z^{-a} \left\{ f(z) + \sum_{n=-a}^{-1} f(nT)z^{-n} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f(kT + aT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + aT)z^{-k} && \text{si } n = k + a, \quad k|_0^{\infty} \rightarrow n|_a^{\infty} \quad a > 0 \\ &= \sum_{n=a}^{\infty} f(nT)z^{-(n-a)} = \sum_{n=a}^{\infty} f(nT)z^{-n}z^a + \sum_{n=0}^{a-1} f(nT)z^{-n}z^a - \sum_{n=0}^{a-1} f(nT)z^{-n}z^a \\ &= z^a \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} - \sum_{n=0}^{a-1} f(nT)z^{-n} \right\} = z^a \left\{ f(z) - \sum_{n=0}^{a-1} f(nT)z^{-n} \right\}\end{aligned}$$

Escalamiento en la frecuencia. Sea $f(kT)$ con T.Z. $f(z)$ y a una constante real, entonces la T.Z. de $a^k f(kT)$ es $f(a^{-1}z)$. Dem.:

$$\mathcal{Z}\{a^k f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(a^{-1}z)^{-k} = f(a^{-1}z).$$

Diferencia. Sea $f(kT)$ con T.Z. $f(z)$, entonces la T.Z. de $f(kT) - f(kT - T)$ es $(1 - z^{-1})f(z)$. Dem.:

$$\mathcal{Z}\{f(kT) - f(kT - T)\} = f(z) - z^{-1}f(z) = (1 - z^{-1})f(z).$$

Sumatoria. Sea $f(kT)$ con T.Z. $f(z)$, entonces la T.Z. de $\sum_{i=0}^k f(iT)$ es $\frac{1}{1 - z^{-1}} f(z)$. Dem.:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^k f(iT)\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k f(iT)z^{-k} = f(0) + \{f(0) + f(T)\}z^{-1} + \{f(0) + f(T) + f(2T)\}z^{-2} + \dots \\ &= \{f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots\} + \{f(0)z^{-1} + f(T)z^{-2} + \dots\} + \{f(0)z^{-2} + \dots\} + \dots \\ &= \{f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots\} + z^{-1}\{f(0) + f(T)z^{-1} + \dots\} + z^{-2}\{f(0) + \dots\} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} + z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} + z^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} + \dots \\ &= f(z) + z^{-1}f(z) + z^{-2}f(z) + \dots = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \right\} f(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} f(z)\end{aligned}$$

Teorema del Valor Inicial. Sea $f(kT)$ con T.Z. $f(z)$, entonces $f(kT)|_{k=0} = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$. Dem.:

se sabe $\mathcal{Z}\{f(kT)\} = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$

por lo tanto $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \{f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots\}$,
 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(0) + \lim_{z \rightarrow \infty} \{f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots\}$
 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(0)$

Teorema del Valor Final. Sea $f(kT)$ con T.Z. $f(z)$, entonces $f(kT)|_{k \rightarrow \infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})f(z)$.

Dem.:

se sabe $\mathcal{Z}\{f(kT)\} = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$

y que $\mathcal{Z}\{f(kT - T)\} = z^{-1}f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - T)z^{-k} = f(-T) + f(0)z^{-1} + f(T)z^{-2} + \dots$,

por lo tanto $f(z) - z^{-1}f(z) = (f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots) - (f(0)z^{-1} + f(T)z^{-2} + \dots)$
 $\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$

Señales Periódicas. Sea $f_0(kT)$ con T.Z. $f_0(z)$ y la señal periódica $f(kT) = \sum_{i=0}^{\infty} f_0(kT - ipT)$, entonces la

T.Z. de $f(kT)$ es $\frac{1}{1 - z^{-p}} f_0(z)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(kT)\} &= \mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} f_0(kT - ipT)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{\sum_{i=0}^{\infty} f_0(kT - ipT)\right\} z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_0(kT - ipT) z^{-k} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} z^{-ip} f_0(z) = f_0(z) \sum_{i=0}^{\infty} z^{-ip} = f_0(z) \frac{1}{1 - z^{-p}} \end{aligned}$$

Convolución. Sea $f(kT)$ con T.Z. $f(z)$ y $g(kT)$ con T.Z. $g(z)$, entonces $f(kT)*g(kT)$ tiene una T.Z. dada por $f(z)g(z)$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(kT)*g(kT)\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \{f(kT)*g(kT)\} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{\sum_{i=0}^{\infty} f(iT)g(kT - iT)\right\} z^{-k} \quad \text{si } n = k - i, \quad k|_0^{\infty} \rightarrow n|_{-i}^{\infty} \\ &= \sum_{n=-i}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(iT)g(nT)z^{-(n+i)} = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} f(iT)z^{-i}\right\} \left\{\sum_{n=0}^{\infty} g(nT)z^{-n}\right\} \\ &= f(z)g(z) \end{aligned}$$

Convolución de Línea. Sea $f(kT)$ con T.Z. $f(z)$ y $g(kT)$ con T.Z. $g(z)$, entonces $f(kT)g(kT)$ tiene una T.Z.

dada por $\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z/v)v^{-1}g(v)dv$. Dem.:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(kT)g(kT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)g(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} g(v)v^{k-1} dv \right\} z^{-k} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}v^{k-1} g(v) dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(v^{-1}z)^{-k} \right\} v^{-1} g(v) dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(z/v)v^{-1} g(v) dv \end{aligned}$$

Ejemplo 3.23. El caso del depósito inicial está dado por la ecuación $P(kT + T) - (1 + I)P(kT) = 0$. Si el depósito inicial es $P(0) = P_0$ encuentre la ecuación para determinar la cantidad resultante al mes kT arbitrario. **R.:** Al tomar la T.Z. a la ecuación queda $z\{P(z) - P(0)\} - (1 + I)P(z) = 0$, por lo que $P(z) = \frac{z}{z - (1 + I)} P_0$, tomando la T.Z. inversa se obtiene la cantidad al mes kT como $P(kT) = P_0(1 + I)^k u(kT)$, correspondiente a la clásica ecuación financiera para un depósito inicial a un interés fijo. ♣

Ejemplo 3.24. Estudiar el caso del depósito inicial P_0 más un aporte mensual fijo P_1 a partir del 2^{do} mes. **R.:** Este caso está dado por la ecuación $P(kT + T) = (1 + I)P(kT) + (1 + I)u(kT)$, donde $u(kT) = P_1 u(kT - T)$. Al tomar la T.Z. se obtiene $z\{P(z) - P(0)\} = (1 + I)P(z) + (1 + I)P_1 z\{u(kT - T)\}$, o bien, $zP(z) - zP_0 = (1 + I)P(z) + (1 + I)P_1 z^{-1} \frac{z}{z-1}$, por lo que $P(z) = \frac{z}{z - (1 + I)} P_0 + \frac{1 + I}{z - (1 + I)} \frac{1}{z - 1} P_1$, utilizando fracciones parciales se llega a $P(z) = \frac{z}{z - (1 + I)} P_0 + \frac{1 + I}{I} P_1 \left\{ \frac{1}{z - (1 + I)} - \frac{1}{z - 1} \right\}$, lo que se puede escribir como $P(z) = \frac{z}{z - (1 + I)} P_0 + \frac{1 + I}{I} P_1 \left\{ z^{-1} \frac{z}{z - (1 + I)} - z^{-1} \frac{z}{z - 1} \right\}$, reconociendo los escalones retardados en una unidad de tiempo discreto se puede tomar la T.Z. inversa y por lo tanto la cantidad al mes kT queda dada por $P(kT) = P_0(1 + I)^k u(kT) + \frac{1 + I}{I} P_1 \{(1 + I)^{k-1} - 1\} u(kT - T)$. ♣

3.6 Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Sea $f(t)$ una señal continua y sea $g(t)$ la función $f(t)$ muestreada con impulsos a intervalos regulares distanciados en T . Así, la función muestreada es $g(t) = f(t)\{\dots + \delta(t + T) + \delta(t) + \delta(t - T) + \dots\} = \{\dots + f(t)\delta(t + T) + f(t)\delta(t) + f(t)\delta(t - T) + \dots\} = \{\dots + f(-T)\delta(t + T) + f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t - T) + \dots\}$, $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$. Al tomar la T.F. de $g(t)$ se obtiene, $g(\Omega) = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\mathcal{F}\{\delta(t - kT)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-j\Omega kT}$. Nótese que la expresión anterior sólo depende de la señal $f(t)$ muestreada a intervalos regulares, que corresponde a la señal discreta $f(kT)$. Es decir, la operación anterior es una operación aplicada a una señal discreta. La operación anterior se conoce como la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto, pues es una operación que se aplica sobre una señal discreta, pero resulta en una función continua que depende de Ω . Se utiliza la variable Ω para denotar la frecuencia, y no ω , para resaltar que se trata de aplicar la operación sobre una señal discreta.

Def.: Se define la **Transformada de Fourier de Tiempo Discreto** (T.F.T.D.) de una señal $f(kT)$, como:

$$f(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-j\Omega kT},$$

en donde, $f(kT) \in \sim$, $T \in \sim$, $j\Omega kT \in \mathbb{C}$.

Nótese que la T.Z. de la señal $f(kT)$ es $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$. Es más, si la señal tiene soporte positivo, entonces, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)z^{-k}$, por lo que la T.F.T.D. de una señal discreta se puede obtener reemplazando z por $e^{j\Omega T}$ en su T.Z. Similarmente, se tiene la T.F.T.D. Inversa como,

Def.: La T.F.T.D. Inversa de una señal $f(\Omega)$, es:

$$f(kT) = \int_0^T f(\Omega)e^{j\Omega kT} d\Omega,$$

en donde, $f(kT) \in \sim$, $T \in \sim$, $j\Omega kT \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 3.25. Calcule la T.F.T.D. de $f(kT) = u(kT+T_a) - u(kT-T_a)$. **R.:** La T.Z. de $f(kT)$ es $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT+T_a)z^{-k} -$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT-T_a)z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT+TT_a/T)z^{-k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT-TT_a/T)z^{-k} = \frac{z^{T_a/T} - z^{-T_a/T}}{1 - z^{-1}}. \text{ Por lo que, reemplazando } z \text{ por } e^{j\Omega T}$$

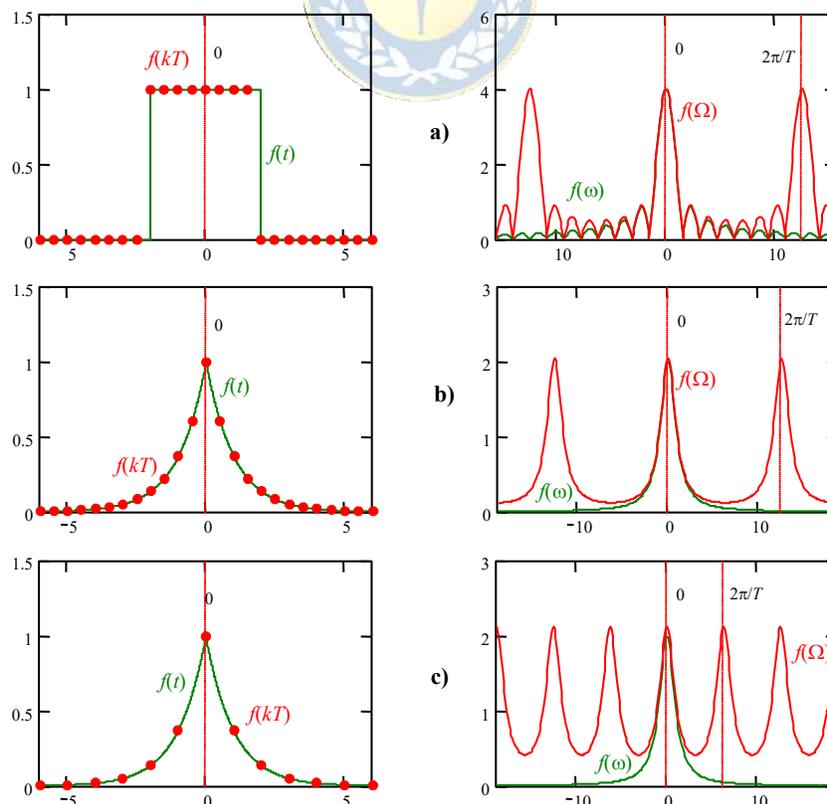


Fig. 3.13 Señales discretas y sus T.F.T.D. (las señales en verde son las equivalentes continuas).

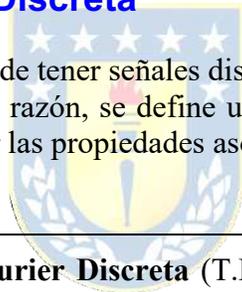
se obtiene $f(\Omega) = \frac{(e^{j\Omega T})^{T_a/T} - (e^{j\Omega T})^{-T_a/T}}{1 - (e^{j\Omega T})^{-1}} = \frac{e^{j\Omega T_a} - e^{-j\Omega T_a}}{1 - e^{-j\Omega T}}$. La Fig. 3.13(a) muestra la gráfica de $f(t)$ que muestreada resulta en $f(kT)$, también se muestra $f(\omega)$ que es el módulo de la T.F. de la señal continua $f(kT)$ y el módulo de $f(\Omega)$ que es la T.F.T.D. de $f(kT)$. Se puede ver que $f(\Omega)$ es periódica de periodo $2\pi/T$ y que se asemeja a $f(\omega)$ para bajas frecuencias. ♣

Ejemplo 3.26. Calcule la T.F.T.D. de $f(kT) = e^{-|kT|}$. **R.:** La T.Z. de $f(kT)$ es $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|kT|} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^0 e^{-|kT|} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-|kT|} z^{-k}$
 $-1 = \sum_{n=-\infty}^0 e^{-|nT|} z^n + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} z^{-k} \quad -1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} z^n + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} z^{-k} \quad -1 = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-T} z)^n + \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-T} z^{-1})^k \quad -1 = \frac{1}{1 - e^{-T} z} + \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} - 1$
 Por lo que, reemplazando z por $e^{j\Omega T}$ se obtiene $f(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-T} e^{j\Omega T}} + \frac{1}{1 - e^{-T} e^{-j\Omega T}} - 1 = \frac{1}{1 - e^{-(1-j\Omega)T}} + \frac{1}{1 - e^{-(1+j\Omega)T}} - 1$. La

Fig. 3.13(b) muestra la gráfica de $f(t)$ que muestreada resulta en $f(kT)$, también se muestra $f(\omega)$ que es el módulo de la T.F. de la señal continua $f(t)$ y el módulo de $f(\Omega)$ que es la T.F.T.D. de $f(kT)$. Se puede ver que $f(\Omega)$ es periódica de periodo $2\pi/T$ y que se asemeja a $f(\omega)$ para bajas frecuencias. La Fig. 3.13(c) muestra idénticos resultados pero con un T igual al doble del anterior. Claramente, $f(\Omega)$ es periódica de periodo $2\pi/T$ y que se asemeja a $f(\omega)$ para bajas frecuencias, pero ahora para un rango menor de frecuencias. Esto es esperable, puesto que mientras menor sea T la señal se asemeja aún más a la señal continua y por lo tanto $f(\Omega)$ y $f(\omega)$ debieran tender a ser idénticas. ♣

3.7 Transformada de Fourier Discreta

Similarmente al caso continuo, en el caso de tener señales discretas y periódicas la operatoria asociada a la T.F.T.D. puede no converger. Por esta razón, se define una Transformada de Fourier Discreta para señales periódicas de manera de mantener las propiedades asociadas al espectro en frecuencia obtenidas con las transformaciones anteriores.



Def.: Se define la **Transformada de Fourier Discreta** (T.F.D.) de una señal $f(kT)$ con periodo $T_0 = 2\pi/\Omega_0$, como:

$$f(m) = \frac{1}{T_0/T} \sum_{k=0}^{T_0/T-1} f(kT) e^{-jm\Omega_0 kT} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jmk2\pi/N},$$

en donde, $f(kT) \in \sim$, $N = T_0/T = 2\pi/(\Omega_0 T) \in \bullet$, $jmk2\pi/N \in \mathbb{C}$.

Nótese que la definición anterior corresponde al muestreo de la T.F.T.D. de un periodo de la señal $f(kT)$ dividida por N ; es decir,

$$f(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jmk2\pi/N} = \frac{1}{N} f(\Omega) \Big|_{\Omega=m\Omega_0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j\Omega kT} \Big|_{\Omega=m\Omega_0},$$

por lo tanto, si se dispone de la T.F.T.D. de un periodo de la señal $f(kT)$, entonces, la T.F.D. es inmediata. Similarmente, se tiene la Transformada de Fourier Discreta Inversa.

Pro.: La Transformada de Fourier Discreta Inversa de una señal $f(m)$, es:

$$f(kT) = \sum_{m=0}^{T_0/T-1} f(m) e^{jm\Omega_0 kT} = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) e^{jmk2\pi/N},$$

en donde, $f(kT) \in \sim$, $N = T_0 / T = 2\pi / (\Omega_0 T) \in \bullet$, $jmk2\pi / N \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 3.27. Calcule la T.F.D. de la señal periódica $f(kT) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_0(kT - lT_0)$ con $f_0(kT) = u(kT+T_a) - u(kT-T_a)$. **R.:** Con $N = T_0/T$, la T.F.T.D. de $f_0(kT)$ es $f_0(\Omega) = \frac{e^{j\Omega T_a} - e^{-j\Omega T_a}}{1 - e^{-j\Omega T}}$, por lo que la T.F.D. de $f(kT)$ es $Nf(m) = \frac{e^{jm2\pi/T_0 T_a} - e^{-jm2\pi/T_0 T_a}}{1 - e^{-jm2\pi/T_0 T}} = \frac{e^{jm2\pi/T_0 T_a} - e^{-jm2\pi/T_0 T_a}}{1 - e^{-jm2\pi/N}}$. La Fig. 3.14(a) muestra la gráfica de $f(kT)$, $Tf_0(\Omega)$ que es T veces el módulo de la T.F.T.D. de $f_0(kT)$ y $T_0f(m)$ que es T_0 veces el módulo de la T.F.D. de $f(kT)$. Se puede ver que $T_0f(m)$ es un muestreo perfecto de $Tf_0(\Omega)$. ♣

Ejemplo 3.28. Calcule la T.F.D. de la señal periódica $f(kT) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_0(kT - lT_0)$ con $f_0(kT) = (kT+T_a)u(kT+T_a) - 2kTu(kT) + (kT-T_a)u(kT-T_a)$. **R.:** La T.F.T.D. de $f_0(kT)$ que es $f_0(\Omega)$ (amplificada por T) y la T.F.D. de $f(kT)$ que es $f(m)$ (amplificada por T_0) se muestran en la Fig. 3.14(b) para $T_0 = 4$, también se muestran para $T_0 = 6$ en la Fig. 3.14(c). Como es de esperarse, a medida que T_0 aumenta, el muestreo en frecuencia es más continuo y por lo tanto $T_0f(m)$ se asemeja mejor a $Tf_0(\Omega)$. ♣

Ejemplo 3.29. Dada la señal periódica, Fig. 3.15(a), $f(kT) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_0(kT - lT_0)$ donde $f_0(kT) = 3\sin(2\pi kT/T_0) - 0.5\sin(3 \cdot 2\pi kT/T_0) - \sin(5 \cdot 2\pi kT/T_0)$ que contiene una fundamental, una tercera y una quinta componente, calcule su T.F.D.. Se obtiene su T.F.D. numéricamente y se muestra en la Fig. 3.15(a). Se puede apreciar que $f(m)$ con $m = 1$ es 1.5 que corresponde a la mitad del valor de amplitud del primer armónico de $f(kT)$. Similarmente, $f(m)$ con $m = 5$ es 0.5 que corresponde a la mitad del valor de amplitud del quinto armónico de $f(kT)$. Esto corrobora la relación entre $f(m)$ y los coeficientes de Fourier de la

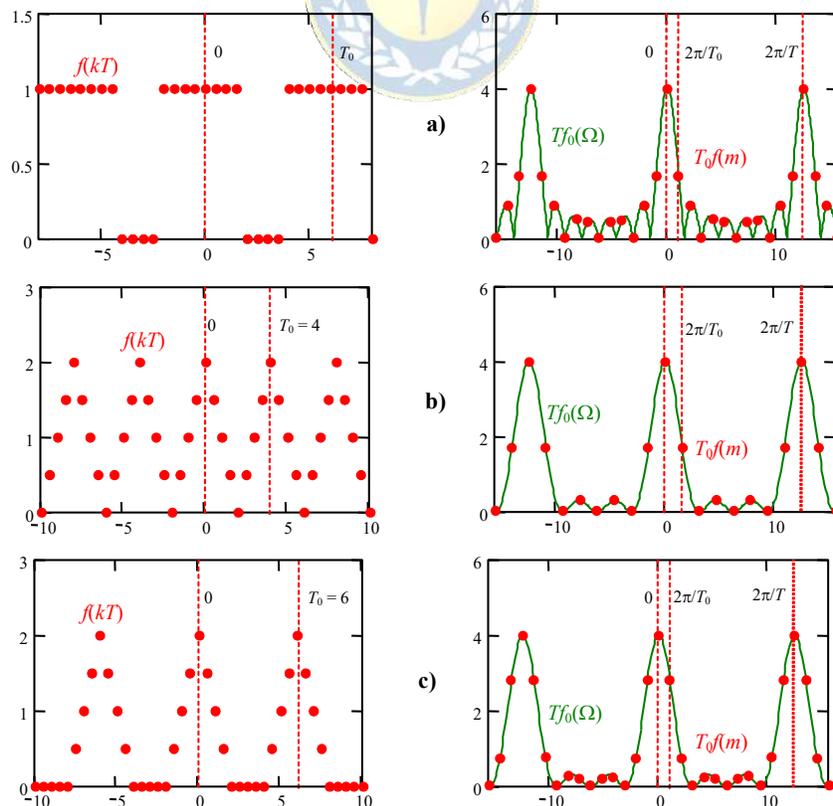


Fig. 3.14 Señales discretas y sus T.F.D. (las señales en verde son las T.F.T.D. de un periodo de la señal).

señal $f(kT)$. ♣

Ejemplo 3.30. Dada la señal periódica $f(kT)$ como mostrada en la Fig. 3.15(b). Al obtener su T.F.D. numéricamente y graficarla amplificada por un factor de dos y sólo para valores positivos de m , Fig. 3.15(b), se encuentra que $2f(m)$ con $m = 1$ es $3 \frac{4}{\pi} \cos \left\{ 2\pi \frac{T}{T_0} \right\}$ que corresponde al valor de amplitud del primer armónico de $f(kT)$. Nótese que esta señal tiene armónicos 5, 7, 11, 13, ..., usted encontrará más adelante que esta forma de onda es característica en sistemas eléctricos trifásicos de rectificación. ♣

Ejemplo 3.31. Determine los coeficientes de Fourier de la señal de salida del circuito elevador de la Fig. 3.16(a) que se

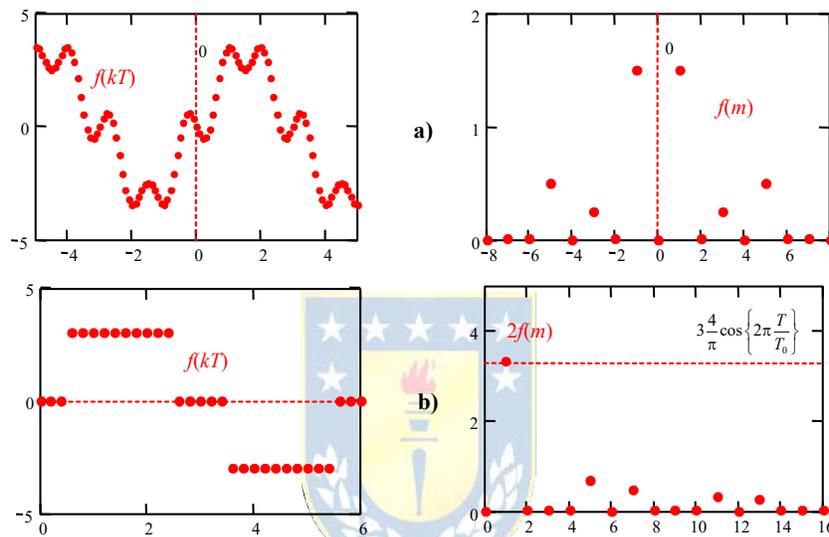


Fig. 3.15 Señales discretas y sus T.F.D..

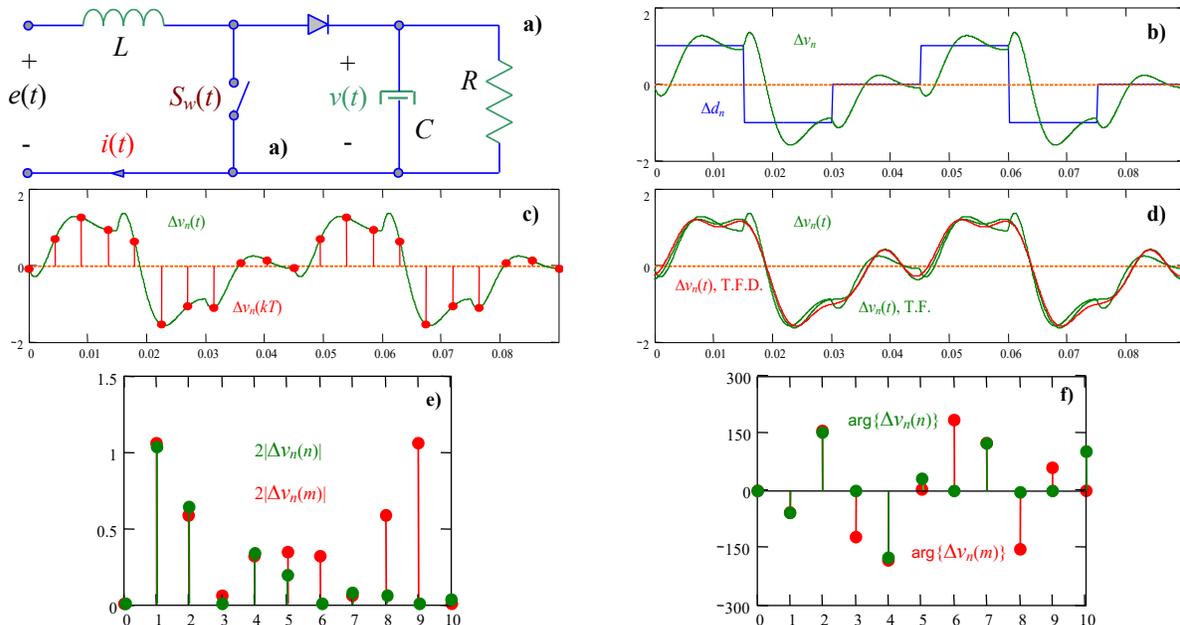


Fig. 3.16 Muestreo de sistemas continuos y los Coeficientes de Fourier; **a)** circuito, **b)** entrada y salida periódica en S.S., **c)** muestreo de la salida, **d)** salida exacta, aproximada por la T.F.F.D. y por la T.F.D., **e)** módulo de la T.F.F.D. y de T.F.D., **f)** fase de la T.F.F.D. y de T.F.D..

obtiene de muestrearla a una tasa T . **R.:** La señal de salida continua y la resultante de muestrearla 10 veces por periodo se muestra en la Fig. 3.16(c). Al tomar la T.F.D. se obtienen la magnitud y fase de los coeficientes de Fourier ilustrados en la Fig. 3.16(e) y (f), respectivamente. También se muestra los coeficientes obtenidos mediante la aplicación de la T.F.F.D. a la salida continua. La Fig. 3.16(e) indica que los resultados de la T.F.D. son “apropiados” hasta una frecuencia normalizada igual a la mitad de la tasa de muestreo. Esto se justifica en la periodicidad de la T.F.D. Los resultados arrojados por la T.F.F.D. y la T.F.D. no son idénticos por cuanto las señales reconstituidas por los primeros cuatro armónicos y utilizando ambos métodos no son iguales como ilustrado en la Fig. 3.16(d). Es natural pensar que esta discrepancia disminuye a medida que la tasa de muestreo aumenta. ♣

3.8 Ejercicios Propuestos.

Resuelva los problemas siguientes. Anote todo su trabajo.

A. Nivel básico.

- 1.- Calcule la T.L. Bilateral $f(s)$ de las señales $f(t)$ de la Fig. 3.17.
- 2.- Calcule la T.F. $f(\omega)$ de las señales $f(t)$ de la Fig. 3.17.
- 3.- Grafique la T.F. $f(\omega)$ de (2) para $T_0 = 12$, $\Delta = T_0/4$ y $A = 2$.
- 4.- Si las señales $f(t)$ de la Fig. 3.17 se hacen periódicas de periodo T_0 calcule la T.F. $f(n)$ de las señales resultantes.
- 5.- Grafique la T.F. $f(n)$ de (4) para $T_0 = 12$, $\Delta = T_0/4$ y $A = 2$.
- 6.- Si las señales $f(t)$ de la Fig. 3.17 se muestrean cada T unidades de tiempo calcule la T.F. $f(\Omega)$ de las señales resultantes $f(kT)$.
- 7.- Grafique la T.F. $f(\Omega)$ de (6) para $T_0 = 12$, $\Delta = T_0/4$, $A = 2$ y $T = 0.5$.
- 8.- Si las señales $f(kT)$ de (6) se hacen periódicas de periodo T_0 calcule la T.F. $f(m)$ de las señales resultantes.
- 9.- Grafique la T.F. $f(m)$ de (8) para $T_0 = 12$, $\Delta = T_0/4$, $A = 2$ y $T = 0.5$.

B. Nivel intermedio.

- 1.- Reemplace en las señales $f(\omega)$ obtenidas anteriormente ω por t . Esto generará nuevas señales en el tiempo que se denotarán por $g(t)$. Calcule la T.F. $g(\omega)$ de las señales $g(t)$.
- 2.- Si las señales $f(t)$ de la Fig. 3.17 se multiplican por la señal $g(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Calcule la T.F. de la señal resultante $f(t)g(t)$.

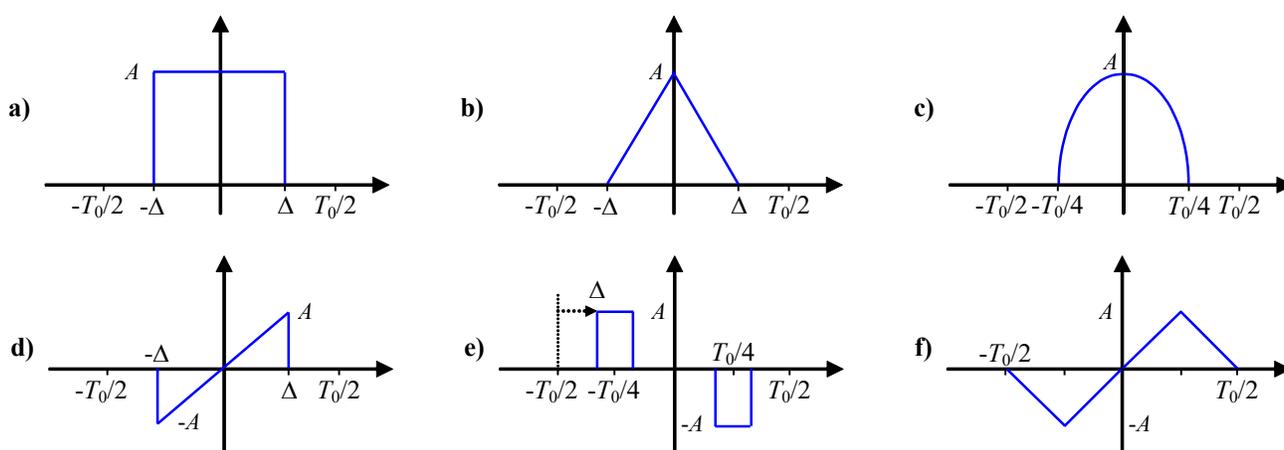


Fig. 3.17 Señales para ejercitar.

- 3.- Grafique la T.F. de $f(t)g(t)$ obtenidas anteriormente para $T_0 = 12$, $\Delta = T_0/4$, $A = 2$ y para $f_0 = 10/T_0$, $5/T_0$ y $2/T_0$.
- 4.- Determine a partir de los resultados anteriores los coeficientes de la Serie de Fourier de las señales $f(t)$ de la Fig. 3.17 al hacerlas periódicas de periodo T_0 , considere $T_0 = 12$, $\Delta = 3$ y $A = 2$. Compare estos resultados con los obtenibles en algún software matemático dedicado.
- 5.- Obtenga la respuesta a impulso de los sistemas ilustrados en la Fig. 3.18 y obtenga la T.F. de estas respuestas.
- 6.- Aplique las señales (d), (e) y (f) de la Fig. 3.17 como entradas a los sistemas linealizados obtenidos de la Fig. 3.18 y obtenga la T.F. de la salida. Verifique que ésta es el producto de la T.F. de la respuesta a impulso y la T.F. de la señal. Utilice para: los estanques $T_0 = 10$ s, la suspensión activa $T_0 = 4$ s, la central solar $T_0 = 5$ s, el estanque diluidor $T_0 = 8$ s, el circuito reductor $T_0 = 20$ ms, y el motor de cc $T_0 = 6$ s.

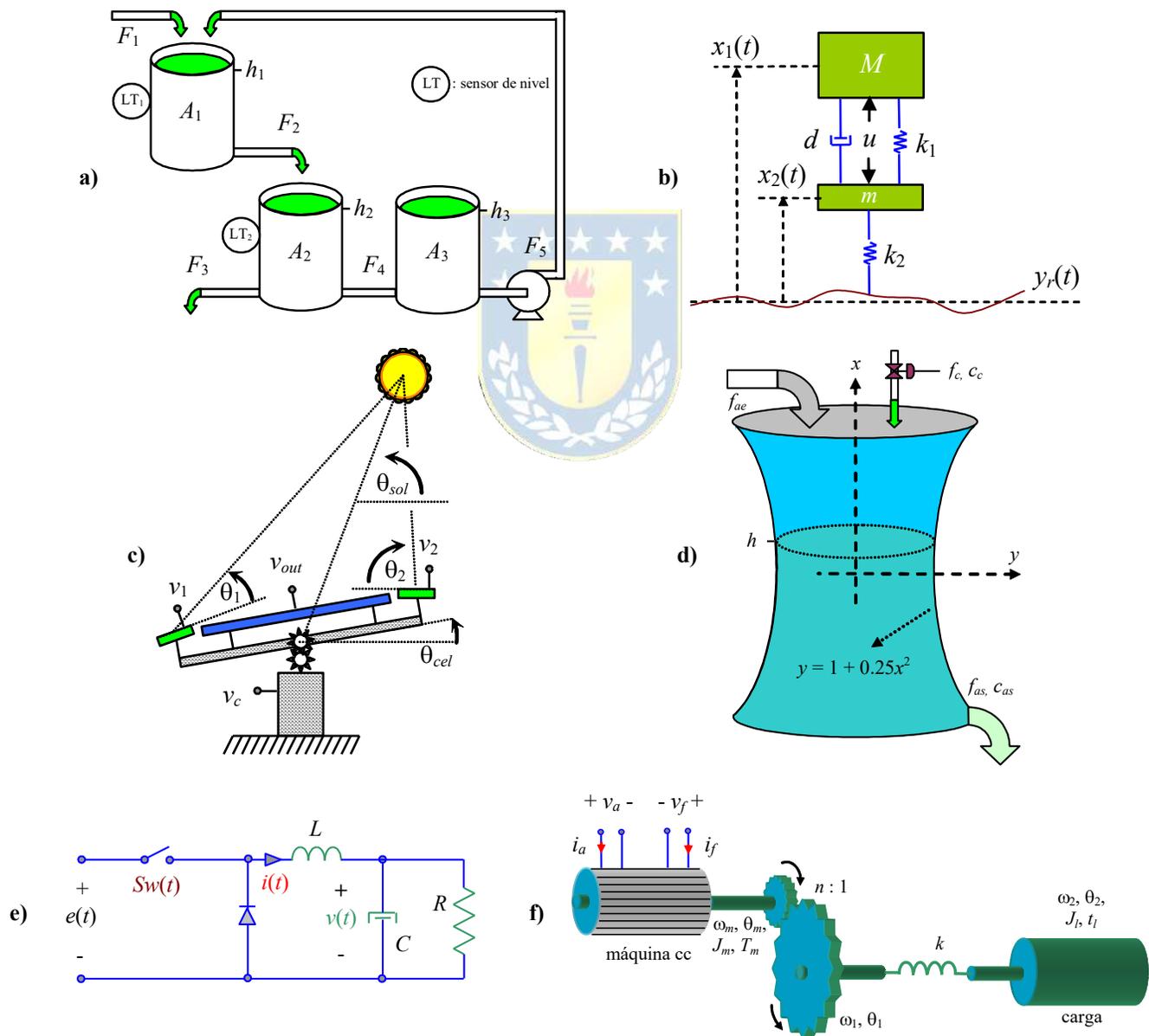


Fig. 3.18 Sistemas para ejercitar; **a)** estanques, **b)** amortiguación de un automóvil, **c)** generación solar, **d)** estanque diluidor, **e)** circuito reductor de tensión, **f)** motor de cc con eje flexible.

C . Nivel avanzado.

- 1.- Determine las condiciones que debe tener $f(t)$ para que $f(\omega)$ sea (i) par, (ii) impar, (iii) real, (iv) imaginaria.
- 2.- Determine las condiciones que debe tener $f(kT)$ para que $f(\Omega)$ sea (i) par, (ii) impar, (iii) real, (iv) imaginaria.
- 3.- Determine las condiciones que debe tener $f(t)$ que es periódica de periodo T_0 para que $f(n)$ sea (i) par, (ii) impar, (iii) nula $\forall n$ par, (iv) real, (v) imaginaria.
- 4.- Determine las condiciones que debe tener $f(kT)$ que es periódica de periodo T_0 para que $f(m)$ sea (i) par, (ii) impar, (iii) nula $\forall n$ par, (iv) real, (v) imaginaria.
- 5.- Demuestre que otra propiedad de la T.Z. es la denominada **Diferenciación en el dominio z**. Esta indica que dado $f(kT)$ con T.Z. $f(z)$, entonces la T.Z. de $kf(kT)$ es $-z \frac{df(z)}{dz}$.
- 6.- Verifique que las propiedades de la T.Z. se cumplen en la T.F. Tiempo Discreta.
- 7.- Se define el centro de gravedad c_g de una señal $f(kT)$ como $c_g = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} kf(kT)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(kT)}$. Expresar c_g en función de $f(\Omega)$.
- 8.- Sea la señal no-periódica $f_0(kT)$ con T.F. $f_0(\Omega)$. Determine la relación entre los Coeficientes de Fourier c_k de la señal periódica $f(kT) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_0(kT - lNT)$ y la T.F. $f_0(\Omega)$.
- 9.- Determine la T.F. de la salida de un *muestreador con retención*, en donde la salida está dada por $y(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(iT)\delta_T(t - iT)T$. Dejar la expresión en función de la T.F. de la entrada $u(t)$.



4 Caracterización Matemática

Muchos sistemas dinámicos pueden ser entendidos y analizados intuitivamente y sin tener que recurrir a las matemáticas y sin el desarrollo de una teoría general de dinámicas. Es más, en distintas situaciones de nuestra vida cotidiana tratamos sin mayores problemas con muchas dinámicas simples. Sin embargo, para enfrentar eficientemente situaciones más complejas, es necesario proceder sistemáticamente. Es en este punto donde las matemáticas pueden ayudarnos a economizar lenguaje y proveernos de un marco conceptual.

4.1 Introducción

El uso de ecuaciones diferenciales o de diferencias para representar comportamientos dinámicos corresponde si el comportamiento es visto bajo un dominio de tiempo continuo o tiempo discreto, respectivamente. Tiempo continuo corresponde a nuestra concepción natural del tiempo, es decir, como una variable continua en el dominio de los números reales. Un valor arbitrario de este tiempo continuo usualmente se denota por la letra t . Comportamientos dinámicos vistos bajo el dominio del tiempo continuo normalmente se describen mediante ecuaciones diferenciales, las cuales relacionan las derivadas de una variable dinámica con su valor actual. Este es el caso del circuito eléctrico de la Fig. 4.1, cuya ecuación diferencial que lo representa es,

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_c(t)$$

Def.: Una **ecuación diferencial** es cualquier igualdad algebraica o trascendental que involucra diferenciales o derivadas .

Def.: Una **ecuación diferencial ordinaria** es una igualdad que involucra una o más variables dependientes, una variable independiente y una o más derivadas de la(s) variable(s) dependiente(s) con respecto a la variable independiente .

Def.: Una **ecuación diferencial parcial** es una igualdad que involucra una o más variables dependientes y dos o más variables independientes, junto con las derivadas parciales de la(s) variable(s) con respecto a las variables independientes.

Este último es el caso de la ecuación que representa la difusión de calor en una barra como función del tiempo y la posición, esto es,

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = k \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}.$$

Tiempo discreto consiste en una secuencia ordenada de puntos, es decir, en vez de hablar de un intervalo continuo de tiempo, se habla de una secuencia de instantes de tiempo. En términos de aplicación, es conveniente introducir este concepto de tiempo cuando los eventos y sus consecuencias ocurren o son contabilizados sólo en períodos de tiempo discreto. Por ejemplo, en un modelo económico en el cual se considera un interés mensual, nos interesa evaluar nuestro modelo en meses y no considerar una evolución continua del tiempo. A menudo, los instantes de tiempo discreto son representados por un índice el cual comienza en un punto de referencia conveniente. Luego, el tiempo discreto corresponde a los enteros 0, 1, 2, ... y un instante de tiempo arbitrario se denota por la letra k . Comportamientos dinámicos vistos en el tiempo discreto, normalmente se describen por ecuaciones de diferencias, las cuales relacionan el valor de una variable en un instante de tiempo con los valores en instantes de tiempo adyacentes. Este es el caso de la ecuación que describe la cantidad de dinero, p , que se tiene en un banco al cabo de k meses a un interés mensual I , esta es,

$$p(kT + T) = (1 + I)p(kT) \quad \text{ó} \quad p(kT + T) - (1 + I)p(kT) = 0,$$

donde T es el intervalo considerado; en general, es el muestreo asociado a la ecuación de diferencias.

Def.: Una **ecuación de diferencias** es cualquier igualdad algebraica o trascendental que involucra más de un valor de las variables dependientes correspondientes, por lo menos, a más de un valor de las variables independientes. Las variables dependientes no involucran diferenciales ni derivadas.

Def.: Una **ecuación variable/invariable** en el tiempo es aquella en la cual uno o más términos/ninguno dependen explícitamente de la variable independiente tiempo.

Def.: Una **ecuación lineal** es aquella que consiste en una suma de términos lineales (aquellos de primer grado en la(s) variable(s) dependiente(s) y en sus derivadas). Todas las demás son ecuaciones no lineales.

Ejemplo 4.1. Clasificar las siguientes ecuaciones,

$A \frac{dh}{dt} - k\sqrt{h} = f_e$: ecuación diferencial, ordinaria, invariante, no-lineal.

$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = k \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$: ecuación diferencial, parcial, invariante, lineal.

$p(kT + T) = (1 + I)p(kT)$: ecuación de diferencias, invariante, lineal. ♣

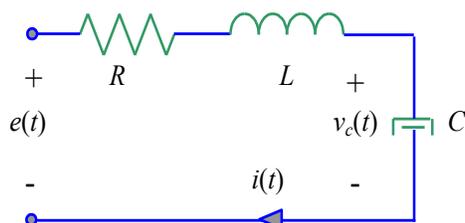


Fig. 4.1 Circuito RLC serie.

4.2 Solución de Ecuaciones Diferenciales

A continuación se repasan las formas clásicas de resolución de ecuaciones y se introducen los conceptos de respuesta estacionaria y transitoria.

A. Representación generalizada

La forma generalizada de una ecuación diferencial ordinaria lineal es,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u,$$

o en su forma resumida como $\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u}{dt^i}$. La solución de esta ecuación nos proporciona información acerca del comportamiento dinámico y estático de la variable y para la entrada u . En particular información de la rapidez, valores en S.S., estabilidad, etc.

B. Condiciones

Para que exista solución y ésta sea única debe cumplirse que:

- El intervalo de solución es $0 < t < \infty$.
- Se supone que $u(t)$ y sus derivadas en el intervalo de solución son conocidas.
- Se deben conocer las c.i. $y(0), dy/dt(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$,

C. Respuesta homogénea y forzada

Respuesta homogénea. La respuesta homogénea del sistema es cuando la entrada se hace idénticamente nula. La ecuación a resolver es,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0,$$

utilizando la T.L. se tiene que $\sum_{i=0}^n \left\{ a_i \left[s^i y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) \right] \right\} = 0$ (con, $\sum_{k=0}^{-1} = 0$), lo que resulta en,

$$y(s) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i},$$

Respuesta forzada. La respuesta forzada del sistema es cuando las c.i. de $y(t)$ son nulas. La ecuación a resolver es,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u,$$

utilizando la T.L. se tiene que $\sum_{i=0}^n a_i s^i y(s) = \sum_{i=0}^m \left\{ b_i \left[s^i u(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} u^{(k)}(0^+) \right] \right\}$ (con, $\sum_{k=0}^{-1} = 0$), lo que resulta en,

$$y(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} u(s) - \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i s^{i-1-k} u^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}.$$

Luego, la respuesta total del sistema es la suma de la respuesta homogénea con la respuesta forzada. Aplicando la T.L. inversa, la respuesta total en el dominio de tiempo continuo queda de la siguiente manera,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} u(s) - \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i s^{i-1-k} u^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right\}.$$

Def.: Se define el **polinomio característico** de una ecuación diferencial ordinaria lineal como:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$

Nótese que el polinomio característico es denominador común en todas las expresiones de la respuesta total de una ecuación diferencial ordinaria lineal.

Ejemplo 4.2. Para el sistema dado por, $dy/dt + a_0 y = b_0 u$, con $y(0) = y_0$ y con $u(t) = u(t)$ determine la expresión para la respuesta en el tiempo. **R.:** Al tomar la T.L. se tiene que,

$$s y(s) - y(0) + a_0 y(s) = b_0 u(s) \quad s y(s) - y_0 + a_0 y(s) = \frac{b_0}{s},$$

por lo que la salida en el plano s es,

$$y(s) = \frac{b_0}{(s+a_0)s} + \frac{y_0}{s+a_0} \quad y(s) = \frac{b_0}{a_0} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a_0} \right\} + \frac{y_0}{s+a_0},$$

por lo que la salida en el plano del tiempo es,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{b_0}{a_0} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a_0} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{y_0}{s+a_0} \right\} \\ y(t) &= \frac{b_0}{a_0} (u(t) - e^{-a_0 t} u(t)) + y_0 e^{-a_0 t} u(t) \quad . \\ y(t) &= \left\{ \frac{b_0}{a_0} (1 - e^{-a_0 t}) + y_0 e^{-a_0 t} \right\} u(t) \end{aligned}$$

En este caso el polinomio característico es $s + a_0$, que es de orden 1 y cuya única raíz es $-a_0$, la cual corresponde al argumento de la exponencial que es parte de la respuesta forzada y homogénea. Nótese que si la raíz es negativa; es decir, a_0 es positivo, entonces la respuesta converge. Las formas de onda se encuentran en la Fig. 4.2(b), en donde $a_0 = R/L$ y $b_0 = E/L$, por lo que

$i(t) = \left\{ \frac{E}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) + i_0 e^{-(R/L)t} \right\} u(t)$. En este caso, como $a_0 = R/L$ es siempre positivo, la respuesta siempre converge. ♣

D. Respuesta estacionaria y transitoria

Al igual que la respuesta homogénea y forzada, se puede definir la respuesta estacionaria y transiente, resultando la respuesta total como la suma de ellas.

Def.: Respuesta estacionaria es la parte de la respuesta total que no se aproxima a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Se abrevia y_{ss} .

Def.: Respuesta transitoria es la parte de la respuesta total que se aproxima a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Se abrevia y_{tr} .

Ejemplo 4.3. Para el sistema dado por, $dy/dt + a_0y = b_0u$, con $y(0) = y_0$ y con $u(t) = u(t)$ se encontró que la respuesta es $y(t) = \left\{ \frac{b_0}{a_0}(1 - e^{-a_0t}) + y_0e^{-a_0t} \right\} u(t)$, o equivalentemente $i(t) = \left\{ \frac{E}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) + i_0e^{-(R/L)t} \right\} u(t)$ de acuerdo al circuito de la Fig. 4.2(a), determine la parte estacionaria y la transiente. **R.:** En este caso la parte de la respuesta que no se hace cero es $i_{ss}(t) = \frac{E}{R}u(t)$ y la que se hace cero es $i(t) - i_{ss}(t) = i_{tr}(t) = \left\{ -\frac{E}{R}e^{-(R/L)t} + i_0e^{-(R/L)t} \right\} u(t)$, Fig. 4.2(c). Nótese que la respuesta estacionaria puede obtenerse haciendo la derivada igual a cero o equivalentemente, cortocircuitando el inductor, esto por cuanto las entradas son continuas. ♣

Ejemplo 4.4. Para el sistema dado por, $dy/dt + a_0y = b_0u$, con $y(0) = y_0$ y con $u(t) = A\sin(\omega_0t)$ determine la expresión para la respuesta en el tiempo, su parte transiente y estacionaria. **R.:** Éste podría ser el caso del circuito de la Fig. 4.2(a). Al tomar la T.L. se tiene que,

$$sy(s) - y(0) + a_0y(s) = b_0u(s) \quad \text{o bien} \quad sy(s) - y_0 + a_0y(s) = b_0A \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2},$$

por lo que la salida en el plano s es,

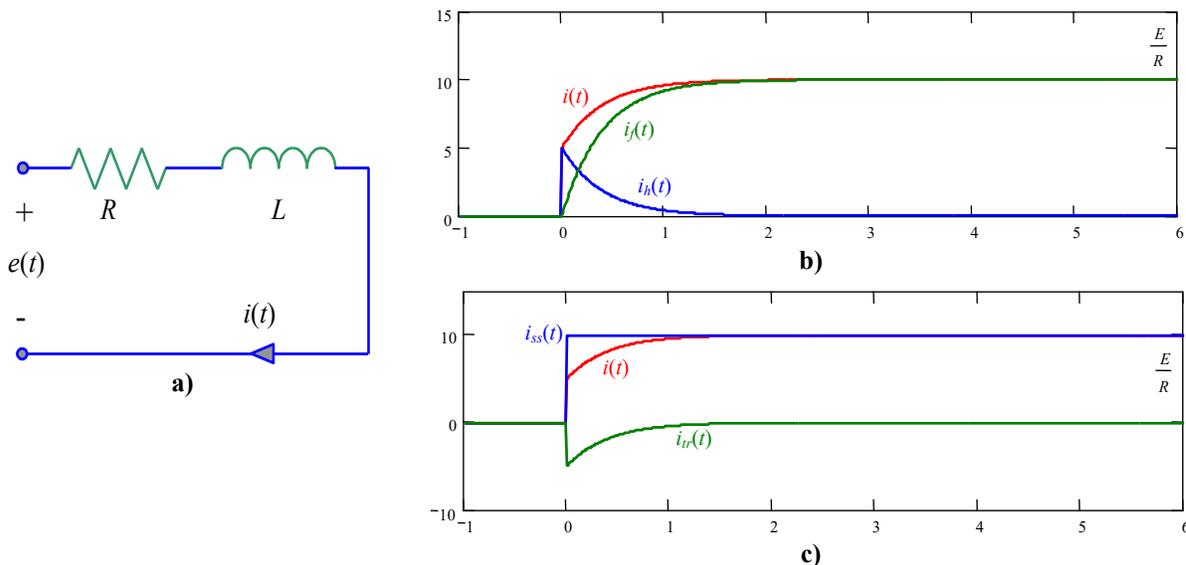


Fig. 4.2 Circuito RL serie; **a)** circuito, **b)** formas de onda de corriente, **c)** formas de onda de corriente.

$$y(s) = \frac{b_0}{s+a_0} A \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{y_0}{s+a_0} \quad \text{o bien} \quad y(s) = \frac{Ab_0\omega_0}{\omega_0^2 + a_0^2} \left\{ \frac{1}{s+a_0} - \frac{s-a_0}{s^2 + \omega_0^2} \right\} + \frac{y_0}{s+a_0},$$

por lo que la salida en el plano del tiempo es,

$$y(t) = \frac{Ab_0\omega_0}{\omega_0^2 + a_0^2} \left\{ e^{-a_0 t} + \frac{a_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) + y_0 e^{-a_0 t} \right\} u(t),$$

$$y(t) = \left[\frac{Ab_0\omega_0}{\omega_0^2 + a_0^2} \left\{ e^{-a_0 t} + \frac{\sqrt{\omega_0^2 + a_0^2}}{\omega_0} \sin \left\{ \omega_0 t - \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0}{a_0} \right) \right\} \right\} + y_0 e^{-a_0 t} \right] u(t).$$

En este caso la parte transiente es $\frac{Ab_0\omega_0}{\omega_0^2 + a_0^2} e^{-a_0 t} + y_0 e^{-a_0 t}$ y la parte estacionaria es $\frac{Ab_0}{\sqrt{\omega_0^2 + a_0^2}} \sin \left\{ \omega_0 t - \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0}{a_0} \right) \right\}$.

Contradictoriamente con la idea intuitiva de respuesta estacionaria (constante), en este caso está variando en el tiempo. ♣

Ejemplo 4.5. El estanque de la Fig. 4.3 tiene por modelo a $\frac{dh}{dt} = \frac{f_m + f_a - k_v \sqrt{gh}}{h^2/a^2}$ y $\frac{dc_s}{dt} = \frac{f_m c_m - f_m c_s - f_a c_s}{h^3/(3a^2)}$. Al linealizar

el modelo en torno al punto de operación $h_o, c_{so}, f_{ao}, f_{mo}, c_{mo}$, que están relacionados por, $f_{mo} + f_{ao} - k_v \sqrt{gh_o} = 0$ y por

$f_{mo} c_{mo} - f_{mo} c_{so} - f_{ao} c_{so} = 0$, se obtiene, $\frac{d\Delta h}{dt} = \left\{ \frac{-k_v g}{2\sqrt{gh_o} h_o^2/a^2} - \frac{2(f_{mo} + f_{ao} - k_v \sqrt{gh_o})}{h_o^3/a^2} \right\} \Delta h + \frac{1}{h_o^2/a^2} \Delta f_a + \frac{1}{h_o^2/a^2} \Delta f_m$ y

$\frac{d\Delta c_s}{dt} = \frac{-3h_o^2 (f_{mo} c_{mo} - f_{mo} c_{so} - f_{ao} c_{so})}{h_o^6/(3a^2)} \Delta h + \frac{-(f_{mo} + f_{ao})}{h_o^3/(3a^2)} \Delta c_s + \frac{-c_{so}}{h_o^3/(3a^2)} \Delta f_a + \frac{c_{mo} + c_{so}}{h_o^3/(3a^2)} \Delta f_m + \frac{-f_{mo}}{h_o^3/(3a^2)} \Delta c_m$, el que se reduce

a, $\frac{d\Delta h}{dt} = \frac{-a^2 k_v g}{2\sqrt{gh_o} h_o^2} \Delta h + \frac{a^2}{h_o^2} \Delta f_a + \frac{a^2}{h_o^2} \Delta f_m$ y $\frac{d\Delta c_s}{dt} = \frac{-(f_{mo} + f_{ao})}{h_o^3/(3a^2)} \Delta c_s + \frac{-c_{so}}{h_o^3/(3a^2)} \Delta f_a + \frac{c_{mo} + c_{so}}{h_o^3/(3a^2)} \Delta f_m + \frac{-f_{mo}}{h_o^3/(3a^2)} \Delta c_m$, y se

puede simplificar a $\frac{d\Delta h}{dt} = a_{11} \Delta h + b_1 \Delta f_a + e_{11} \Delta f_m$ y $\frac{d\Delta c_s}{dt} = a_{22} \Delta c_s + b_2 \Delta f_a + e_{21} \Delta f_m + e_{22} \Delta c_m$. Considerando que f_a, f_m y c_m son

entradas, la T.L. indica que, $\Delta h = \frac{b_1}{(s-a_{11})} \Delta f_a + \frac{e_{11}}{(s-a_{11})} \Delta f_m$ y $\Delta c_s = \frac{b_2}{(s-a_{22})} \Delta f_a + \frac{e_{21}}{(s-a_{22})} \Delta f_m + \frac{e_{22}}{(s-a_{22})} \Delta c_m$. Por lo tanto,

para una entrada escalón en Δf_a la altura variará de acuerdo a $\Delta h(t) = \frac{b_1}{-a_{11}} (1 - e^{a_{11}t}) u(t)$ y la concentración de acuerdo a

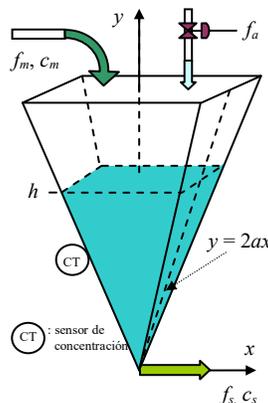


Fig. 4.3 Estanque diluidor.

$\Delta c_s(t) = \frac{b_2}{-a_{22}}(1 - e^{a_{22}t})u(t)$. Nótese que estas cantidades son variaciones y que la total es la suma con el valor en el punto de operación; por ejemplo la altura total es, $h(t) = h_o + \frac{b_1}{-a_{11}}(1 - e^{a_{11}t})u(t)$. ♣

4.3 Solución de Ecuaciones de Diferencias

Similarmente al caso continuo, a continuación se muestra cómo resolver ecuaciones de diferencias basada en la T.Z..

A. Representación generalizada

La forma generalizada de una ecuación de diferencias lineal es,

$$y(kT + nT) + a_{n-1}y(kT + nT - T) + \dots + a_1y(kT + T) + a_0y(kT) = b_nu(kT + mT) + b_{m-1}u(kT + mT - T) + \dots + b_1u(kT + T) + b_0u(kT)$$

o en su forma resumida como $\sum_{i=0}^n a_i y(kT + iT) = \sum_{i=0}^m b_i u(kT + iT)$. Al igual que en el caso continuo, la solución de esta ecuación nos proporciona información acerca del comportamiento dinámico y estático de la variable y para la entrada u . En particular información de la rapidez, valores en S.S., estabilidad, etc.



B. Condiciones

Para que exista solución y ésta sea única debe cumplirse que:

- El intervalo de solución es $0 < k < \infty$.
- Se supone que $u(kT)$ es una secuencia conocida.
- Se deben conocer las c.i. $y(0), y(T), y(2T), \dots, y(nT-T)$,

C. Respuesta homogénea y forzada

Respuesta homogénea. La respuesta homogénea del sistema es cuando la entrada se hace idénticamente nula. La ecuación a resolver es,

$$y(kT + nT) + a_{n-1}y(kT + nT - T) + \dots + a_1y(kT + T) + a_0y(kT) = 0,$$

utilizando la T.Z. se tiene que $\sum_{i=0}^n \left\{ a_i \left[z^i y(z) - \sum_{k=0}^{i-1} z^{i-k} y(kT) \right] \right\} = 0$ (con, $\sum_{k=0}^{-1} = 0$), lo que resulta en,

$$y(z) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i z^{i-k} y(kT)}{\sum_{i=0}^n a_i z^i}.$$

Respuesta forzada. La respuesta forzada del sistema es cuando las c.i. de $y(kT)$ son nulas. La ecuación a resolver es,

$$y(kT + nT) + a_{n-1}y(kT + nT - T) + \dots + a_1y(kT + T) + a_0y(kT) = \\ b_m u(kT + mT) + b_{m-1}u(kT + mT - T) + \dots + b_1u(kT + T) + b_0u(kT)$$

utilizando la T.Z. se tiene que $\sum_{i=0}^n a_i z^i y(z) = \sum_{i=0}^m \left\{ b_i \left[z^i u(z) - \sum_{k=0}^{i-1} z^{i-k} u(kT) \right] \right\}$ (con, $\sum_{k=0}^{-1} = 0$), lo que resulta en,

$$y(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} u(z) - \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i z^{i-k} u(kT)}{\sum_{i=0}^n a_i z^i}.$$

Luego, la respuesta total del sistema es la suma de la respuesta homogénea con la respuesta forzada. Aplicando la T.Z. inversa, la respuesta total en el dominio de tiempo discreto queda de la siguiente manera,

$$y(kT) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} u(z) - \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i z^{i-k} u(kT)}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i z^{i-k} y(kT)}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} \right\}.$$

Def.: Se define el **polinomio característico** de una ecuación de diferencias como:

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0.$$

Nótese que el polinomio característico es denominador común en todas las expresiones de la respuesta total de una ecuación de diferencias lineal.

Ejemplo 4.6. Para el sistema dado por, $y(kT + T) + a_0 y(kT) = b_0 u(kT)$, con $y(0) = y_0$ y con $u(kT) = u(kT)$ determine la expresión para la respuesta en tiempo discreto. **R.:** Al tomar la T.Z. se tiene que,

$$zy(z) - zy(0) + a_0 y(z) = b_0 u(z) \qquad zy(z) - zy_0 + a_0 y(z) = b_0 \frac{z}{z-1},$$

por lo que la salida en el plano z es,

$$y(z) = \frac{b_0}{z+a_0} \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+a_0} y_0 \qquad y(z) = \frac{b_0}{1+a_0} \left\{ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+a_0} \right\} + \frac{z}{z+a_0} y_0,$$

por lo que la salida en el plano del tiempo discreto es,

$$y(kT) = \frac{b_0}{1+a_0} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+a_0} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z+a_0} y_0 \right\} \\ y(kT) = \frac{b_0}{1+a_0} (u(kT) - (-a_0)^k u(kT)) + y_0 (-a_0)^k u(kT). \\ y(kT) = \left\{ \frac{b_0}{1+a_0} (1 - (-a_0)^k) + y_0 (-a_0)^k \right\} u(kT)$$

En este caso el polinomio característico es $z + \underline{a}_0$, que es de orden 1 y cuya única raíz es $-\underline{a}_0$, la cual corresponde al argumento de la potencia que es parte de la respuesta forzada y homogénea. Nótese que si el módulo de la raíz es menor que uno; es decir, $|\underline{a}_0| = |\underline{a}_0| < 1$, entonces la respuesta converge. Es importante destacar que si se cumple que $-\underline{a}_0 = e^{-a_0 T}$ y $\underline{b}_0 = (1 + \underline{a}_0) \frac{b_0}{a_0} = (1 - e^{-a_0 T}) \frac{b_0}{a_0}$, entonces la respuesta discreta $y(kT)$ es igual a la respuesta continua $y(t)$ del Ejemplo 4.2 muestreada a intervalos regulares T . Dado que $-\underline{a}_0 = e^{-(R/L)T}$, para que $|\underline{a}_0| < 1$, debe cumplirse que $T > 0$, con lo que la respuesta siempre converge. Las formas de onda se encuentran en la Fig. 4.4. ♣

D. Respuesta estacionaria y transitoria

Al igual que el caso continuo se tiene en cada respuesta una parte estacionaria y una transiente, resultando la respuesta total la suma de ellas.

Def.: Respuesta estacionaria es la parte de la respuesta total que no se aproxima a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Se abrevia y_{ss} .

Def.: Respuesta transitoria es la parte de la respuesta total que se aproxima a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Se abrevia y_{tr} .

Ejemplo 4.7. Para el sistema dado por, $y(kT + T) + \underline{a}_0 y(kT) = \underline{b}_0 u(kT)$, con $y(0) = y_0$ y con $u(kT) = u(kT)$ se encontró que la respuesta es $y(kT) = \left\{ \frac{\underline{b}_0}{1 + \underline{a}_0} (1 - (-\underline{a}_0)^k) u(kT) + y_0 (-\underline{a}_0)^k \right\} u(kT)$, determine la parte estacionaria y la transiente. **R.:** En este caso la parte de la respuesta que no se hace cero es $y_{ss}(kT) = \frac{\underline{b}_0}{1 + \underline{a}_0} u(kT)$ y la que se hace cero es $y(kT) - y_{ss}(kT) = \left\{ -\frac{\underline{b}_0}{1 + \underline{a}_0} (-\underline{a}_0)^k + y_0 (-\underline{a}_0)^k \right\} u(kT)$. Nótese que la respuesta estacionaria puede obtenerse haciendo $y(kT + T) = y(kT)$, lo que es válido para entrada escalón. ♣

Ejemplo 4.8. Para el problema de la población de conejos, Fig. 4.5, se encuentra que la ecuación que rige el crecimiento está dada por, $y(kT + 2T) - y(kT + T) - y(kT) = u(kT)$, con $y(0) = 1, y(T) = 1$ y con $u(kT) = 0$ determine la expresión para la respuesta en tiempo discreto. **R.:** Al tomar la T.Z. se tiene que,

$$z^2 \{y(z) - z^{-1}y(T) - z^{-0}y(0)\} - z \{y(z) - z^{-0}y(0)\} - y(z) = 0 \qquad \{z^2y(z) - z - z^2\} - \{zy(z) - z\} - y(z) = 0,$$

por lo que la salida en el plano z es,

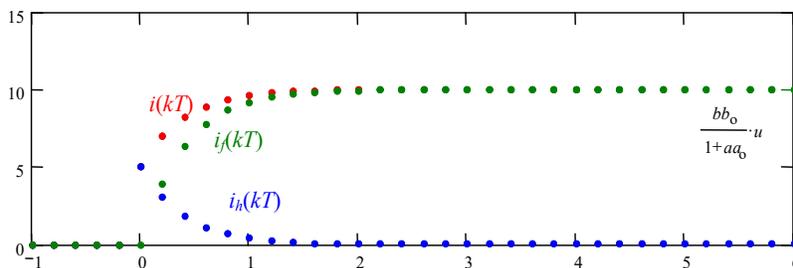


Fig. 4.4 Respuesta discreta.

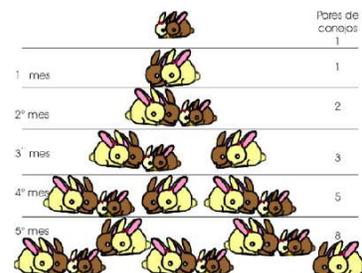


Fig. 4.5 Población de conejos.

$$y(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = y(z) = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{z}{z - \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{z}{z - \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}} \right\},$$

por lo que la salida en el plano del tiempo discreto es,

$$y(kT) = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}^k - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}^k \right\} u(kT) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}^{k+1} - \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}^{k+1} \right\} u(kT).$$

Esta respuesta existe gracias a las c.i. por lo que corresponde a la respuesta homogénea del sistema. No es evidente que al evaluar la expresión resulte en números enteros; sin embargo y por ejemplo, $y(15) = 987$. Por otro lado, el polinomio característico es $z^2 - z - 1$, que es de orden 2 y con raíces en $\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| > 1$ y $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$. Por lo que la solución diverge a medida que k aumenta (razonable si se piensa que la población de conejos aumenta indefinidamente). Se destaca que $y(kT+T)/y(kT) \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a medida que $k \rightarrow \infty$ y que la respuesta estacionaria es $y_{ss}(kT) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}^{k+1} u(kT)$ y la respuesta transitoria

está dada por $y_{tr}(kT) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}^{k+1} u(kT)$. ♣

4.4 Solución de Ecuaciones de Estados

Este caso es interesante puesto que la tendencia es obtener modelos de sistemas físicos en variables de estados. Se utilizan métodos en el plano del tiempo t y complejo s .

A. Representación generalizada

El circuito de la Fig. 4.1 tiene asociado una ecuación diferencial dada por,

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_c(t),$$

si se define, $x_1 = v_c$, $x_2 = i$, y la salida $y = i$, entonces el modelo en variables de estado es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

En forma general, la ecuación de estado de un sistema lineal se puede escribir como (sin considerar las perturbaciones \mathbf{p}),

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),$$

y solucionarla significa encontrar $\mathbf{x}(t)$ y por lo tanto $\mathbf{y}(t)$.

B. Condiciones

A diferencia de la solución de ecuaciones diferenciales donde es necesario conocer las c.i. $y(0)$, $dy/dt(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, en esta representación se necesita conocer como c.i. al vector $\mathbf{x}(0)$.

C . Solución homogénea y solución forzada de las ecuaciones de estado

Solución homogénea. Una de las características de los sistemas lineales es que se pueden obtener soluciones analíticas de las ecuaciones que describen su comportamiento. Para obtener la respuesta homogénea se hace $\mathbf{u}(t) = 0$. Así el sistema a solucionar es,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

Se deriva la ecuación $\dot{\mathbf{x}}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ sucesivamente, por lo que se puede escribir,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(k)}(t) &= \mathbf{A}^k\mathbf{x}(t) \end{aligned},$$

de donde se puede observar que $\mathbf{x}^{(k)}(0) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$. Como \mathbf{A}^k existe para todo k finito, $\mathbf{x}(t)$ se puede expresar utilizando Taylor como,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(0) + \dot{\mathbf{x}}(t)|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \ddot{\mathbf{x}}(t)|_{t=0} t^2 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{x}^{(k)}(t)|_{t=0} t^k + \dots \\ &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}_0 t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 t^k + \dots \\ &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \dots \right) \mathbf{x}_0 \end{aligned},$$

el término en paréntesis siempre converge y por su similitud con la serie de Taylor de una exponencial se denota como $e^{\mathbf{A}t}$, es más, se le conoce como *matriz de transición de estados*.

Def.: La **matriz de transición de estados** $\Phi(t)$ se define por,

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k.$$

Si bien la expresión como serie infinita para la matriz de transición es generalizada, su utilización se da sólo por algoritmos numéricos. No es el caso cuando la matriz \mathbf{A} es diagonal; es decir, $\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, pues en este caso,

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} t^k,$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k t^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_2^k t^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Algunas propiedades de $\Phi(t) = e^{At}$ son,

$$\begin{aligned} e^{A0} &= I \\ e^{A(t_1+t_2)} &= e^{At_1} e^{At_2} \\ (e^{At})^{-1} &= e^{-At} \\ e^{A^T t} &= (e^{At})^T \\ \mathbf{A}e^{At} &= e^{At}\mathbf{A} \\ \frac{d}{dt}e^{At} &= \mathbf{A}e^{At} \end{aligned}$$

Finalmente, la respuesta homogénea es,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 = e^{At}\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}e^{At}\mathbf{x}_0.$$

Una forma alternativa de obtener la respuesta homogénea es aplicando la T.L. a $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, lo que resulta en,

$$\begin{aligned} s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(s) \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}_0.$$

Al comparar este resultado con el obtenido mediante series de Taylor se puede concluir que,

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} \text{ o } \Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Contrariamente a la serie infinita, este último resultado es de gran utilidad para el cálculo manual de $\Phi(t)$. La respuesta homogénea es,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}e^{At}\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}_0.$$

Ejemplo 4.9. Dado el sistema descrito por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$, donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = [1 \ 0]$ y

$\mathbf{D} = [0]$. Determine $\Phi(t)$ y $\mathbf{x}(t)$ con $u(t) = 0$, $\mathbf{x}_0 = [1 \ 1]^T$. **R.:** En este caso: $s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$, por lo que, $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$, finalmente, $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$. La respuesta homogénea es

$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} - e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$. La Fig. 4.6 muestra gráficamente cómo evoluciona el vector $\mathbf{x}(t)$ a partir de su condición inicial \mathbf{x}_0 . Nótese que la representación es en un plano dado que hay dos variables de estado; es decir, $n = 2$. ♣

Solución forzada. Para obtener la respuesta forzada se consideran las c.i. nulas, es decir, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Así, el sistema a solucionar es,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),$$

aplicando la T.L a ambos miembros se tiene,

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s), \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s), \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{B}\mathbf{u}(s), \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)$$

multiplicando la primera ecuación anterior por la izquierda por el factor $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ se obtiene,

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{u}(s),$$

por lo que los estados $\mathbf{x}(t)$ para c.i. nulas son,

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Por otro lado, la salida queda como,

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s).$$

por lo que la respuesta en el tiempo es,

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Dado que el sistema es lineal, la respuesta total de estos sistemas puede ser escrita como la suma de la respuesta homogénea y la forzada. Así los estados $\mathbf{x}(t)$ estarían dados por,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \text{ó} \quad \mathbf{x}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}_0 + \Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{u}(s),$$

y la salida por,

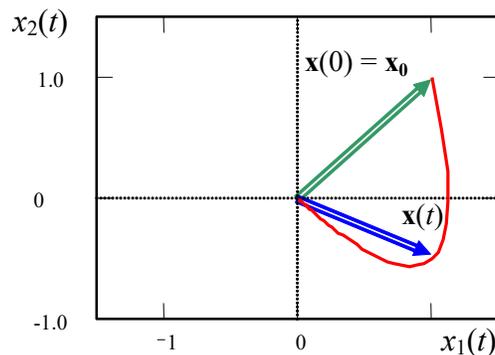


Fig. 4.6 Representación gráfica de la respuesta homogénea.

$$y(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}\Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t),$$

o bien

$$y(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}u(s) + \mathbf{D}u(s).$$

Ejemplo 4.10. Para el circuito de la Fig. 4.7(a), determine la respuesta para entrada escalón de amplitud E . **R.:** Para $x_1 = v_c$, $x_2 = i$, e $y = i$, se tiene un modelo en variables de estado: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t)$, $y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

Así $\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + sR/L + 1/(LC)} \begin{bmatrix} s + R/L & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix}$ por lo que las variables de estado quedan dadas por

$\mathbf{x}(s) = \frac{1}{s^2 + sR/L + 1/(LC)} \begin{bmatrix} s + R/L & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \frac{E}{s} \right\}$ y la salida del sistema queda dada por la expresión

$y(s) = i(s) = [0 \ 1] \frac{1}{s^2 + sR/L + 1/(LC)} \begin{bmatrix} s + R/L & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 + E/(sL) \end{bmatrix} = \frac{si_0 + E/L - v_0/L}{s^2 + sR/L + 1/(LC)}$, que corresponde a la corriente

del circuito de la Fig. 4.7(a). Si se desea conocer el voltaje del condensador, se hace $y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, con lo que se

obtiene la expresión, $v(s) = \frac{s^2 + s(R/L + i_0/(v_0C)) + E/(v_0LC)}{s^2 + sR/L + 1/(LC)} \frac{v_0}{s}$. Nótese que si $i_0 = 0$ y $v_0 = E$, la corriente de salida $i(s) =$

0 y $v(s) = E/s$; es decir, ambas cantidades no cambian, Fig. 4.7(d), y son iguales a sus c.i. aún cuando sus respuestas homogéneas y forzadas sí lo hacen, Fig. 4.7(b), (c). ♣

Ejemplo 4.11. El estanque de la Fig. 4.3 tiene por modelo linealizado a, $\frac{d\Delta h}{dt} = \frac{-a^2 k_v g}{2\sqrt{gh_o} h_o^2} \Delta h + \frac{a^2}{h_o^2} \Delta f_a + \frac{a^2}{h_o^2} \Delta f_m$ y

$\frac{d\Delta c_s}{dt} = \frac{-(f_{mo} + f_{ao})}{h_o^3/(3a^2)} \Delta c_s + \frac{-c_{so}}{h_o^3/(3a^2)} \Delta f_a + \frac{c_{mo} + c_{so}}{h_o^3/(3a^2)} \Delta f_m + \frac{-f_{mo}}{h_o^3/(3a^2)} \Delta c_m$, donde el punto de operación está dado por las

ecuaciones, $f_{mo} + f_{ao} - k_v \sqrt{gh_o} = 0$ y $f_{mo} c_{mo} - f_{mo} c_{so} - f_{ao} c_{so} = 0$, definiendo, $\Delta x_1 = \Delta h$, $\Delta x_2 = \Delta c_s$, $\Delta u = \Delta f_a$, $\Delta p_1 = \Delta f_m$ y Δp_2

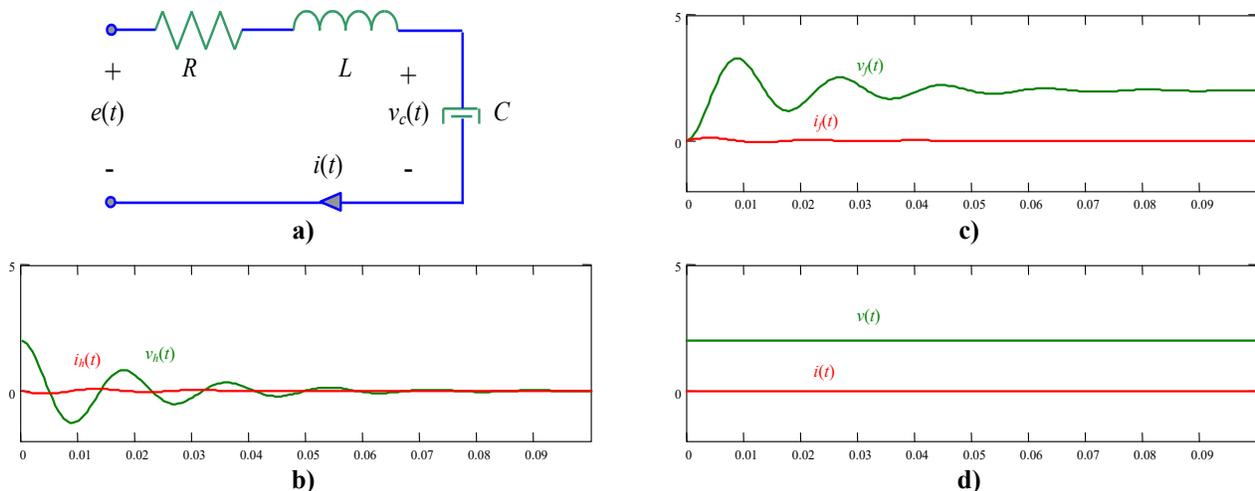


Fig. 4.7 Circuito RLV serie. Formas de onda; **a)** circuito, **b)** homogéneas, **c)** forzadas, **d)** totales.

$$= \Delta C_m, \text{ el modelo en variables de estado queda descrito por } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2 g k_v}{2x_{1o}^2 \sqrt{g x_{1o}}} & 0 \\ 0 & -\frac{3a^2(p_{1o} + u_o)}{x_{1o}^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{x_{1o}^2} \\ -\frac{3a^2 x_{2o}}{x_{1o}^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{x_{1o}^2} & 0 \\ \frac{3a^2(p_{2o} - x_{2o})}{x_{1o}^3} & \frac{3a^2 p_{1o}}{x_{1o}^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}. \text{ Determine } \Delta \mathbf{x}(t) \text{ con } \Delta u(t) = u(t), \Delta \mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T. \mathbf{R.}: \text{ En}$$

este caso la matriz de transición es simplemente $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} \end{bmatrix}$, por lo que $\Delta \mathbf{x}(t) = e^{A t} \Delta \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b} \Delta u(\tau) d\tau =$

$$\int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{b} \Delta u(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{a_{11}(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{a_{22}(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{a_{11}(t-\tau)} b_1 \\ e^{a_{22}(t-\tau)} b_2 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{-b_1}{a_{11}} (1 - e^{a_{11}t}) u(t) \\ \frac{-b_2}{a_{22}} (1 - e^{a_{22}t}) u(t) \end{bmatrix}. \clubsuit$$

4.5 Solución de Ecuaciones de Diferencias de Estado

En esta sección, el concepto de dinámicas discretas representadas por ecuaciones de diferencias se combina con el álgebra lineal para estudiar a los sistemas dinámicos en el espacio de estados discretos. Este enfoque se basa en el concepto de sistemas de ecuaciones de primer orden. Si bien el uso de esta notación no es evidente, en los capítulos siguientes se introducirá formalmente como consecuencia del tratamiento discreto de sistemas continuos.

A. Representación generalizada

En forma similar al caso continuo, se define la representación en ecuaciones de diferencias para el espacio de estados de un sistema SISO lineal e invariante en el tiempo como (sin considerar las posibles perturbaciones $\mathbf{p}(kT)$),

$$\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{A} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B} \mathbf{u}(kT), \quad \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{D} \mathbf{u}(kT),$$

donde $\mathbf{x}(kT)$ de orden n es el vector de estados, ya que es una descripción completa del sistema al instante de tiempo kT . El vector $\mathbf{u}(kT)$ es la entrada del sistema e $\mathbf{y}(kT)$ es la salida, la cual puede ser un estado del sistema o bien una combinación lineal de estos y puede estar forzada o no por la entrada $\mathbf{u}(kT)$.

B. Condiciones

A diferencia de la solución de ecuaciones de diferencia, en esta representación se necesita conocer como condición inicial al vector $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Ejemplo 4.12. Para el problema de la población de conejos, Fig. 4.5, se encuentra que la ecuación que rige el crecimiento está dada por, $y(kT + 2T) - y(kT + T) - y(kT) = u(kT)$, con $y(0) = 1$, $y(T) = 1$ y con $u(kT) = 0$ determine una representación en ecuaciones de estado. **R.:** Al considerar que $x_1(kT) = y(kT)$ y $x_2(kT) = y(kT + T)$, se puede escribir que $x_1(kT + T) = y(kT + T) = x_2(kT)$ y $x_2(kT + T) = y(kT + 2T) = u(kT) + y(kT) + y(kT + T) = u(kT) + x_1(kT) + x_2(kT)$. Por lo tanto se puede escribir,

$$\begin{bmatrix} x_1(kT + T) \\ x_2(kT + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad \mathbf{y}(kT) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}, \text{ con } \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de donde,

$$\mathbf{x}(kT) = \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{c} = [1 \ 0], \text{ con } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \clubsuit$$

C . Solución homogénea y solución forzada

Solución homogénea. La entrada es nula y en el espacio de estados discretos, la representación para los sistemas no forzados es la siguiente,

$$\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT), \quad \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT),$$

este tipo de sistemas pueden ser resueltos en forma recursiva una vez que el vector de c.i. es especificado. Mediante sustituciones repetidas, se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(2T) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(T) = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(kT) &= \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Por analogía al caso continuo se introduce la *matriz de transición de estados discreta*.

Def.: La **matriz de transición de estados discreta** $\Phi(kT)$ se define por,

$$\Phi(kT) = \mathbf{A}^k.$$

Finalmente, la respuesta homogénea es,

$$\mathbf{x}(kT) = \Phi(kT)\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\Phi(kT)\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0.$$

Una forma alternativa de obtener la respuesta homogénea es aplicando la T.Z. a $\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT)$, lo que resulta en,

$$\begin{aligned} z\mathbf{x}(z) - z\mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(z) \\ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(z) &= z\mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\mathbf{x}(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\}\mathbf{x}_0.$$

Al comparar este resultado con el obtenido anteriormente se puede concluir que,

$$\Phi(kT) = \mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\} \quad \text{ó} \quad \Phi(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z.$$

Así, la respuesta homogénea es,

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}\Phi(kT)\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}\mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\}\mathbf{x}_0.$$

Solución forzada. Para obtener la respuesta forzada se consideran las c.i. nulas, es decir, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Así, el sistema a solucionar es,

$$\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT), \quad \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT),$$

aplicando la T.Z a ambos miembros se tiene,

$$z\mathbf{x}(z) = \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z), \quad \mathbf{y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}\mathbf{u}(z), \quad (z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(z) = \mathbf{B}\mathbf{u}(z), \quad \mathbf{y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}\mathbf{u}(z)$$

multiplicando la primera ecuación anterior por la izquierda por el factor $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ se obtiene,

$$\mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z) = z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B}\mathbf{u}(z),$$

por lo que los estados $\mathbf{x}(kT)$ para c.i. nulas son,

$$\mathbf{x}(kT) = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(kT - T - iT)\mathbf{B}\mathbf{u}(iT).$$

Por otro lado, la salida queda como,

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z) + \mathbf{D}\mathbf{u}(z),$$

por lo que la respuesta en el tiempo es,

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(kT - T - iT)\mathbf{B}\mathbf{u}(iT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT).$$

Dado que el sistema es lineal, la respuesta total de estos sistemas puede ser escrita como la suma de la respuesta homogénea y la forzada. Así los estados $\mathbf{x}(kT)$ estarían dados por,

$$\mathbf{x}(kT) = \Phi(kT)\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(kT - T - iT)\mathbf{B}\mathbf{u}(iT) \quad \text{o} \quad \mathbf{x}(z) = \Phi(z)\mathbf{x}_0 + z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B}\mathbf{u}(z),$$

y la salida por,

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\Phi(kT)\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}\Phi(kT - T - iT)\mathbf{B}\mathbf{u}(iT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT),$$

o bien,

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C}\Phi(z)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B}\mathbf{u}(z) + \mathbf{D}\mathbf{u}(z).$$

Ejemplo 4.13. Dado el circuito de la Fig. 4.1 con $R = 4$, $L = 40$ mH y $C = 200$ μ F se encuentra que el modelo continuo de segundo orden está dado por $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \cdot 10^3 \\ -25 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u(t)$. La simulación de este caso para entrada escalón se ilustran en la Fig. 4.8 Al considerar ahora el sistema discreto también de segundo orden dado por $\begin{bmatrix} x_1(kT+T) \\ x_2(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.775 & 8.327 \\ -0.042 & 0.609 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.225 \\ 0.042 \end{bmatrix} u(kT)$ y simularlo para entrada escalón de amplitud 2 se encuentran los resultados ilustrados en la Fig. 4.8. Es claro que el sistema discreto corresponde al caso circuito de la Fig. 4.1 pero “en versión discreto”. Más adelante se mostrará una forma sistemática para encontrar el modelo discreto equivalente de un modelo continuo. ♣

Ejemplo 4.14. Para el problema de la población de conejos, Fig. 4.5, se encuentra que la ecuación que rige el crecimiento está dada por, $\mathbf{x}(kT) = \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, y $\mathbf{c} = [1 \ 0]$, con $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $x_1(kT) = y(kT)$ y $x_2(kT) = y(kT + T)$. Determine la matriz de transición en el plano z y la respuesta del sistema en el plano z y kT . **R.:** La matriz de transición está

dada por $\Phi(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z = \left(z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} z = \frac{1}{z^2 - z - 1} \begin{bmatrix} z(z-1) & z \\ z & z^2 \end{bmatrix}$, por lo que la salida es $\mathbf{y}(z) = \mathbf{c}\Phi(z)\mathbf{x}_0 = [1 \ 0] \frac{1}{z^2 - z - 1} \begin{bmatrix} z(z-1) & z \\ z & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{z}{z - \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{z}{z - \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}}$. Esta última tiene un equivalente en el plano kT dado por $y(kT) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}^{k+1} - \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}^{k+1} \right\} u(kT)$. Nótese que en este caso hay sólo respuesta homogénea y no forzada. Por otro lado, la respuesta que se hace cero a medida que $k \rightarrow \infty$ es el término asociado con $1 - \sqrt{5}$; por lo tanto, la respuesta estacionaria es $y_{ss}(kT) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}^{k+1} u(kT)$. ♣

4.6 Ejercicios Propuestos.

Resuelva los problemas siguientes. Anote todo su trabajo.

A. Nivel básico.

1.- Clasifique las siguientes ecuaciones en diferencial/de diferencias, ordinaria/parcial, variante/invariante y lineal/no-lineal.

(a) $\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + y(t) = u(t)$

(b) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) + 10$

(c) $\frac{dy(t)}{dt} + ty(t) = u(t)$

(d) $y \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y^2(t) = u(t)$

(e) $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + k \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = u(t)$

(f) $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + ky(x,t) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = u(t)$

(g) $\frac{dy(t)}{dt} + |y(t)| y(t) = u(t)$

(h) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t)^3 y(t) = u(t)$

(i) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t - t_d)$

(j) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t)$

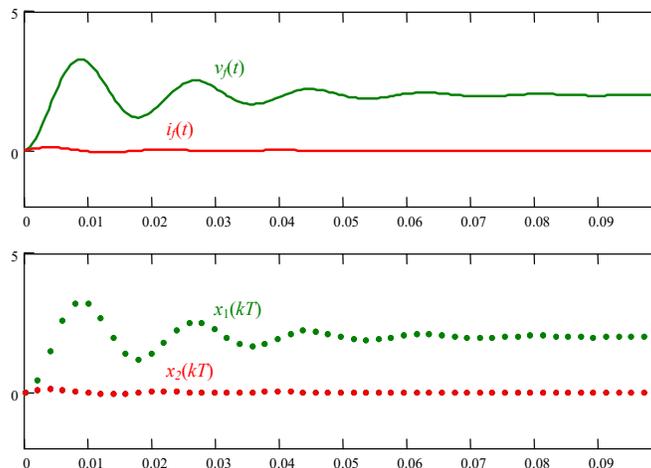


Fig. 4.8 Respuesta forzada del circuito RLC ante entrada escalón y c.i. $\mathbf{x}_0 = [2 \ 0]^T$ y respuesta forzada del Ejemplo 4.13.

- (k) $y(kT + T) + ky(kT) = 0$ (l) $y(kT + 2T) + a_0y(kT) = u(kT)$
 (m) $y(kT + T) + kTy(kT) = 0$ (n) $y(kT + T) + a_0y^2(kT) = u(kT)$
 (ñ) $y(kT + 2T) + |y(kT)| = u(kT + T)$ (o) $y(kT + 2T) + y(kT + T)y(kT) = u(kT)$
 (p) $y(kT + 2T) + y(kT) = u(kT) + 10$ (q) $y(kT + T) + y(kT) = \alpha^{kT} u(kT)$

2.- Determine la respuesta homogénea/forzada y estacionaria/transiente de las siguientes ecuaciones para entrada escalón. Asuma c.i. arbitrarias.

- (a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = u(t)$ (b) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) + 10$
 (c) $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt}$ (d) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t)$
 (e) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3y(t) = u(t - 1)$ (f) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t - 1)$
 (g) $y(kT + T) + a_0y(kT) = 0$ (h) $y(kT + T) + 0.5y(kT) = u(kT)$
 (i) $y(kT + T) + 1.5y(kT) = u(kT)$ (j) $y(kT + 2T) + 1.5y(kT) = u(kT)$
 (k) $y(kT + 2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT + T)$ (l) $y(kT + 2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT + T) + u(kT)$

3.- Determine el polinomio característico de las ecuaciones anteriores.

4.- Determine las raíces de los polinomios característicos de las ecuaciones anteriores.

5.- Determine la respuesta homogénea/forzada y estacionaria/transiente de las siguientes ecuaciones para entrada escalón. Asuma c.i. arbitrarias.

- (a) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [4 \quad 10] \mathbf{x}(t)$
 (b) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t) + u(t)$
 (c) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(t) + u(t)$
 (d) $\mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(kT)$
 (e) $\mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT)$
 (f) $\mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT) + u(kT)$

6.- Determine la matriz de transición de las ecuaciones anteriores.

7.- Determine los valores propios de las matrices de transición de las ecuaciones anteriores.

B. Nivel intermedio.

- 1.- Determine la respuesta homogénea/forzada y estacionaria/transiente para entrada escalón y sinusoidal de la ecuación $\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = k\omega_n^2u(t)$.
- 2.- Determine las matrices **A**, **b**, **c**, y **d** y c.i. de un sistema discreto que represente la secuencia de Fibonacci.
- 3.- Determine la expresión en el plano *s* o *z*, según corresponda, de la salida para entrada escalón de,

- (a) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = u(t)$ (b) $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt}$
- (c) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t)$ (d) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t-1)$
- (e) $y(kT+T) + 0.5y(kT) = u(kT)$ (f) $y(kT+T) + 1.5y(kT) = u(kT)$
- (g) $y(kT+2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT+T)$ (h) $y(kT+2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT+T) + u(kT)$
- (i) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [4 \quad 10] \mathbf{x}(t)$
- (j) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t) + u(t)$
- (k) $\mathbf{x}(kT+T) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(kT)$
- (l) $\mathbf{x}(kT+T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT) + u(kT)$

4.- Determine la matriz de transición de sistemas continuos caracterizados por,

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

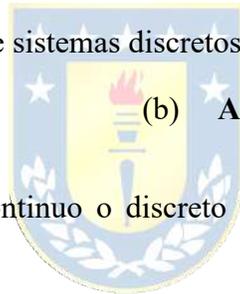
(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

5.- Determine la matriz de transición de sistemas discretos caracterizados por,

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix}$

6.- Muestre que un sistema ya sea continuo o discreto donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ tiene una matriz de transición oscilatoria.



C. Nivel avanzado.

- 1.- Escriba ejemplos de ecuaciones de diferencias parciales.
- 2.- Determine una expresión generalizada para las variables de estado en S.S. \mathbf{x}_0 de un sistema descrito por $\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{E}\mathbf{p}(kT)$, $\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{F}\mathbf{p}(kT)$, conociendo \mathbf{u} y \mathbf{p} en S.S.; es decir, \mathbf{u}_0 y \mathbf{p}_0 . Establezca las restricciones para que la solución sea única.
- 3.- Determine una expresión generalizada para las entradas en S.S. \mathbf{u}_0 de un sistema descrito por $\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{E}\mathbf{p}(kT)$, $\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{F}\mathbf{p}(kT)$, conociendo \mathbf{y} y \mathbf{p} en S.S.; es decir, \mathbf{y}_0 y \mathbf{p}_0 . Establezca las restricciones para que la solución sea única.
- 4.- Determine una expresión generalizada para las variables de estado en S.S. \mathbf{x}_0 de un sistema descrito por $\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{E}\mathbf{p}(kT)$, $\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{F}\mathbf{p}(kT)$, conociendo \mathbf{y} y \mathbf{p} en S.S.; es decir, \mathbf{y}_0 y \mathbf{p}_0 . Establezca las restricciones para que la solución sea única.
- 5.- Determine una expresión generalizada para la salida en S.S. \mathbf{y}_0 de un sistema descrito por $\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{E}\mathbf{p}(kT)$, $\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{F}\mathbf{p}(kT)$, conociendo \mathbf{u} y \mathbf{p} en S.S.; es decir, \mathbf{u}_0 y \mathbf{p}_0 . Establezca las restricciones para que la solución sea única.
- 6.- Pruebe las propiedades de la matriz de transición continua $\Phi(t)$.
- 7.- Encuentre el dual de las propiedades de $\Phi(t)$ aplicables a $\Phi(kT)$.

5 Funciones de Transferencia

Una alternativa de caracterizar a los sistemas lineales es a través de su respuesta a impulso. En este capítulo se introduce el concepto de Función de Transferencia como otra alternativa que introduce los conceptos de polos y ceros. Ésta herramienta aporta con nuevas opciones de caracterización, incluyendo estudios de estabilidad y de comportamiento estacionario y transiente. El concepto es extendido a sistemas discretos, sistemas con retardo y sistemas tipo MIMO.

5.1 Introducción

La respuesta a impulso de un sistema permite su caracterización. En efecto, en un sistema continuo se tiene que,

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau,$$

y en un sistema discreto,

$$y(kT) = h(kT) * u(kT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(kT - iT)u(iT),$$

donde $h(t)$ y $h(kT)$ son las respuestas a impulso de un sistema continuo y uno discreto, respectivamente. El tener las expresiones explícitas o gráficas de estas funciones no son de gran ayuda. Sin embargo, se encuentra que un análisis de éstas en el plano de la frecuencia aporta información útil.

5.2 En el Plano Continuo

Si se tiene una ecuación diferencial que relaciona la entrada $u(t)$ con la salida $y(t)$, entonces:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} u(s) - \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i s^{i-1-k} u^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right\},$$

que se puede escribir en el plano s como,

$$y(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} u(s) - \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i s^{i-1-k} u^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} + \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i},$$

o bien abreviadamente,

$$y(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} u(s) + \text{T.C.I.},$$

donde T.C.I. son los términos debidos a las c.i. tanto en la entrada como de la salida.

Def.: Se define la **Función de Transferencia** (F. de T.) a la función $h(s)$ como el factor en la ecuación de $y(s)$ que multiplica la entrada $u(s)$, considerando c.i. nulas. Por lo tanto,

$$h(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}.$$

Si las c.i. son nulas, se tiene que $y(s) = h(s)u(s)$. Considerando que,

$$h(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)},$$

se definen los conceptos de polos y ceros de una F. de T..

Def.: Los **polos** de $h(s)$ son las raíces del denominador $d(s)$.

Def.: Los **ceros** de $h(s)$ son las raíces del numerador $n(s)$.

Si $h(s)$ no tiene polos ni ceros con partes reales positivas, el sistema se dice de **fase mínima**.

Un valor importante que también caracteriza una F. de T. es el valor en S.S. que se logra en la salida para una entrada escalón. Este valor se define a continuación.

Def.: El valor de la respuesta en S.S. para entrada escalón de un sistema se conoce como **ganancia dc**. En un sistema continuo se determina como,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s h(s) u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s h(s) 1 / s = \lim_{s \rightarrow 0} h(s) = h(0).$$

Ejemplo 5.1. Estudiar las F. de T. para los siguientes sistemas. **(a)** $dy/dt + a_0 y = b_0 u$ se tiene que la F. de T. es $h(s) = \frac{b_0}{s + a_0}$

. Por lo tanto, ceros: no tiene; polo: $-a_0$. La respuesta a entrada escalón converge si a_0 es positivo. El sistema es de fase mínima.

La ganancia dc es b_0/a_0 . **(b)** $d^2 y/dt^2 + 3dy/dt + 2y = du/dt - u$. La función de transferencia es $h(s) = \frac{s-1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$

. Por lo tanto, cero: 1; polos: -1 y -2. La respuesta a entrada escalón converge. El sistema es de fase no mínima. La ganancia dc es -1/2. **(c)** $d^2y/dt^2 + 2dy/dt + 2y = du/dt + 2u$. La función de transferencia es $h(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{s+2}{(s+1+j)(s+1-j)}$. Por lo tanto, cero: -2; polos: -1 + j y -1 - j. La respuesta a entrada escalón converge. La ganancia dc es 1. El sistema es de fase mínima. Los polos y ceros se pueden representar en un plano complejo como ilustrado en la Fig. 5.1. ♣

Si ahora consideramos la representación de un sistema en sus variables de estado, pero con una entrada y una salida, se tiene,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t),$$

al tomar la T.L. se obtiene,

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}u(s), \quad y(s) = \mathbf{c}\mathbf{x}(s) + du(s),$$

lo que resulta en,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u(s), \quad y(s) = \mathbf{c}\mathbf{x}(s) + du(s),$$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u(s)), \quad y(s) = \mathbf{c}\mathbf{x}(s) + du(s),$$

$$y(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u(s)) + du(s),$$

al considerar las c.i. nulas se tiene finalmente que,

$$y(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(s) + du(s) = \mathbf{c} \frac{\text{Adj}\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}}{\det\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}} \mathbf{b}u(s) + du(s),$$

por lo que la F. de T. en función de la representación en variables de estado es igual a,

$$h(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d = \mathbf{c} \frac{\text{Adj}\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}}{\det\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}} \mathbf{b} + d,$$

Nótese que en este caso la ganancia dc puede calcularse como $h(0) = \mathbf{c}(-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d$.

Ejemplo 5.2. Para el sistema dado por: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = [1 \ -1]$, $d = 0$ determine la F. de T.. **R.:** En este caso se

tiene que $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+3 & -4 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+3)-4} \begin{bmatrix} s+3 & 4 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+6s+5} \begin{bmatrix} s+3 & 4 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+5)(s+1)} \begin{bmatrix} s+3 & 4 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}$, por lo que $h(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d = \frac{s+2}{(s+5)(s+1)}$. ♣

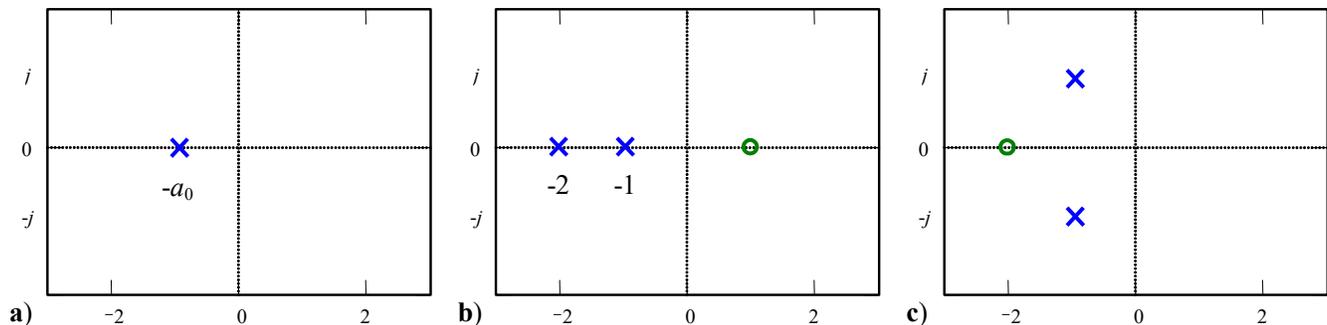


Fig. 5.1 Polos y ceros de F. de T. continuas; **a)** sistema de 1^{er} orden, **b)** y **c)** sistemas de 2^{do} orden.

Ejemplo 5.3. Para el sistema mostrado en la Fig. 5.2(a), obtenga sus F. de T. **R.:** El modelo está dado por las ecuaciones

$L \frac{di_a}{dt} = v_a - Ri_a - k_m \omega$ y $J_l \frac{d\omega}{dt} = k_m i_a - d\omega - t_l$. Tomando T.L se obtiene $sLi_a = v_a - Ri_a - k_m \omega$ y $sJ_l \omega = k_m i_a - d\omega - t_l$. Al

despejar i_a de la 1^{era} ecuación se obtiene $i_a = \frac{v_a - k_m \omega}{Ls + R}$, reemplazando el resultado en la 2^{da} se obtiene,

$$sJ_l \omega = k_m \frac{v_a - k_m \omega}{Ls + R} - d\omega - t_l, \text{ o bien, } \omega(s) = \frac{k_m}{J_l L} \frac{1}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l} \right] s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}} v_a(s) + \frac{-1}{J_l} \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l} \right] s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}} t_l(s).$$

el contrario, la salida es la corriente i_a , entonces, se puede despejar ω de la 2^{da} ecuación, lo que resulta en $\omega = \frac{k_m i_a + t_l}{J_l s + d}$,

reemplazando este resultado en la 1^{era} ecuación es, $v_a = sLi_a + Ri_a + k_m \frac{k_m i_a + t_l}{J_l s + d}$, lo que al ser ordenado resulta en,

$$i_a(s) = \frac{1}{L} \frac{s + \frac{d}{J_l}}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l} \right] s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}} v_a(s) + \frac{k_m}{J_l L} \frac{1}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l} \right] s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}} t_l(s).$$

T.s, de acuerdo a $\omega(s) = h_{\omega v_a}(s)v_a(s) + h_{\omega t_l}(s)t_l(s)$, $i_a(s) = h_{i_a v_a}(s)v_a(s) + h_{i_a t_l}(s)t_l(s)$. Así el cero asociado a $h_{\omega t_l}(s)$ está dado por $-R/L = -24$ y el asociado $h_{i_a v_a}(s)$ está dado por $-d/J = -0.593$. Los polos son únicos y están dados por las raíces de

$s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l} \right] s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}$, que resultan ser -3.151 y -21.442, Fig. 5.2(b). Las ganancias dc resultan ser $h_{\omega v_a}(s) = 1.316$, $h_{\omega t_l}(s) = -2.632$, $h_{i_a v_a}(s) = 0.175$, $h_{i_a t_l}(s) = 1.316$. Estos valores quedan evidenciados en las respuestas mostradas en la Fig. 5.2(c) para

$v_a(t) = 3u(t - 1)$. ♣

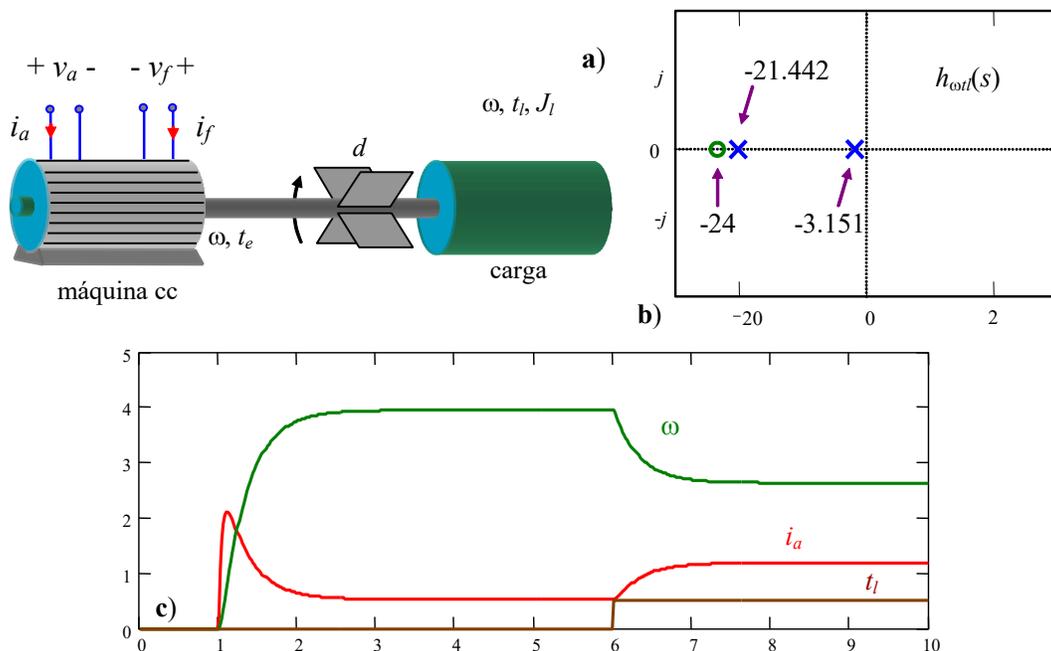


Fig. 5.2 F. de T. de la máquina c.c.; **a)** esquema, **b)** polos y ceros de $h_{\omega}(s)$, **c)** respuesta dinámica.

Ejemplo 5.4. Para el sistema mostrado en la Fig. 5.3, obtenga su F. de T.. **R.:** Definiendo $x_1 = i, x_2 = x, x_3 = dx/dt = v$ y $u = e$ se tiene la representación en variables de estado, $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Rx_1/L + u/L \\ x_3 \\ -g + k_1 x_1^2/[m(l_1 - x_2 + a)] + k(l_0 - x_2)/m - dx_3/m \end{bmatrix}$. Este

modelo es no-lineal, dado que la F. de T. está definida para sistemas lineales, se obtiene primero el modelo lineal del sistema

para un punto de operación arbitrario. Éste está dado por, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2\frac{k_1}{m} \frac{i_o}{l_1 - x_o + a} & \frac{k_1}{m} \frac{i_o^2}{(l_1 - x_o + a)^2} - \frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = [0$

1 0], $d = 0$. Nótese que en el punto de operación se cumple que $-Ri_o/L + u_o/L = 0$ y $-g + k_1 i_o^2/[m(l_1 - x_o + a)] + k(l_0 - x_o)/m = 0$. Luego de algo de trabajo se obtiene la expresión de la F. de T. dada por

$$\Delta x(s) = k_p \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{\tau s + 1} \Delta e(s), \quad \text{donde} \quad k_p = 2\frac{k_1}{m} \frac{i_o}{l_1 - x_o + a} \frac{1}{R}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} - \frac{k_1}{m} \frac{i_o^2}{(l_1 - x_o + a)^2},$$

$\xi = \frac{d}{2m\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k_1}{m} \frac{i_o^2}{(l_1 - x_o + a)^2}}}$ y $\tau = L/R$. La F. de T. tiene tres polos, uno independiente del punto de operación y los otros

dos dados por las raíces de $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$. Nótese que los coeficientes de este polinomio son siempre positivos en tanto el coeficiente ω_n^2 lo sea, éste será un aspecto importante en el estudio de la estabilidad del sistema. La ganancia dc resulta ser k_p/ω_n^2 . ♣



5.3 En el Plano Discreto

Si se tiene una ecuación de diferencias que relaciona la entrada $u(kT)$ con la salida $y(kT)$, entonces:

$$y(kT) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} u(z) - \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i s^{i-k} u(kT)}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i z^{i-k} y(kT)}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} \right\}$$

que se puede escribir en el plano z como,

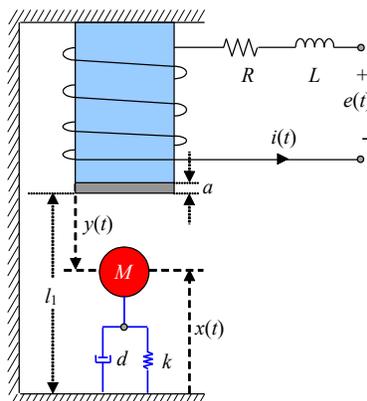


Fig. 5.3 Levitador magnético.

$$y(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} u(z) - \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i s^{i-k} u(kT)}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} + \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i z^{i-k} y(kT)}{\sum_{i=0}^n a_i z^i}$$

o bien abreviadamente,

$$y(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} u(z) + \text{T.C.I.}$$

donde T.C.I. son los términos debidos a las c.i. tanto en la entrada como de la salida.

Def.: Se define la **Función de Transferencia** (F. de T.) a la función $h(z)$ como el factor en la ecuación de $y(z)$ que multiplica la entrada $u(z)$, considerando c.i. nulas. Por lo tanto,

$$h(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{\prod_{i=1}^m (z + z_i)}{\prod_{i=1}^n (z + p_i)}$$

Si las c.i. son nulas, se tiene que $y(z) = h(z)u(z)$. Considerando que,

$$h(z) = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{\prod_{i=1}^m (z + z_i)}{\prod_{i=1}^n (z + p_i)},$$

se definen los conceptos de polos y ceros de una F. de T..

Def.: Los **polos** de $h(z)$ son las raíces del denominador $d(z)$.

Def.: Los **ceros** de $h(z)$ son las raíces del numerador $n(z)$.

Si $h(z)$ no tiene polos ni ceros cuyo módulo sea mayor que uno, el sistema se dice de **fase mínima**.

Al igual que en sistemas continuos, un valor importante que también caracteriza una F. de T. es el valor en S.S. que se logra en la salida para una entrada escalón. Este valor se define a continuación.

Def.: El valor de la respuesta en S.S. para entrada escalón de un sistema discreto se conoce como **ganancia dc**. En un sistema discreto se determina como,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} h(z) u(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} h(z) \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} h(z) = h(1).$$

Ejemplo 5.5. Estudiar las F. de T. para los siguientes sistemas. **(a)** $y(kT+T) + a_0y(kT) = b_0u(kT)$ se tiene que la F. de T. es $h(z) = \frac{b_0}{z + a_0}$. Por lo tanto, ceros: no tiene; polo: $-a_0$. La respuesta a entrada escalón converge si $|a_0|$ es menor que uno. El sistema es de fase mínima si $|a_0|$ es menor que uno La ganancia dc es $b_0/(1+a_0)$. **(b)** $y(kT+2T) + 1.1y(kT+T) + 0.3y(kT) = u(kT+2T) + 0.2u(kT+T)$. La función de transferencia es $h(z) = \frac{z^2 + 0.2z}{z^2 + 1.1z + 0.3} = \frac{z(z + 0.2)}{z^2 + 1.1z + 0.3} = \frac{z(z + 0.2)}{(z + 0.5)(z + 0.6)}$. Por lo tanto, ceros: 0, -0.2; polos: -0.5 y -0.6. La respuesta a entrada escalón converge. El sistema es de fase mínima. La ganancia dc es $1.2/(1.5 \cdot 1.6) = 0.5$. Similarmente al caso continuo, los polos y ceros se pueden representar en un plano complejo como ilustrado en la Fig. 5.4. ♣

Si ahora consideramos la representación de un sistema en sus variables de estado, pero con una entrada y una salida, se tiene,

$$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{b}u(kT), \quad y(kT) = \mathbf{c}\mathbf{x}(kT) + du(kT),$$

al tomar la T.Z. se obtiene,

$$z\mathbf{x}(z) - z\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{b}u(z), \quad y(z) = \mathbf{c}\mathbf{x}(z) + du(z),$$

lo que resulta en,

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(z) = z\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u(z), \quad y(z) = \mathbf{c}\mathbf{x}(z) + du(z),$$

$$\mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(z\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u(z)), \quad y(z) = \mathbf{c}\mathbf{x}(z) + du(z),$$

$$y(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(z\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}u(z)) + du(z),$$

al considerar las c.i. nulas se tiene finalmente que,

$$y(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(z) + du(z) = \mathbf{c} \frac{\text{Adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det\{z\mathbf{I} - \mathbf{A}\}} \mathbf{b}u(z) + du(z),$$

por lo que la F.de T. en función de la representación en variables de estado es igual a,

$$h(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d = \mathbf{c} \frac{\text{Adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det\{z\mathbf{I} - \mathbf{A}\}} \mathbf{b} + d,$$

Nótese que en este caso la ganancia dc puede calcularse como $h(1) = \mathbf{c}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d$.

Ejemplo 5.6. Para el problema de la población de conejos se encuentra que la ecuación que rige el crecimiento está dada por, $y(kT + 2T) - y(kT + T) - y(kT) = u(kT)$, con $y(0) = 1, y(T) = 1$ y con $u(kT) = 0$ determine una F. de T. que represente este

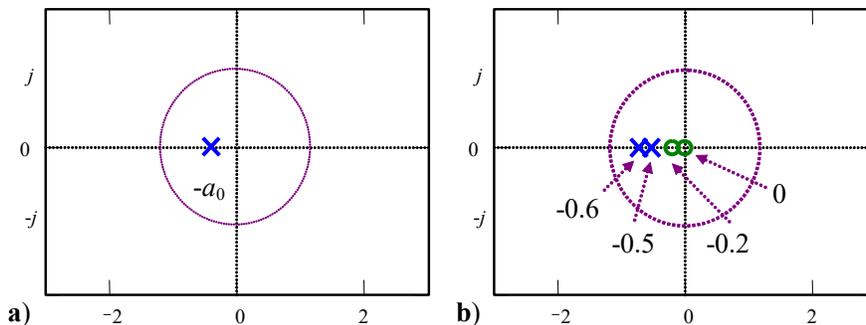


Fig. 5.4 Polos y ceros de F. de T. discretas; **a)** sistema de 1er orden, **b)** sistemas de segundo orden.

caso. **R.**: Se puede asumir que la ecuación anterior tiene una entrada $u(kT)$ nula o que el coeficiente que la multiplica es nula.

Así, la F. de T. quedaría dada por $h(z) = \frac{1}{z^2 - z - 1} \cdot \clubsuit$

5.4 Modelo en Espacio de Estados a partir de una F. de T.

Si se tiene una representación de un sistema en su F. de T. se plantea el problema de cómo llegar a una representación de ecuaciones en el espacio de estados.

A. Caso continuo

Sea una F. de T. $h(s)$, considerando $m = n$, la cual representa a un sistema lineal dado.

$$h(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Se define arbitrariamente, la variable intermedia $x_1(s)$ tal que,

$$\frac{x_1(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Tomando la T.L. inversa, queda lo siguiente,

$$x_1^{(n)} + a_{n-1} x_1^{(n-1)} + \dots + a_1 x_1^{(1)} + a_0 x_1 = u,$$

definiendo nuevas variables como,

$$x_2 = \dot{x}_1, \quad x_3 = \ddot{x}_1, \quad \dots, \quad x_n = x_1^{(n-1)}.$$

por lo que se puede escribir,

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u,$$

por otro lado,

$$\frac{y(s)}{x_1(s)} = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0,$$

por lo que,

$$\begin{aligned} y &= b_n x_1^{(n)} + b_{n-1} x_1^{(n-1)} + \dots + b_1 \dot{x}_1 + b_0 x_1 \\ &= b_n (-a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u) + b_{n-1} x_n + \dots + b_1 x_2 + b_0 x_1, \\ &= (b_0 - b_n a_0) x_1 + (b_1 - b_n a_1) x_2 + \dots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n + b_n u \end{aligned}$$

de esta forma el sistema representado por una F. de T. se puede escribir como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad \cdots \quad b_{n-2} - a_{n-2} b_n \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n] [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n-1} \quad x_n]^T + b_n u,$$

de donde se puede obtener por inspección la matriz \mathbf{A} , el vector \mathbf{b} , \mathbf{c} , y el escalar d de la representación del tipo $h(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d$. En la Fig. 5.5 se muestra un diagrama en bloques para esta representación. Nótese que $h(s)$ es un escalar, por lo que se puede escribir que,

$$h(s) = h(s)^T = \{\mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d\}^T,$$

por lo que,

$$h(s) = \{\mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\}^T + \{d\}^T,$$

$$h(s) = \mathbf{b}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{c}^T + d,$$

$$h(s) = \mathbf{b}^T(\{s\mathbf{I}\}^T - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{c}^T + d,$$

$$h(s) = \mathbf{b}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{c}^T + d,$$

por lo que otra representación para el sistema descrito por $h(s)$ en variables de estado es,

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_{n-1} \\ \dot{\gamma}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_n \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \cdots \quad \gamma_{n-1} \quad \gamma_n]^T + b_n u$$

También puede considerarse el caso de utilizar fracciones parciales. Sea $h(s)$ con polos simples reales, y con $m < n$, entonces,

$$h(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + p_i},$$

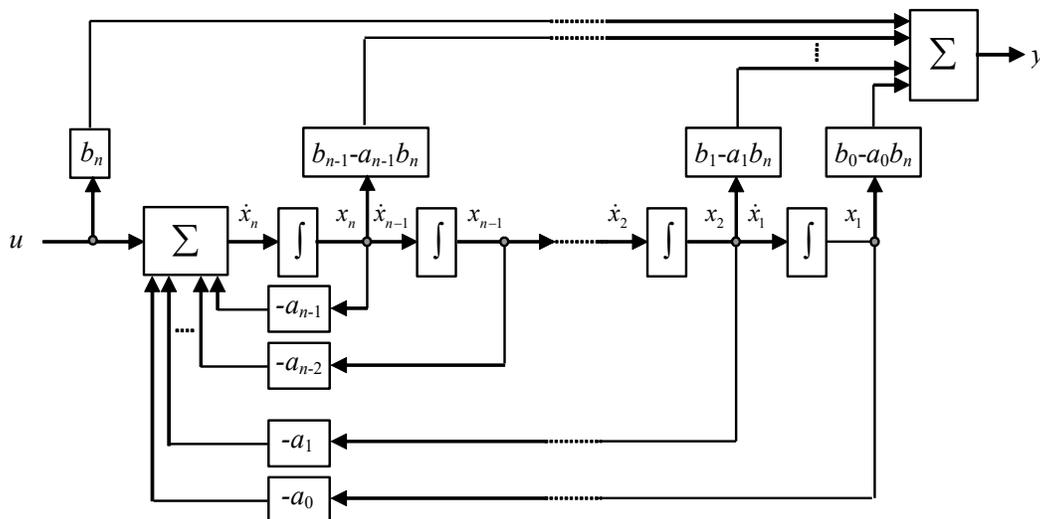


Fig. 5.5 Diagrama de una representación en variables de estado continuo.

donde $k_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s + p_i) \frac{n(s)}{d(s)}$, en este caso la representación en variables de estado es,

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \cdots \quad \sigma_n]^T + b_n u$$

En el caso de raíces repetidas se procede como sigue. Sea p_1 una raíz repetida q veces, entonces,

$$h(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s + p_1)^q (s + p_2) \cdots (s + p_{n-q+1})}$$

$$= \frac{c_1}{s + p_1} + \cdots + \frac{c_{q-1}}{(s + p_1)^{q-1}} + \frac{c_q}{(s + p_1)^q} + \sum_{i=1}^{n-q} \frac{k_i}{s + p_{i+1}}$$

donde $c_l = \frac{1}{(q-l)!} \lim_{s \rightarrow -p_1} \frac{d^{(q-l)}}{ds^{(q-l)}} \left\{ (s + p_1)^q \frac{n(s)}{d(s)} \right\}$, para $l = 1, \dots, q - 1$, $c_q = \lim_{s \rightarrow -p_1} (s + p_1)^q \frac{n(s)}{d(s)}$, y

$k_{i-1} = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s + p_i) \frac{n(s)}{d(s)}$, para $i = 2, \dots, n - q - 1$. En este caso la representación en variables de estado queda como sigue,



$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \vdots \\ \dot{\epsilon}_{q-1} \\ \dot{\epsilon}_q \\ \dot{\epsilon}_{q+1} \\ \vdots \\ \dot{\epsilon}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -p_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_{n-q+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{q-1} \\ \epsilon_q \\ \epsilon_{q+1} \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{q-1} \quad c_q \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-q}] [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \cdots \quad \epsilon_{q-1} \quad \epsilon_q \quad \epsilon_{q+1} \quad \cdots \quad \epsilon_n]^T$$

Ejemplo 5.7. Disponer en ecuaciones de estado al sistema dado por $h(s) = \frac{s + b_0}{(s + a)^2 (s + b)}$. **R.:** En este caso se tiene que

$$h(s) = \frac{c_1}{(s + a)} + \frac{c_2}{(s + a)^2} + \frac{k_1}{(s + b)}$$

por lo tanto, $c_1 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -a} \frac{d^{(2-1)}}{ds^{(2-1)}} \left\{ (s + a)^2 \frac{s + b_0}{(s + a)^2 (s + b)} \right\} = \lim_{s \rightarrow -a} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{s + b_0}{s + b} \right\} =$

$$\lim_{s \rightarrow -a} \frac{(s + b) - (s + b_0)}{(s + b)^2} = \frac{b - b_0}{(b - a)^2}, \quad c_2 = \lim_{s \rightarrow -a} (s + a)^2 \frac{s + b_0}{(s + a)^2 (s + b)} = \lim_{s \rightarrow -a} \frac{s + b_0}{s + b} = \frac{b_0 - a}{b - a}$$

y $k_1 = \lim_{s \rightarrow -b} (s + b) \frac{s + b_0}{(s + a)^2 (s + b)} =$

$$\lim_{s \rightarrow -b} \frac{s + b_0}{(s + a)^2} = \frac{b_0 - b}{(a - b)^2}$$

Por lo tanto, la representación es, $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [c_1 \quad c_2 \quad k_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. ♣

Ejemplo 5.8. Para el sistema mostrado en la Fig. 5.2(a), obtenga dos representaciones en variables de estado. **R.:** El modelo está dado por las ecuaciones $L \frac{di_a}{dt} = v_a - Ri_a - k_m \omega$ y $J_l \frac{d\omega}{dt} = k_m i_a - d\omega - t_l$. Definiendo a $x_1 = i_a$ y $x_2 = \omega$, el modelo natural

en variables de estado es, $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -k_m/L \\ k_m/J_l & -d/J_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} v_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_l \end{bmatrix} t_l$, $\omega = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Sin embargo, al considerar la velocidad como salida, se encontró en el Ejemplo 5.3 la relación en el plano s

$\omega(s) = \frac{k_m}{J_l L} \frac{1}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l}\right]s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}} v_a(s) + \frac{-1}{J_l} \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l}\right]s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}} t_l(s)$, por lo que otra representación en variables de

estado es, $\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k_m^2 + dR}{J_l L} \\ 1 & -\left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_m}{J_l L} \\ 0 \end{bmatrix} v_a + \begin{bmatrix} \frac{-R}{J_l L} \\ \frac{-1}{J_l} \end{bmatrix} t_l$, $\omega = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$. Nótese que en esta nueva representación ζ_1

no corresponde a i_a ; es más, no hay significado físico para esta variable. ♣

Una vez que se tiene una representación del tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ep}$, $\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} + \mathbf{Fp}$, se pueden encontrar infinitas representaciones en variables de estado. Para esto basta definir una transformación de similitud. Las transformaciones de similitud representan un cambio de coordenadas de las variables de estado, y están expresadas por una matriz invertible de manera que $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, donde \mathbf{x} es el vector de estados original y \mathbf{z} es el nuevo vector de estados, por lo tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}$ y por ende $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{T}^{-1}d\mathbf{z}/dt$ con lo que la representación original queda,

$$\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{AT}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ep}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{CT}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{Du} + \mathbf{Fp},$$

multiplicando la primera ecuación - por la izquierda - por \mathbf{T} , se obtiene finalmente,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{TBu} + \mathbf{TEp}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{CT}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{Du} + \mathbf{Fp},$$

Normalmente se acostumbra a definir nuevas matrices de parámetros. Es decir, $\mathbf{A}_T = \mathbf{TAT}^{-1}$, $\mathbf{B}_T = \mathbf{TB}$, $\mathbf{C}_T = \mathbf{CT}^{-1}$, $\mathbf{D}_T = \mathbf{D}$, $\mathbf{E}_T = \mathbf{TE}$, $\mathbf{F}_T = \mathbf{F}$. Por lo que la representación alternativa quedaría,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_T\mathbf{z} + \mathbf{B}_T\mathbf{u} + \mathbf{E}_T\mathbf{p}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}_T\mathbf{z} + \mathbf{D}_T\mathbf{u} + \mathbf{F}_T\mathbf{p},$$

En este caso, la F. de T. (sin considerar la perturbación) es,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_T(s) &= \mathbf{C}_T(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_T)^{-1}\mathbf{B}_T + \mathbf{D}_T \\ &= \mathbf{CT}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{TAT}^{-1})^{-1}\mathbf{TB} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{CT}^{-1}(\mathbf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{TB} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{CT}^{-1}\mathbf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{TB} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{H}(s) \end{aligned}$$

lo que ratifica que la definición de las variables de estado no altera la F. de T., por cuanto esta es una característica entrada/salida del sistema.

B. Caso discreto

De igual manera que para el caso tiempo continuo, consideremos una F. de T., la cual representa a un sistema lineal discreto y nos interesaría obtener una representación en el espacio de estados. Sea $h(z)$ con $m = n$, la cual representa a un sistema lineal dado, entonces,

$$h(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}.$$

Se define arbitrariamente, la variable intermedia $x_1(z)$ tal que,

$$\frac{x_1(z)}{u(z)} = \frac{1}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}.$$

Tomando la T.Z. inversa, queda lo siguiente,

$$x_1(kT + nT) + a_{n-1} x_1(kT + nT - T) + \dots + a_1 x_1(kT + T) + a_0 x_1(kT) = u(kT),$$

definiendo nuevas variables como,

$$x_2(kT) = x_1(kT + T), \quad x_3(kT) = x_1(kT + 2T), \quad \dots, \quad x_n(kT) = x_1(kT + nT - T).$$

por lo que se puede escribir,

$$\begin{aligned} x_1(kT + T) &= x_2(kT), & x_2(kT + T) &= x_3(kT), & \dots, & & x_{n-1}(kT + T) &= x_n(kT) \\ x_n(kT + T) &= -a_0 x_1(kT) - a_1 x_2(kT) - \dots - a_{n-1} x_n(kT) + u(kT) \end{aligned},$$

por otro lado,

$$\frac{y(z)}{x_1(z)} = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0,$$

por lo que,

$$\begin{aligned} y(kT) &= b_n x_1(kT + nT) + b_{n-1} x_1(kT + nT - T) + \dots + b_1 x_1(kT + T) + b_0 x_1(kT) \\ &= b_n (-a_0 x_1(kT) - a_1 x_2(kT) - \dots - a_{n-1} x_n(kT) + u(kT)) + b_{n-1} x_n(kT) + \dots + b_1 x_2(kT) + b_0 x_1(kT), \\ &= (b_0 - b_n a_0) x_1(kT) + (b_1 - b_n a_1) x_2(kT) + \dots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n(kT) + b_n u(kT) \end{aligned}$$

de esta forma el sistema representado por una F. de T. se puede escribir como,

$$\begin{bmatrix} x_1(kT + T) \\ x_2(kT + T) \\ \vdots \\ x_{n-1}(kT + T) \\ x_n(kT + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_{n-1}(kT) \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT),$$

$$y(kT) = [b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad \dots \quad b_{n-2} - a_{n-2} b_n \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_{n-1}(kT) \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + b_n u(kT),$$

de donde se puede obtener por inspección la matriz \mathbf{A} , el vector \mathbf{b} , \mathbf{c} , y el escalar d de la representación del tipo $h(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d$. En la Fig. 5.6 se muestra un diagrama en bloques para esta representación. Nótese que $h(z)$ es un escalar, por lo que se puede escribir que,

$$h(z) = h(z)^T = \{\mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d\}^T,$$

por lo que (siguiendo el desarrollo para sistemas continuos),

$$h(z) = \mathbf{b}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{c}^T + d,$$

por lo que otra representación para el sistema descrito por $h(z)$ en variables de estado es,

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(kT+T) \\ \gamma_2(kT+T) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(kT+T) \\ \gamma_n(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1(kT) \\ \gamma_2(kT) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(kT) \\ \gamma_n(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_n \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} u(kT)$$

$$y(kT) = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] [\gamma_1(kT) \ \gamma_2(kT) \ \cdots \ \gamma_{n-1}(kT) \ \gamma_n(kT)]^T + b_n u(kT)$$

También puede considerarse el caso de utilizar fracciones parciales. Sea $h(z)$ con polos simples reales, y con $m < n$, entonces,

$$h(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{(z + p_1)(z + p_2) \cdots (z + p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{z + p_i},$$

donde $k_i = \lim_{z \rightarrow -p_i} (z + p_i) \frac{n(z)}{d(z)}$, en este caso la representación en variables de estado es,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1(kT+T) \\ \sigma_2(kT+T) \\ \vdots \\ \sigma_n(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1(kT) \\ \sigma_2(kT) \\ \vdots \\ \sigma_n(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} u(kT),$$

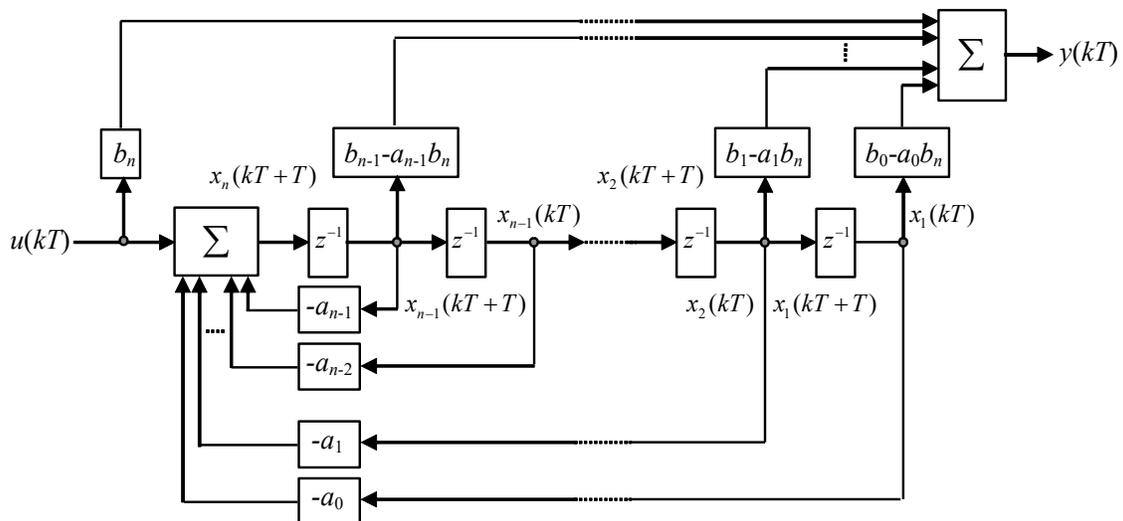


Fig. 5.6 Diagrama de una representación en variables de estado discreto.

$$y(kT) = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1][\sigma_1(kT) \quad \sigma_2(kT) \quad \cdots \quad \sigma_n(kT)]^T + b_n u(kT).$$

Similarmente al caso continuo, se pueden obtener las expresiones generalizadas para el caso de tener raíces iguales.

Ejemplo 5.9. Disponer en ecuaciones de estado al sistema dado por $h(z) = \frac{2z-6}{4z^3-z}$. **R.:** En este caso se tiene que

$$h(z) = \frac{0.5z-1.5}{z^3-0.25z}, \text{ por lo que por inspección se puede escribir que } \begin{bmatrix} x_1(kT+T) \\ x_2(kT+T) \\ x_3(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u(kT),$$

$$y(kT) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix}. \text{ Por otro lado, utilizando fracciones parciales se tiene que } h(z) = \frac{0.5z-1.5}{z^3-0.25z} = \frac{0.5z-1.5}{z(z^2-0.25)} =$$

$$\frac{0.5z-1.5}{z(z+0.5)(z-0.5)} = \frac{-6}{z} + \frac{2.5}{z+0.5} + \frac{3.5}{z-0.5}; \text{ por lo tanto, otra representación en variables de estado está dada por,}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1(kT+T) \\ \sigma_2(kT+T) \\ \sigma_3(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1(kT) \\ \sigma_2(kT) \\ \sigma_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \sigma_1(kT) \\ \sigma_2(kT) \\ \sigma_3(kT) \end{bmatrix}. \text{ Nótese que los valores propios son } 0, -$$

0.5 y 0.5. ♣

Ejemplo 5.10. Para el problema de la población de conejos se encuentra que la ecuación que rige el crecimiento está dada por, $y(kT+2T) - y(kT+T) - y(kT) = u(kT)$, con $y(0) = 1$, $y(T) = 1$ y con $u(kT) = 0$ determine una representación en variables de estado. **R.:** Al considerar $x_1(kT) = y(kT)$ y $x_2(kT) = y(kT+T)$ se puede determinar que $x_1(kT+T) = y(kT+T) = x_2(kT)$ y $x_2(kT+T) = y(kT+2T) = y(kT+T)$. A partir del modelo se obtiene que, $x_2(kT+T) = u(kT) + y(kT) + y(kT+T) = u(kT) + x_1(kT) + x_2(kT)$.

Por lo que una representación en variables de estado es, $\begin{bmatrix} x_1(kT+T) \\ x_2(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT),$

$$y(kT) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}. \quad \clubsuit$$

Al igual que en el caso continuo, una vez que se tiene una representación del tipo $\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{E}\mathbf{p}(kT)$, $\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{F}\mathbf{p}(kT)$, se pueden encontrar infinitas representaciones en variables de estado. Para esto basta definir una transformación de similitud de manera que $\mathbf{z}(kT) = \mathbf{T}\mathbf{x}(kT)$, donde $\mathbf{x}(kT)$ es el vector de estados original y $\mathbf{z}(kT)$ es el nuevo vector de estados, por lo tanto, $\mathbf{x}(kT) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(kT)$ y por ende $\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(kT+T)$ con lo que la representación original queda,

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(kT+T) = \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{E}\mathbf{p}(kT), \quad \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{F}\mathbf{p}(kT),$$

multiplicando la primera ecuación - por la izquierda - por \mathbf{T} , se obtiene finalmente,

$$\mathbf{z}(kT+T) = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(kT) + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{p}(kT), \quad \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) + \mathbf{F}\mathbf{p}(kT),$$

Normalmente se acostumbra definir nuevas matrices de parámetros. Es decir, $\mathbf{A}_T = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{B}_T = \mathbf{T}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_T = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{D}_T = \mathbf{D}$, $\mathbf{E}_T = \mathbf{T}\mathbf{E}$, $\mathbf{F}_T = \mathbf{F}$. Por lo que la representación alternativa quedaría,

$$\mathbf{z}(kT+T) = \mathbf{A}_T \mathbf{z}(kT) + \mathbf{B}_T \mathbf{u}(kT) + \mathbf{E}_T \mathbf{p}(kT), \quad \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}_T \mathbf{z}(kT) + \mathbf{D}_T \mathbf{u}(kT) + \mathbf{F}_T \mathbf{p}(kT),$$

Similarmente al caso continuo, se puede demostrar que esta nueva representación y la original tienen la misma F. de T.

5.5 Sistemas de Primer y Segundo Orden

La mayoría de los sistemas tienen comportamientos que pueden ser asociados a sistemas de primer y/o segundo orden, con o sin retardo. Por lo tanto, es importante conocer en detalle las características estáticas y dinámicas de éstos sistemas.

A. Primer orden.

Un sistema de primer orden se puede modelar con la siguiente ecuación diferencial,

$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t), \quad \text{con } y(0) = 0,$$

de la cual se obtiene la F. de T.,

$$h(s) = \frac{b_0}{s + a_0} = k \frac{1}{\tau s + 1}, \quad \text{con } k = b_0/a_0 \text{ y } \tau = 1/a_0.$$

Nótese que k corresponde a la ganancia dc del sistema y τ es la constante de tiempo. Además, el sistema no tiene ceros y tiene un polo en $s = -a_0 = -1/\tau$.

Respuesta a entrada escalón. La respuesta del sistema de primer orden a entrada escalón (Fig. 5.7) es,

$$y(t) = k(1 - e^{-t/\tau})u(t).$$

Evaluando la respuesta del sistema en el tiempo $t = \tau$, se tiene que $y(\tau) = k(1 - e^{-1}) = 0.632k$; es decir, la respuesta alcanza el 63.2 % de su valor final. Evaluando la respuesta del sistema en el S.S., se tiene que $y(\infty) = k(1 - e^{-\infty}) = k$, que concuerda con la ganancia dc del sistema, pues $h(0) = k = y(\infty)$.

B. Primer orden con retardo

Un sistema de primer orden con retardo se puede modelar con la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t - t_d), \quad \text{con } y(0) = 0,$$

de la cual se obtiene la F. de T.,

$$h(s) = \frac{b_0}{s + a_0} e^{-t_d s} = k \frac{1}{\tau s + 1} e^{-t_d s}, \quad \text{con } k = b_0/a_0 \text{ y } \tau = 1/a_0.$$

Nótese que k corresponde a la ganancia dc del sistema y τ es la constante de tiempo. Además, el sistema tiene un cero en ∞ y un polo en $s = -a_0 = -1/\tau$.

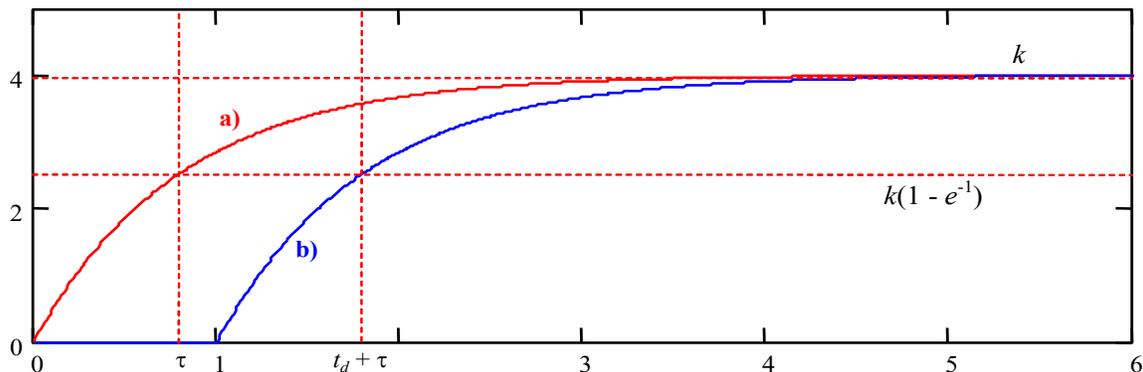


Fig. 5.7 Respuesta a entrada escalón de un sistema de primer orden; **a)** sin retardo, **b)** con retardo.

Respuesta a entrada escalón. La respuesta del sistema de primer orden con retardo a entrada escalón (Fig. 5.7) es,

$$y(t) = k(1 - e^{-(t-t_d)/\tau})u(t-t_d),$$

Evaluando la respuesta del sistema en el tiempo $t = t_d + \tau$, se tiene que $y(t_d + \tau) = k(1 - e^{-1}) = 0.632k$; es decir, la respuesta alcanza el 63.2 % de su valor final. Evaluando la respuesta del sistema en S.S., se tiene que $y(\infty) = k(1 - e^{-\infty}) = k$, que concuerda con la ganancia dc del sistema, pues $h(0) = k = y(\infty)$.

C . Segundo orden

Un sistema de segundo orden se puede modelar con la siguiente ecuación diferencial,

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = k\omega_n^2u(t),$$

de la cual se obtiene la F. de T.,

$$h(s) = k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Nótese que k corresponde a la ganancia dc, ξ es el factor de amortiguamiento y ω_n corresponde a la frecuencia natural de oscilación. El sistema no tiene ceros y tiene dos polos que están dados por $-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$. Es evidente que dependiendo del valor de los parámetros se pueden dar varias combinaciones posibles para los polos del sistema.

Caso 1, $\xi > 1$, polos negativos y distintos. En este caso se tiene que,

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad y(t) = k \frac{c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}}{c_1 + c_2}.$$

Caso 2, $\xi = 1$, polos negativos e iguales. En este caso se tiene que,

$$s_1 = -\xi\omega_n, \quad s_2 = -\xi\omega_n, \quad y(t) = k \frac{c_1 - c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_2 t}}{c_1}.$$

Caso 3, $0 < \xi < 1$, polos negativos complejos. En este caso se tiene que,

$$s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}, \quad s_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2},$$

$$y(t) = k \left\{ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left[\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \right] \right\}.$$

Caso 4, $\xi = 0$, polos imaginarios. En este caso se tiene que,

$$s_1 = j\omega_n, \quad s_2 = -j\omega_n, \quad y(t) = k[1 - \cos(\omega_n t)].$$

Los diferentes casos se muestran en la Fig. 5.8, además de las correspondientes respuestas a entrada escalón.

5.6 Sistemas Equivalentes Discretos - Continuos

Un desafío interesante es encontrar ecuaciones de diferencias cuyas respuestas a una entrada dada sea el muestreo de la respuesta de un sistema de ecuaciones diferenciales conocido.

A. Ecuación diferencial - Ecuación de diferencias

Se sabe que para el sistema,

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t),$$

que tiene un polo en $-a$ y que la respuesta a entrada escalón es,

$$y(t) = k(1 - e^{-t/\tau})u(t).$$

Por otro lado, se sabe que la respuesta a entrada escalón del sistema discreto,

$$y(kT + T) + \underline{a}y(kT) = \underline{b}u(kT),$$

que tiene un polo en $-\underline{a}$, está dada por,

$$y(kT) = \frac{\underline{b}}{1 + \underline{a}}(1 - (-\underline{a})^k)u(kT),$$

que corresponde al muestreo de la respuesta anterior $y(t)$ en intervalos regulares T , si se cumple que,

$$-\underline{a} = e^{-aT}, \quad \underline{b} = \frac{b}{a}(1 - e^{-aT}),$$

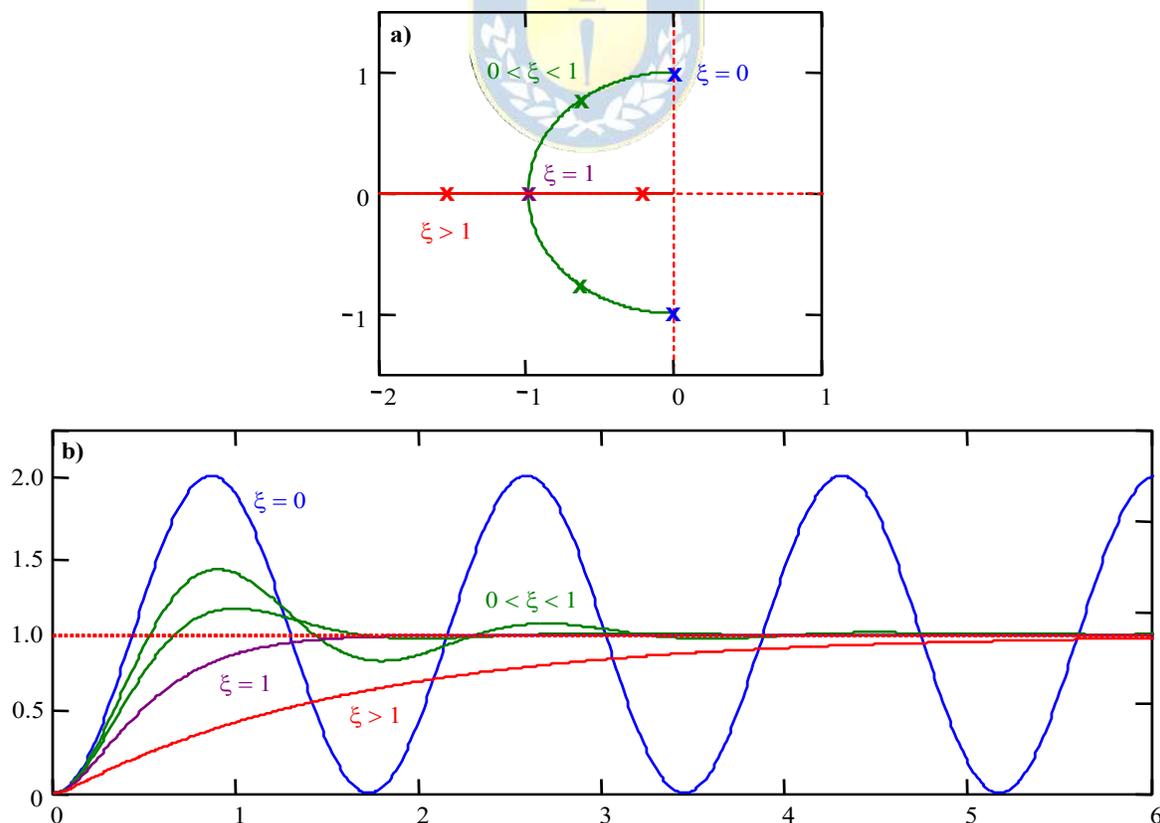


Fig. 5.8 Ubicación de los polos y respuesta a escalón de un sistema de segundo orden en función de ξ ; **a)** ubicación de polos, **b)** respuesta a entrada escalón.

lo que da cuenta de una relación entre los polos y la ganancia dc de los sistemas continuos y discreto. En general, las condiciones necesarias – pero lamentablemente no suficientes – son,

- i) Si el sistema continuo tiene un polo ubicado en s_p , debe existir un polo equivalente en el plano z dado por $z_p = e^{s_p T}$.
- ii) Si el sistema continuo tiene un cero ubicado en s_z , debe existir un cero equivalente en el plano z dado por $z_z = e^{s_z T}$.
- iii) Se debe cumplir la condición de ganancia dc $h(s)|_{s=0} = h(z)|_{z=1}$, o bien, $\frac{h(s)|_{s=0}}{h(z)|_{z=1}} = 1$.

Ejemplo 5.11. Sea un sistema de segundo orden dado por $\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n^2 u(t)$ el cual tiene por F. de T. a

$h(s) = k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, determine un sistema discreto equivalente. **R.:** En este caso los polos son $s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ y $s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$, por lo que el sistema discreto equivalente debe tener polos en $z_1 = e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T}$ y $z_2 = e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T}$. Así una F. de T. discreta candidata en el plano discreto es $h(z) = k_0 \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = k_0 \frac{1}{(z - e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T})(z - e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T})}$. Por otro lado, $h(s)|_{s=0} = k = h(z)|_{z=1} = k_0 \frac{1}{(1 - e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T})(1 - e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T})}$,

por lo que $k_0 = k(1 - e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T})(1 - e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T})$. Finalmente, $h(z) = k \frac{(1 - e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T})(1 - e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T})}{(z - e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T})(z - e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})T})}$. ♣

B. Espacio de estados continuos - Espacio de estados discretos

Sea el sistema continuo dado por,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t),$$

que tiene por estados a,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

si la c.i. es arbitraria en $t = t_0$, entonces,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

si el instante t_0 es kT y el instante t es $kT + T$, entonces,

$$\mathbf{x}(kT + T) = \Phi(kT + T - kT)\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} \Phi(kT + T - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

si la entrada se mantiene constante en el intervalo de integración, entonces,

$$\mathbf{x}(kT + T) = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \left\{ \int_{kT}^{kT+T} \Phi(kT + T - \tau)\mathbf{B}d\tau \right\} \mathbf{u}(kT),$$

sea $kT + T - \tau = T - \sigma$ entonces $d\tau = d\sigma$, $\tau|_{kT}^{kT+T} \rightarrow \sigma|_0^T$, por lo que,

$$\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}(kT) + \left\{ \int_0^T \mathbf{\Phi}(T - \sigma)\mathbf{B}d\sigma \right\} \mathbf{u}(kT),$$

o equivalentemente,

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \left\{ \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\sigma)} \mathbf{B}d\sigma \right\} \mathbf{u}(kT).$$

Luego, para el sistema discreto descrito por las ecuaciones de estado,

$$\mathbf{x}(kT + T) = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}(kT) + \underline{\mathbf{b}}u(kT),$$

se encuentra por inspección que las matrices $\underline{\mathbf{A}}$ y $\underline{\mathbf{b}}$, pueden ser definidas por,

$$\underline{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}T}, \quad \underline{\mathbf{b}} = \left\{ \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\sigma)} \mathbf{B}d\sigma \right\}.$$

Con esto se logra un sistema discreto equivalente al sistema continuo. Se debe tener presente que esta equivalencia es exacta en la medida que $u(t)$ sea constante entre intervalos de muestreo. Esto es válido para toda señal compuesta por escalones que pueden cambiar de amplitud en los instantes de muestreo.

Ejemplo 5.12. Sea un sistema de segundo orden dado por $\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = k\omega_n^2u(t)$ el cual tiene por representación en variables de estado a $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} u$, determine un sistema discreto equivalente. **R.:**

En este caso se obtiene la matriz de transición evaluada en $t = T = 0.25$, con $\xi = 0.274$, $\omega_n = 3.651$, lo que resulta en $\underline{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{\Phi}(T) = \begin{bmatrix} 0.668 & 0.171 \\ -2.275 & 0.327 \end{bmatrix}$. Nótese que la matriz de transición se calcula como $\mathbf{\Phi}(t) = T^{-1} \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\} T$, donde T^{-1} está

compuesta por los vectores propios generados por los valores propios λ_1 y λ_2 . Por otro lado, $\underline{\mathbf{b}} = \left\{ \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\sigma)} \mathbf{b}d\sigma \right\} = \begin{bmatrix} 0.332 \\ 2.275 \end{bmatrix}$

, donde $\underline{\mathbf{A}}$ y $\underline{\mathbf{b}}$ corresponden a los parámetros del modelo discreto $\mathbf{x}(kT + T) = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}(kT) + \underline{\mathbf{b}}u(kT)$, equivalente al continuo. La Fig. 5.9 muestra la simulación del sistema continuo y discreto. Nótese que la F. de T. de este sistema discreto considerando $\underline{\mathbf{c}} = [1 \ 0]$ está dada por $h(z) = \underline{\mathbf{c}}(z\mathbf{I} - \underline{\mathbf{A}})^{-1}\underline{\mathbf{b}} = \frac{0.331936z + 0.279732985005}{z^2 - 0.994681z + 0.606529985005}$ que tiene un cero que no está en la F. de T. del

ejemplo anterior. ♣

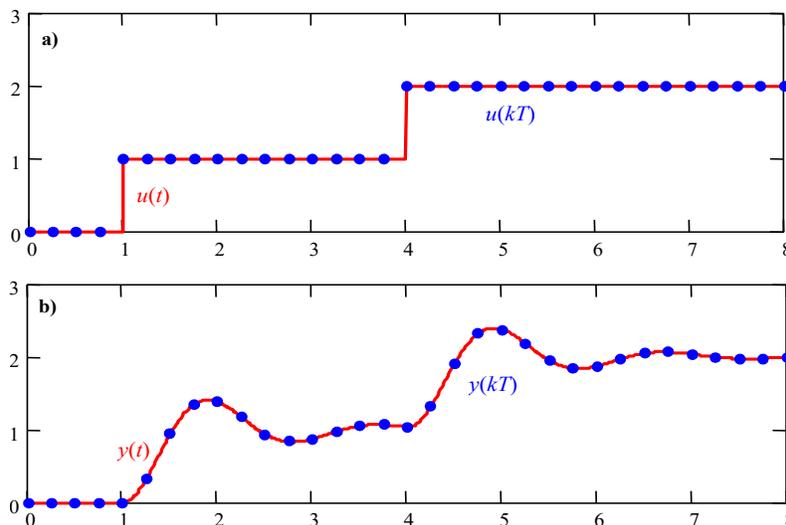


Fig. 5.9 Respuesta de un sistema de segundo orden continuo y discreto ante entrada de escalones; **a)** entradas, **b)** salidas.

Ejemplo 5.13. Discretizar el modelo del levitador magnético mostrado en la Fig. 5.3. Ensaye el modelo continuo ante entrada rampa y rampa con muestreador-S/H, compare los resultados con lo obtenido del modelo discreto con entrada rampa discreta.

R.: El modelo linealizado con $\Delta x_1 = \Delta i$, $\Delta x_2 = \Delta x$, $\Delta x_3 = d\Delta x/dt$ y $\Delta u = \Delta e$ está dado por las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2\frac{k_i}{m} \frac{i_o}{l_l - x_o + a} & \frac{k_i}{m} \frac{i_o^2}{(l_l - x_o + a)^2} - \frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [0 \ 1 \ 0], d = 0.$$

Dado que $\underline{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}T}$, $\underline{\mathbf{b}} = \left\{ \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\sigma)} \mathbf{b} d\sigma \right\}$ las

matrices resultantes son para $t = T = 0.25$, $\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 6.738 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 5.485 \cdot 10^{-3} & 0.166 & 0.071 \\ -6.589 \cdot 10^{-3} & -3.77 & -0.257 \end{bmatrix}$ y $\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0.993 \\ 0.017 \\ 0.110 \end{bmatrix}$ donde $\underline{\mathbf{A}}$ y $\underline{\mathbf{b}}$ corresponden a

los parámetros del modelo discreto $\Delta \mathbf{x}(kT + T) = \underline{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{x}(kT) + \underline{\mathbf{b}} \Delta u(kT)$. La Fig. 5.10 muestra la simulación del sistema continuo con una entrada rampa y del sistema discreto con una rampa discreta que corresponde a la rampa continua muestreada. La simulación discreta no corresponde al caso continuo. Sin embargo, la Fig. 5.11 muestra la simulación del sistema continuo con una entrada rampa, pero muestreada y luego retenida con un retentor de primer orden y del sistema discreto con una rampa discreta que corresponde a la rampa continua muestreada. La simulación discreta ahora si corresponde al caso continuo. Estos resultados confirman que el equivalente discreto como revisado en estos apuntes representa fielmente al caso continuo en la medida que la entrada utilizada en el modelo continuo sea constante durante los instantes de muestreo. ♣

5.7 Ejercicios Propuestos.

Resuelva los problemas siguientes. Anote todo su trabajo.

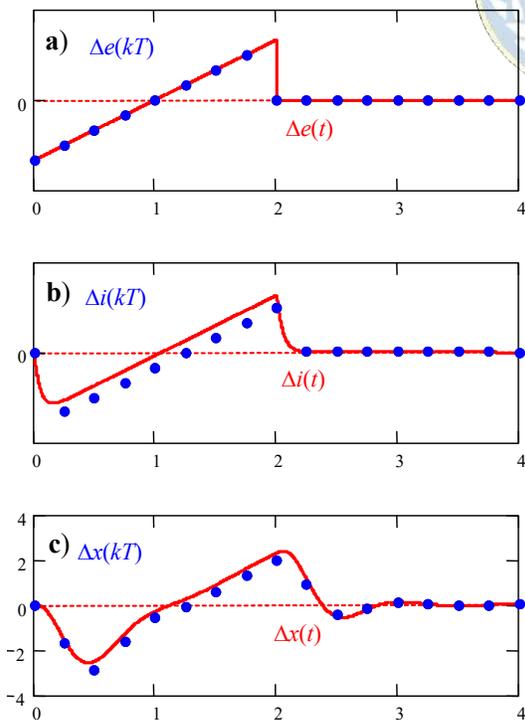


Fig. 5.10 Discretización del modelo lineal del levitador; a) entrada, b) corriente, c) posición.

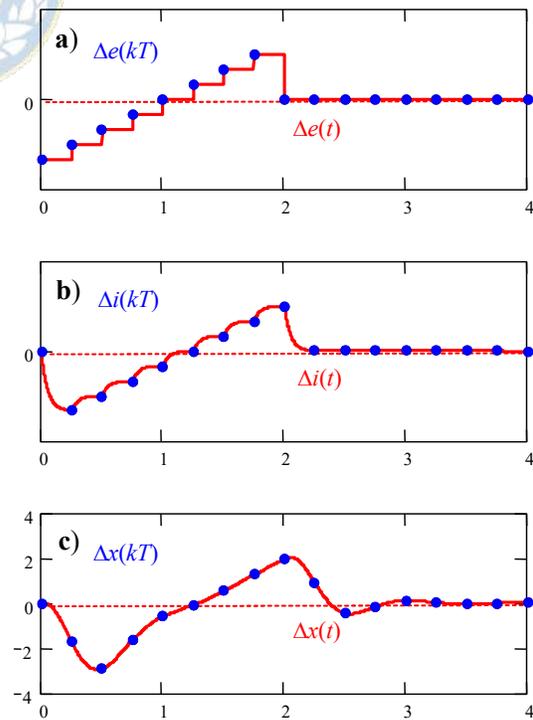


Fig. 5.11 Discretización del modelo lineal del levitador; a) entrada, b) corriente, c) posición..

A. Nivel básico.

1.- Determine la F. de T. de las siguientes ecuaciones.

(a)
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = u(t)$$

(b)
$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) + 10$$

(c)
$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

(d)
$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t)$$

(e)
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3y(t) = u(t-1)$$

(f)
$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t-1)$$

(g)
$$y(kT+T) + a_0 y(kT) = 0$$

(h)
$$y(kT+T) + 0.5y(kT) = u(kT)$$

(i)
$$y(kT+T) + 1.5y(kT) = u(kT)$$

(j)
$$y(kT+2T) + 1.5y(kT) = u(kT)$$

(k)
$$y(kT+2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT+T)$$

(l)
$$y(kT+2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT+T) + u(kT)$$

2.- Determine los polos y ceros de las ecuaciones anteriores.

3.- Determine una representación en variables de estado de las ecuaciones anteriores.

4.- Determine la F. de T. de las siguientes ecuaciones.

(a)
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [4 \quad 10] \mathbf{x}(t)$$

(b)
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t) + u(t)$$

(c)
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(t) + u(t)$$

(d)
$$\mathbf{x}(kT+T) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(kT)$$

(e)
$$\mathbf{x}(kT+T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT)$$

(f)
$$\mathbf{x}(kT+T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT) + u(kT)$$

5.- Determine los polos y ceros de las ecuaciones anteriores.

B. Nivel intermedio.

1.- Determine los valores propios de la matriz **A** de las siguientes ecuaciones,

(a)
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [4 \quad 10] \mathbf{x}(t)$$

(b)
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t) + u(t)$$

(c)
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(t) + u(t)$$

(d)
$$\mathbf{x}(kT+T) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(kT)$$

$$(e) \quad \mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT)$$

$$(f) \quad \mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT) + u(kT)$$

2.- Compare los valores propios obtenidos anteriormente con los polos de la F. de T. correspondiente.

3.- Determine una ecuación de diferencias discreta equivalente a la continua. Utilice $T = 1$.

$$(a) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = u(t)$$

$$(b) \quad \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) + 10$$

$$(c) \quad \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$(d) \quad \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t)$$

$$(e) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3y(t) = u(t-1)$$

$$(f) \quad \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t-1)$$

4.- Determine un las ecuaciones de diferencias equivalentes a las siguientes ecuaciones diferenciales. Utilice $T = 1$.

$$(a) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [4 \quad 10] \mathbf{x}(t)$$

$$(b) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t) + u(t)$$

$$(c) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(t) + u(t)$$

5.- Obtenga una ecuación diferencial equivalente a la ecuación discreta.

$$(a) \quad y(kT + T) + a_0 y(kT) = 0$$

$$(b) \quad y(kT + T) + 0.5y(kT) = u(kT)$$

$$(c) \quad y(kT + T) + 1.5y(kT) = u(kT)$$

$$(d) \quad y(kT + 2T) + 1.5y(kT) = u(kT)$$

$$(e) \quad y(kT + 2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT + T)$$

$$(f) \quad y(kT + 2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT + T) + u(kT)$$

6.- Obtenga las ecuaciones diferenciales equivalentes a las ecuaciones de diferencias.

$$(a) \quad \mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(kT)$$

$$(b) \quad \mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT)$$

$$(c) \quad \mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT) + u(kT)$$

C. Nivel avanzado.

1.- En estos apuntes se muestra un método para encontrar un set de ecuaciones de diferencias equivalente a un set de ecuaciones diferenciales. Para lo cual se asume que la entrada al sistema continuo está compuesta por escalones que no cambian entre muestreo. Determine un procedimiento para el caso de tener una entrada impulso. Es decir que la respuesta a impulso del sistema discreto encontrado sea el muestreo de la respuesta a impulso del sistema continuo. El sistema resultante se dice **impulso invariante**.

2.- Para un sistema continuo dado por $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d\}$ que tiene F. de T. dada por $h(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d$ se define el sistema inverso a uno $\{\mathbf{A}_{inv}, \mathbf{b}_{inv}, \mathbf{c}_{inv}, d_{inv}\}$ tal que su F. de T. es $h_{inv}(s) = 1/h(s)$. Encuentre los parámetros \mathbf{A}_{inv} , \mathbf{b}_{inv} , \mathbf{c}_{inv} , y d_{inv} de este nuevo sistema.

3.- Aprovechar el resultado anterior para demostrar que los ceros de $h(s)$ son los valores propios de la matriz dada por $\mathbf{A} - \mathbf{b}d^{-1}\mathbf{c}$.

4.- Se sabe que $\underline{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}T}$ y que $\underline{\mathbf{b}} = \left\{ \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\sigma)} \mathbf{b} d\sigma \right\}$, lo que implica que las matrices buscadas se

obtienen a partir de dos cálculos. Muestre que si se define la matriz $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$, entonces

$e^{\mathbf{M}T} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$, lo que permite obtener en un cálculo ambas matrices.



6 Análisis en Frecuencia

Una ventaja del enfoque de la respuesta en frecuencia es su aplicabilidad experimental. En efecto, las pruebas en frecuencia son, en general, sencillas y pueden ser muy precisas con el uso de generadores de señales sinusoidales y un equipo de medición (osciloscopio). Como resultado, se puede obtener la F. de T. y/o M. de T. de sistemas en forma experimental independiente de la complejidad de éste. Además, este enfoque suele ser una poderosa herramienta en la etapa de diseño de sistemas, en particular, de su control.

6.1 Introducción

Hasta ahora todo el análisis se ha referido a S.L.I. en que la entrada no es una señal periódica. Ahora quedan interrogantes tales como, ¿ qué señal aparece en la salida si se utiliza una entrada sinusoidal ?. Por ejemplo, en el caso de tener un sistema con una F. de T. dada por $h(s) = 1/(s + a)$, para una entrada sinusoidal $u(t) = A\sin(\omega t)$ se tiene que la salida es,

$$y(s) = \mathcal{L}(u(t))h(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{s + a},$$

por lo que la respuesta en el tiempo es,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{s + a} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ A \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{1}{s + a} - A \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{s - a}{s^2 + \omega^2} \right\} \\ &= A \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at} - A \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \left\{ \cos(\omega t) - \frac{a}{\omega} \sin(\omega t) \right\} \\ &= \underbrace{A \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at}}_{\text{transiente}} + \underbrace{A \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin \left\{ \omega t - \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \right\}}_{\text{estacionaria}} \end{aligned}$$

Se aprecia que la parte estacionaria de la salida es también una señal sinusoidal, pero de amplitud y fase modificadas – respecto de la entrada – de acuerdo a su F. de T.. Es decir, bastaría conocer la F. de T. del sistema para predecir correctamente la amplitud y fase de la salida. Por otro lado, una señal periódica arbitraria puede ser descompuesta en una sumatoria de señales sinusoidales; por lo tanto, la salida de un S.L.I. a estas entradas será la sumatoria de la respuesta a cada sinusoidal, lo que puede ser abordado con el análisis en frecuencia.

La salida del sistema mostrado en la Fig. 6.1 se puede escribir como,

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau,$$

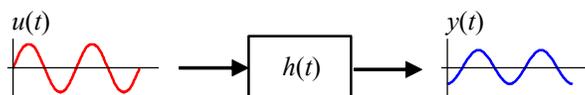


Fig. 6.1 Sistema S.L.I..

donde $h(t)$ es la respuesta a impulso del S.L.I.. Considerando la entrada como $u(t) = e^{j\omega t}$, que corresponde a la base de generación de señales periódicas, en particular sinusoidales, se tiene que,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

donde el término integral corresponde a la T.F. de la respuesta a impulso del sistema; es decir,

$$h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

luego, la señal de salida queda como,

$$y(t) = h(\omega) e^{j\omega t},$$

donde se ve claramente que la señal periódica de entrada, $e^{j\omega t}$, se ve reflejada en la salida como una señal de igual frecuencia a la señal de entrada, pero atenuada/amplificada y adelantada/retrasada en el factor $h(\omega)$. Nótese que $h(\omega)$ es una propiedad del sistema y es un número complejo, el cual se puede representar en un plano complejo o en módulo y ángulo. Recordar que para obtener la T.F. de una señal se puede reemplazar s por $j\omega$ en su T.L. bilateral.

Ejemplo 6.1. Para las siguientes F. de T. determinar el módulo y la fase en función de la frecuencia de su T.F.. **(a)** $h(s) = 1/(s+a)$, en este caso $h(\omega) = 1/(j\omega+a)$, por lo que $|h(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2}}$ y $\arg(h(\omega)) = -\tan^{-1}\{\omega/a\}$. **(b)** $h(s) = 1/s$, en este caso $h(\omega) = 1/(j\omega)$, por lo que $|h(\omega)| = 1/\omega$ y $\arg(h(\omega)) = -90^\circ$. La Fig. 6.2 muestra la respuesta en S.S. para dos entradas a un sistema integrador. Claramente, la salida está siempre retrasada 90° y la amplitud es menor a altas frecuencias. ♣

6.2 Diagrama de Bode

El Diagrama de Bode es la gráfica de la T.F. de un sistema como se aprecia de la definición siguiente.

Def.: El **Diagrama de Bode** (D. de B.) es el gráfico del módulo, en dB, y la fase, en grados, de una F.

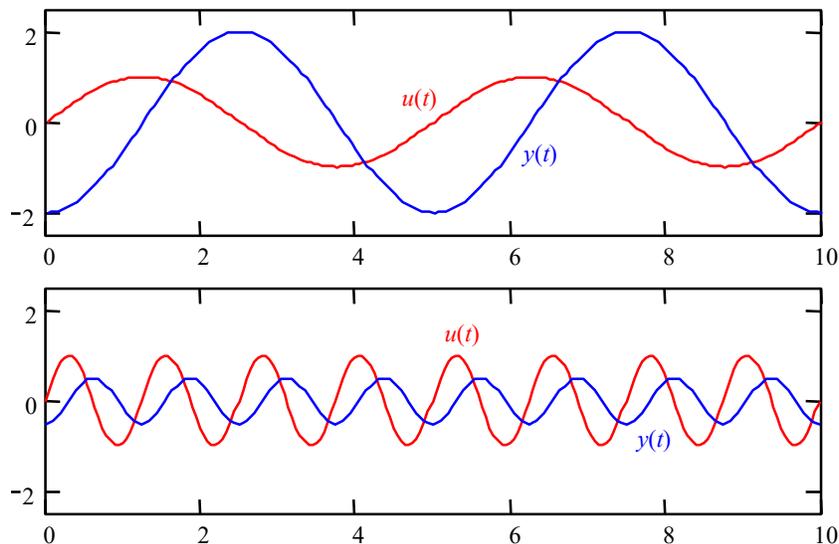


Fig. 6.2 Respuesta de un sistema integrador para dos entradas de igual amplitud.

de T. con $s = j\omega$ en función de la frecuencia en base logarítmica.

Una ventaja de utilizar el D. de B. en el análisis de sistemas lineales, es que la multiplicación entre F. de T. se transforma en adición de magnitudes y fases, de los Bode respectivos. Esto debido a que se consideran dBs.

Ejemplo 6.2. Dibujar el D. de B. para la F. de T. **(a)** $h(s) = 1/s$, en este caso $h(\omega) = 1/(j\omega)$, por lo que $|h(\omega)| = 1/\omega$ y $\arg(h(\omega)) = -90^\circ$. Así el módulo del D. de B. está determinado por $20\log\{|h(\omega)|\} = 20\log\{1/\omega\} = -20\log\{\omega\}$, **(b)** $h(s) = 1/(s + a)$, en este caso $h(\omega) = 1/(j\omega + a)$, por lo que $|h(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$ y $\arg(h(\omega)) = -\tan^{-1}\{\omega/a\}$. Así el módulo del D. de B. está determinado por $20\log\{|h(\omega)|\} = 20\log\left\{\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}\right\} = -20\log\{\sqrt{\omega^2 + a^2}\} = -10\log\{\omega^2 + a^2\}$. Ambos se grafican en la Fig. 6.3. ♣

Nótese que el eje de la frecuencia está dividido en décadas y se puede apreciar que el sistema dado por $h(s) = 1/s$ (Fig. 6.3) tiene una magnitud tal que cae 20 dB por cada década.

A . Sistemas de Primer Orden

En el caso de tener un sistema con una F.de T. dada por $h(s) = 1/(s + a)$, para una entrada sinusoidal $u(t) = A\sin(\omega t)$ se encontró que la salida es,

$$y(t) = \underbrace{A \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at}}_{transiente} + \underbrace{A \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin\left\{\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega}{a}\right\}}_{estacionaria}$$

Analizando el módulo y la fase de la respuesta estacionaria del sistema se tiene que,

- i) si la señal de entrada es de baja frecuencia, $\omega \ll a$, la salida se atenúa en $-20\log\{a\}$ dB y se retrasa en 0° ,

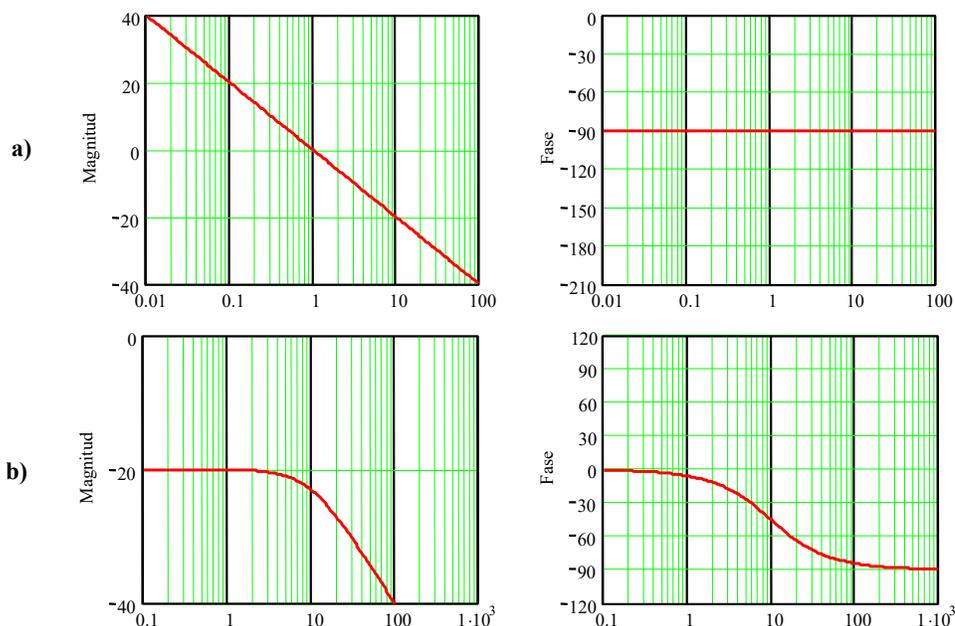


Fig. 6.3 D. de B. de; a) $1/s$, b) $1/(s + a)$ con $a = 10$.

- ii) si la señal de entrada es de alta frecuencia, $\omega \gg a$, la salida se atenúa en $-20\log\{\omega\}$ dB y se retrasa en 90° ,
- iii) si la señal de entrada es de frecuencia $\omega = a$, la salida se atenúa en $20\log\{1/(a\sqrt{2})\}$ dB que es igual a $-20\log\{a\} - 10\log\{2\}$ dB = $-20\log\{a\} - 3.01$ dB y se retrasa en 45° .

El análisis anterior también puede derivarse del D. de B. del sistema, que se encuentra en la Fig. 6.3, para $a = 10$ (nótese que a es el polo del sistema). Es decir, teniendo el D. de B. de un sistema se puede predecir la atenuación/amplificación y/o el retraso/adelanto que se producirá a la salida de un S.L.I. para una entrada sinusoidal en S.S.. Asimismo, dado que una señal periódica es la suma de un conjunto de sinusoidales, con la ayuda del D. de B. se podrá predecir la salida para señales periódicas generales. Nótese también que el sistema tiene una magnitud que cae 20 dB por década a partir de frecuencias superiores a a , lo que es idéntico al caso de la F. de T. dada por $h(s) = 1/s$. Esto se fundamenta en que la F. de T. dada por $h(s) = 1/(s + a)$ tiene una T.F. dada por $h(\omega) = 1/(j\omega + a)$, por lo que para valores muy grandes de ω , el número complejo $j\omega + a$ tiende a $j\omega$ por lo que $h(\omega)$ tiende más bien a $1/j\omega$, que corresponde a la T.F. de la F. de T. dada por $h(s) = 1/s$.

Ejemplo 6.3. Dibujar el D. de B. para la F. de T. $h(s) = \frac{1}{s(s+a)}$, en este caso $h(\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+a)}$, por lo que $|h(\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+a^2}}$ y $\arg(h(\omega)) = -90^\circ - \tan^{-1}\{\omega/a\}$. Así el módulo del D. de B. está dado por $20\log\{|h(\omega)|\} = 20\log\left\{\frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+a^2}}\right\} = -20\log\{\omega\} - 10\log(\omega^2+a^2)$. El(la) módulo(fase) del D. de B. resultante es sin duda la suma de los(las) módulos(fases) ilustrados en la Fig. 6.3. ♣

El ejemplo anterior deja en evidencia que el D. de B. de una F. de T. puede dibujarse por parte. Es decir, para cada polo y luego para cada cero, el D. de B. resultante es simplemente la suma de cada uno de ellos.

B. Sistemas de Segundo Orden

El desafío es dibujar el D. de B. de un sistema de segundo orden, cuyo polinomio característico no puede reducirse al producto de dos raíces reales. En este caso la F. de T. a considerar es,

$$h(s) = k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Si $\xi > 1$, el factor cuadrático se puede expresar como el producto de dos factores de primer orden con polos reales y se utilizan las reglas de construcción anteriores. Si este parámetro toma valores $0 < \xi < 1$, el factor cuadrático no se puede reducir y se procede como explicado a continuación. Al dividir la expresión por ω_n^2 , se obtiene,

$$h(s) = k \frac{1}{(s/\omega_n)^2 + 2\xi(s/\omega_n) + 1}.$$

Por lo que su T. de F. es,

$$h(\omega) = k \frac{1}{(j\omega/\omega_n)^2 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + 1} = k \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j2\xi(\omega/\omega_n)}.$$

El módulo del D. de B. resulta ser,

$$|h(\omega)| = k \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2}},$$

y la fase del D. de B. es,

$$\arg \{h(\omega)\} = -\tan^{-1} \left\{ \frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right\}.$$

El D. de B. para varias combinaciones de parámetros se muestran en la Fig. 6.4, todos los cuales tienen una ganancia fija para bajas frecuencias y caen en 40 dB por década para altas frecuencias, siendo esta frecuencia umbral α en el sistema de primer orden (su polo) y ω_n en el sistema de segundo orden (su frecuencia natural de oscilación).

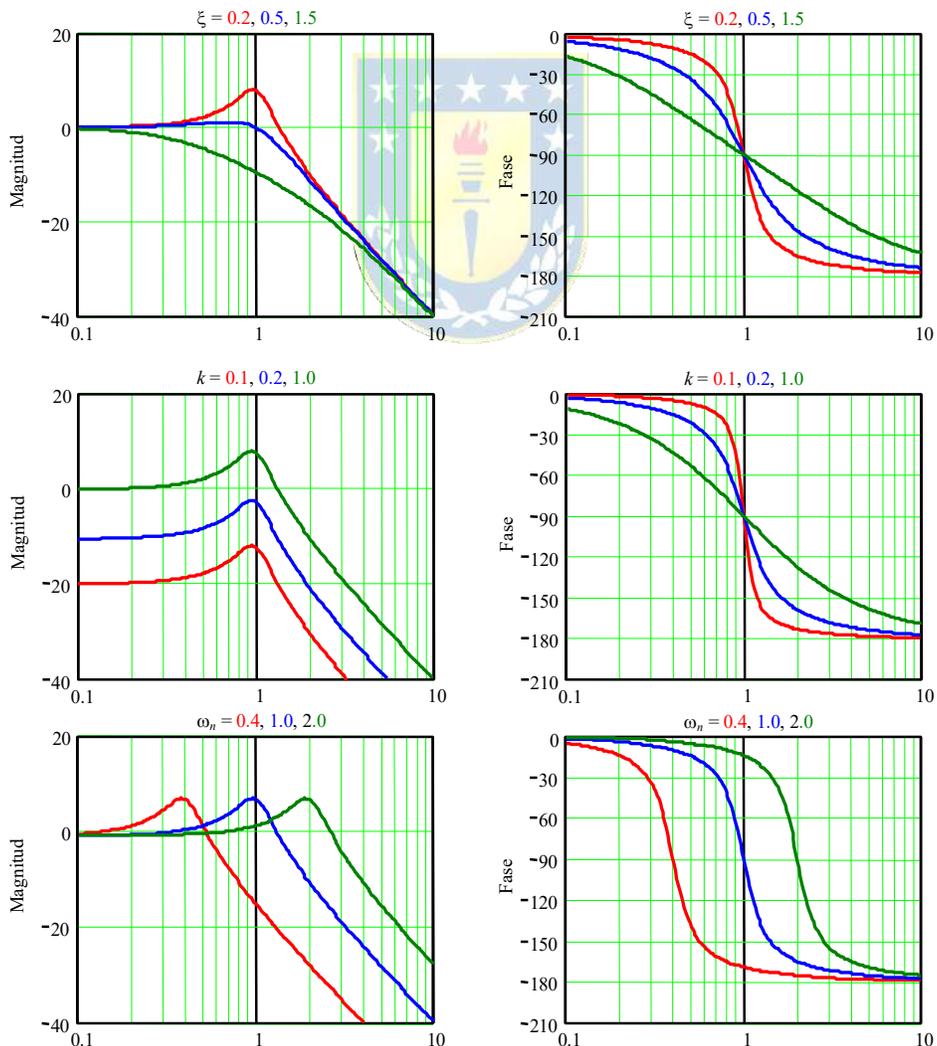


Fig. 6.4 D. de B. de un sistema de segundo orden estándar.

Ejemplo 6.4. Para el sistema mostrado en la Fig. 6.5(a), obtenga el D. de B. de sus F. de T.. **R.:** El modelo indica que la

relación para la velocidad es, $\omega(s) = \frac{k_m}{J_l L} \frac{1}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l} \right] s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}} v_a(s) + \frac{-1}{J_l} \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l} \right] s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}} t_l(s)$ y para la

corriente es, $i_a(s) = \frac{1}{L} \frac{s + \frac{d}{J_l}}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l} \right] s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}} v_a(s) + \frac{k_m}{J_l L} \frac{1}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l} \right] s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}} t_l(s)$.

En resumen, se pueden distinguir cuatro F. de T.s., de acuerdo a $\omega(s) = h_{\omega v a}(s)v_a(s) + h_{\omega t l}(s)t_l(s)$, $i_a(s) = h_{i a v a}(s)v_a(s) + h_{i a t l}(s)t_l(s)$. Así el cero asociado a $h_{\omega t l}(s)$ está dado por $-R/L = -24$ y el asociado $h_{i a v a}(s)$ está dado por $-d/J = -0.593$. Los polos son únicos

y están dados por las raíces de $s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l} \right] s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}$, que resultan ser -3.151 y -21.442.



El D. de B. de $h_{\omega va}(s)$ indica que frecuencias existentes en v_a mayores a 10 rad/s no tienen mayor efecto en ω , el D. de B. de $h_{\omega il}(s)$ indica un comportamiento de primer orden y el D. de B. de $h_{iava}(s)$ indica una resonancia en 10 rad/s. ♣

En los D. de B. anteriores es posible apreciar que los comportamientos asintóticos son fáciles de distinguir. Por ejemplo, sistemas de primer orden caen en 20 dB y los de segundo en 40 dB, después de la frecuencia característica de éstos. Este comportamiento asintótico se puede generalizar como descrito a continuación, lo que permite construir un D. de B. aproximado pero en forma rápida, que es conocido como el D. de B. Asintótico.

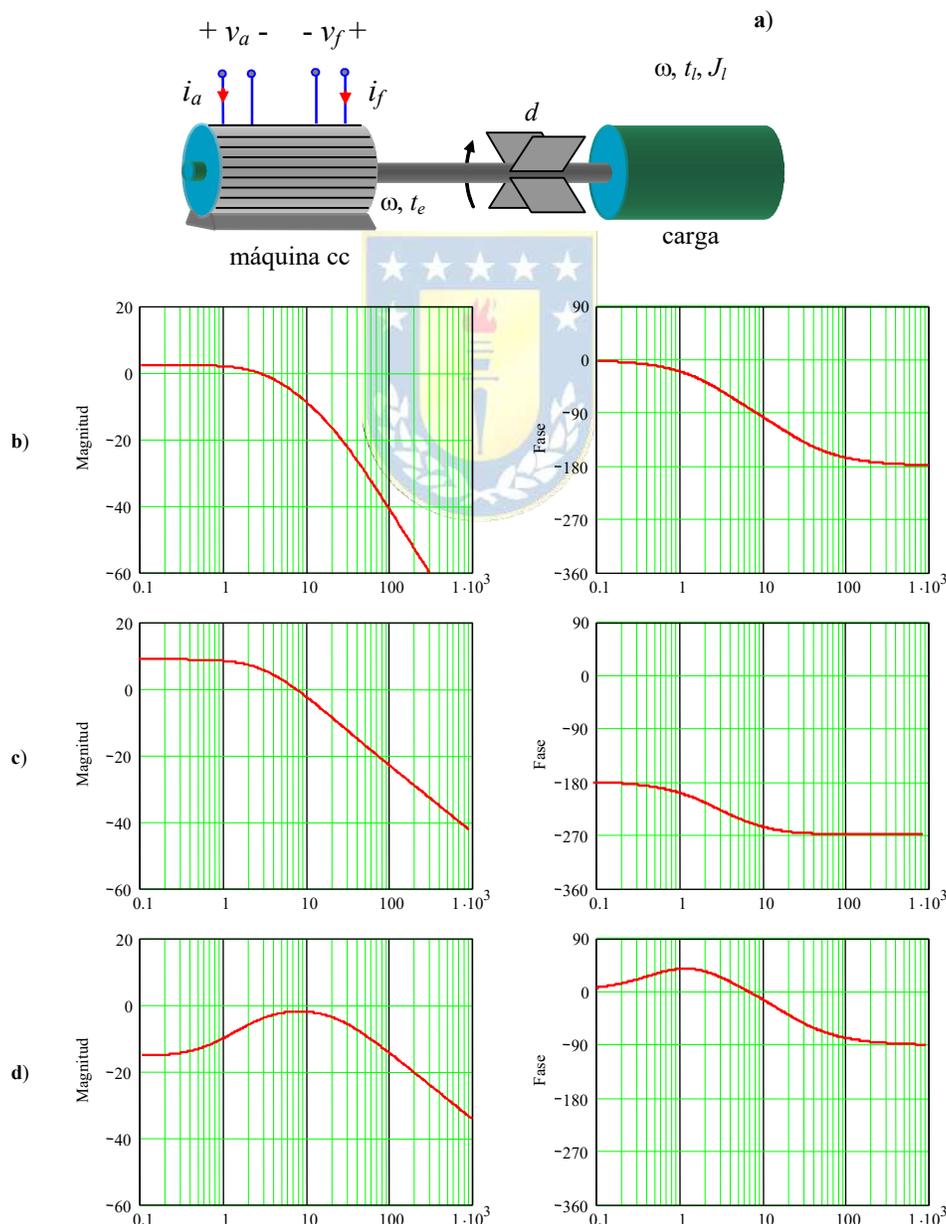


Fig. 6.5 D. de B. de las F. de T. de la máquina c.c.; a) esquema, b) $h_{\omega va}(s)$, $h_{i at}(s)$, c) $h_{\omega il}(s)$, d) $h_{iava}(s)$.

6.3 Diagrama de Bode Asintótico

En general una década antes y una después de la frecuencia del polo se pueden utilizar los valores asintóticos. A continuación, se enuncian las reglas para la construcción del D. de B. asintótico para sistemas mínimos de fase. Para la introducción de reglas de construcción se definen los sistemas tipo N .

Def.: Se definen los **sistemas Tipo N** como aquellos que tienen un polo de orden N en el origen y sistemas de Tipo $-N$ a aquellos que tienen un cero de orden N en el origen.

A. Parte inicial del D. de B.

Sistema Tipo 0. Por ejemplo, $h(s) = \frac{1}{s+a}$,

- el módulo es $20\log\{h(0)\}$ dB que es una recta horizontal,
- la fase es 0° que es una recta horizontal.

Sistema Tipo N . Por ejemplo, $h(s) = \frac{1}{s^N}$,

- el módulo es $-20N$ dB/dec que es una recta con pendiente negativa,
- la fase es $-90^\circ N$ que es una recta horizontal.

Sistema Tipo $-N$. Por ejemplo, $h(s) = s^N$,

- el módulo es $20N$ dB/dec que es una recta con pendiente positiva,
- la fase es $90^\circ N$ que es una recta horizontal.



B. Modificación en polos y ceros a medida que ω aumenta

Un polo de orden r . Por ejemplo, $h(s) = \frac{1}{(s+a)^r}$,

- el módulo baja en $20r$ dB/dec a partir de $\omega = a$,
- la fase baja en $90^\circ r$ a partir de $\omega = a$.

Un cero de orden r . Por ejemplo, $h(s) = (s+a)^r$,

- el módulo sube en $20r$ dB/dec a partir de $\omega = a$,
- la fase sube en $90^\circ r$ a partir de $\omega = a$.

C. Polos y ceros complejos

Un polo complejo. Por ejemplo, $h(s) = \frac{1}{(s/\omega_n)^2 + 2\xi(s/\omega_n) + 1}$,

- el módulo baja en 40 dB/dec a partir de $\omega = \omega_n$,
- la fase baja en 180° a partir de $\omega = \omega_n$.

Un cero complejo. Por ejemplo, $h(s) = (s/\omega_n)^2 + 2\xi(s/\omega_n) + 1$,

- el módulo sube en 40 dB/dec a partir de $\omega = \omega_n$,
- la fase sube en 180° a partir de $\omega = \omega_n$.

D. Corrección a la magnitud

El D. de B. asintótico hasta aquí descrito resulta en rectas bien definidas. Sin embargo, se sabe que las curvas son suaves. Una forma de corregirlo es mejorando la aproximación en las frecuencias de los polos y/o ceros. En efecto, si hay un polo(cero) de orden r en una frecuencia ω_p , en esta frecuencia se agregan $-3r(3r)$ dB a la curva de magnitud.

Ejemplo 6.5. Dibujar el D. de B. de (a) $h(s) = \frac{1}{s+10}$, parte inicial, sistema tipo 0, $20\log\{h(0)\} = -20$ dB, fase 0° ;

modificación, polo en $\omega = 10$ de orden 1, cae con 20 dB/dec., fase cae a -90° ; (b) $h(s) = k \frac{s+1}{s+10} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, con $k = 10$,

$\omega_n = 1000$, y $\xi = 0.2$. Dado que el polinomio cuadrático tiene $0 < \xi < 1$ tiene raíces complejas. Parte inicial, sistema tipo 0, $20\log\{h(0)\} = 0$ db, fase 0° ; cero en $\omega = 1$ de orden 1, magnitud sube con 20 dB/dec., fase sube 90° , polo en $\omega = 10$ de orden 1, magnitud cae con 20 dB/dec., fase cae 90° , polo imaginario en $\omega = 1000$ de orden 1, magnitud cae con 40 dB/dec., fase cae 180° . La Fig. 6.6 muestra el D. de B. asintótico y el exacto. (c) $h(s) = 1/(s - 10)$, este es un caso de fase no mínima y por lo tanto no se pueden aplicar las reglas para un D. de B. asintótico. ♣

Ejemplo 6.6. Para el motor c.c. Fig. 6.5(a), dibujar el D. de B. asintótico de sus F. de T. **R.:** Los D. de B. son dibujados

computacionalmente. Para facilitar el dibujo se toma una F. de T. como $h_{iava}(s) = \frac{1}{L} \frac{s + \frac{d}{J_l}}{s^2 + \left[\frac{R}{L} + \frac{d}{J_l}\right]s + \frac{k_m^2 + dR}{J_l L}}$ y se escribe

como $h_{iava}(s) = k \frac{s + z_1}{(s + p_1)(s + p_2)}$, luego se dibuja el D. de B. asintótico de cada componente de $h_{iava}(s)$. El resultado se muestra en Fig. 6.7. ♣

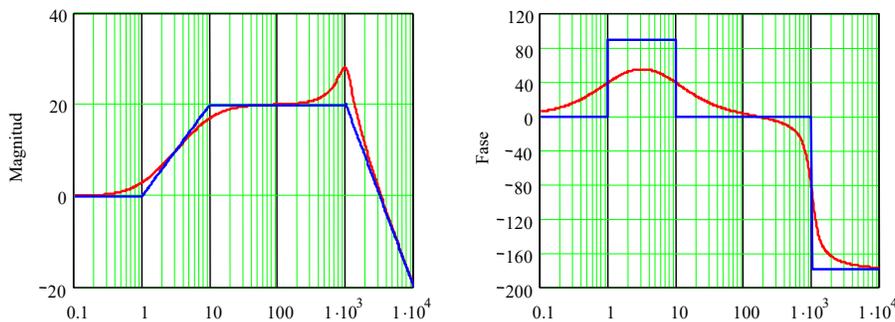


Fig. 6.6 D. de B. asintótico y exacto de $k \frac{s+1}{s+10} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, con $k = 10$, $\omega_n = 1000$, y $\xi = 0.2$.

6.4 Sistemas con Retardo

El retardo tiene el comportamiento equivalente a un sistema de fase no-mínima, aportando un retraso excesivo a altas frecuencias. La T.L. de un retardo t_d es,

$$e^{-t_d s},$$

por lo que la T.F. es,

$$e^{-t_d j\omega} = e^{-j\omega t_d} = \cos(\omega t_d) - j \sin(\omega t_d).$$

Por lo tanto, el módulo es unitario y la fase,

$$\arg\{\cos(\omega t_d) - j \sin(\omega t_d)\} = \tan^{-1}\left\{-\frac{\sin(\omega t_d)}{\cos(\omega t_d)}\right\} = -\omega t_d.$$

Por consiguiente, el retardo en un sistema sólo altera la característica de fase de su D. de B..

Ejemplo 6.7. Dibujar el D. de B. de $h(s) = \frac{1}{s+10} e^{-t_d s}$, para varios valores de t_d . En este caso el módulo se puede obtener como; parte inicial, sistema tipo 0, $20\log\{h(0)\} = -20$ dB, fase 0° ; modificación, polo en $\omega = 10$ de orden 1, cae con 20

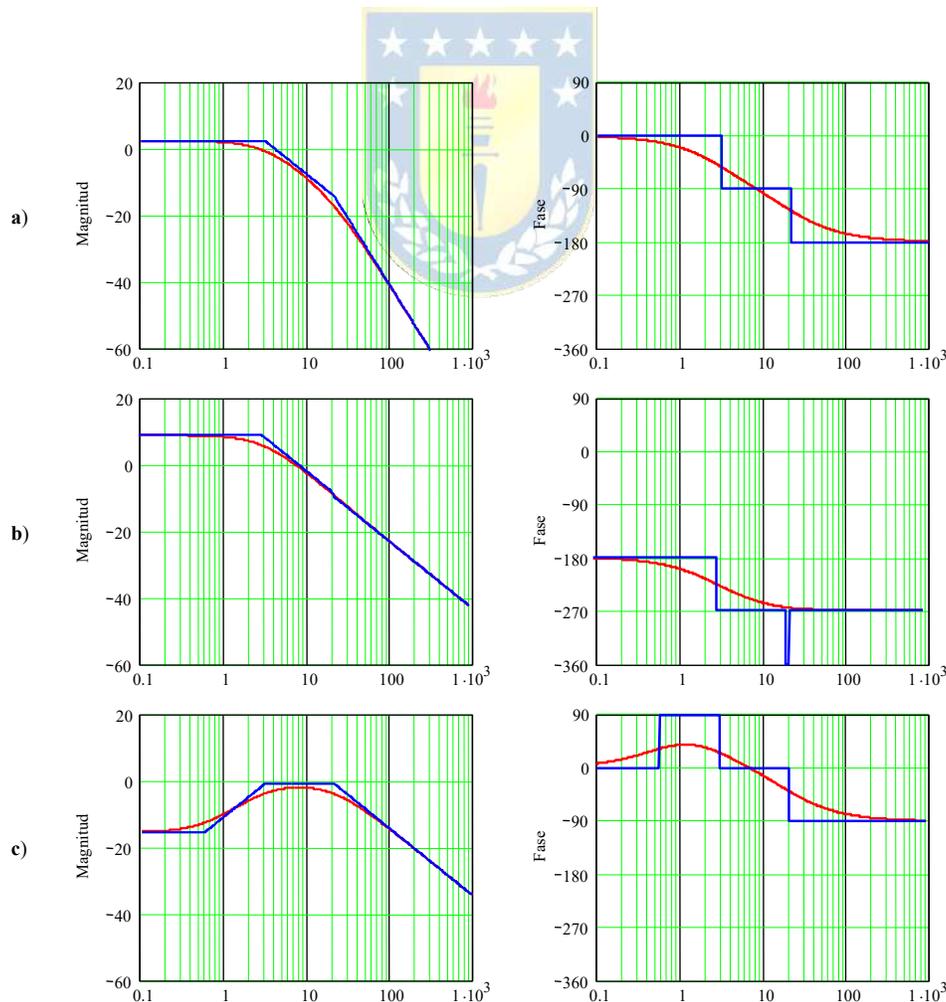


Fig. 6.7 D. de B. exactos y asintóticos de las F. de T. de la máquina c.c.; **a)** $h_{ova}(s)$, $h_{mil}(s)$, **b)** $h_{out}(s)$, **c)** $h_{iva}(s)$.

dB/dec., la fase cae a -90° ; modificación por retardo, la fase cae en ωt_d . La Fig. 6.8 muestra el D. de B. exacto para varios retardos. Consecuentemente, sólo la fase es afectada. ♣

6.5 Sistemas de Fase No-Mínima

Los sistemas de fase no mínima son los que tienen ceros y/o polos en el S.P.D.. Para estos casos el D. de B. también representa una alternativa de análisis en el dominio de la frecuencia. Lamentablemente, se encuentra que distintos sistemas tienen igual módulo en el D. de B. y por lo tanto esta información es insuficiente para su análisis y por lo tanto debe utilizarse la información contenida en la fase.

La evaluación de la fase de sistemas de fase no-mínima por medio de softwares tradicionales debe realizarse cuidadosamente, puesto que pueden utilizar funciones trigonométricas con argumentos principales, lo que puede incurrir en errores. Por ejemplo, la evaluación de la fase de $1 - j$ y de $-1 + j$ es $\tan^{-1}\{-1/1\}$ y $\tan^{-1}\{1/-1\}$, respectivamente, y resulta ser en ambos casos -45° si se utiliza la función $\tan^{-1}\{\}$ sólo con argumento principal. Sin embargo, $-1 + j$ se encuentra en el segundo cuadrante y por lo tanto su fase es -225° ó 135° , según la convención de medición de ángulos, pero no es -45° (en este curso

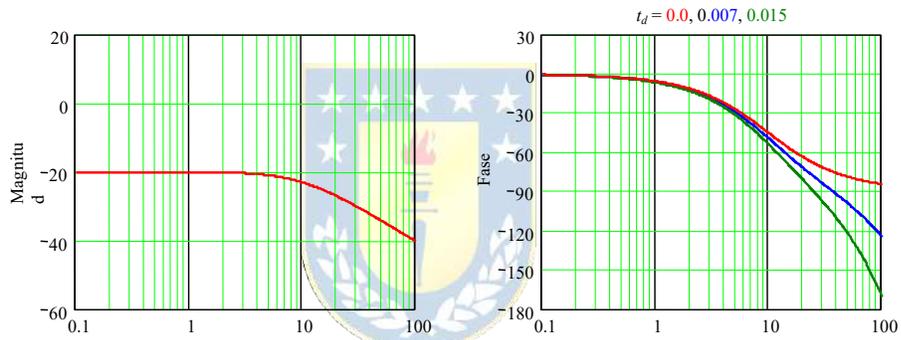


Fig. 6.8 D. de B. exacto de $\frac{1}{s+10} e^{-t_d s}$, para varios valores de t_d .

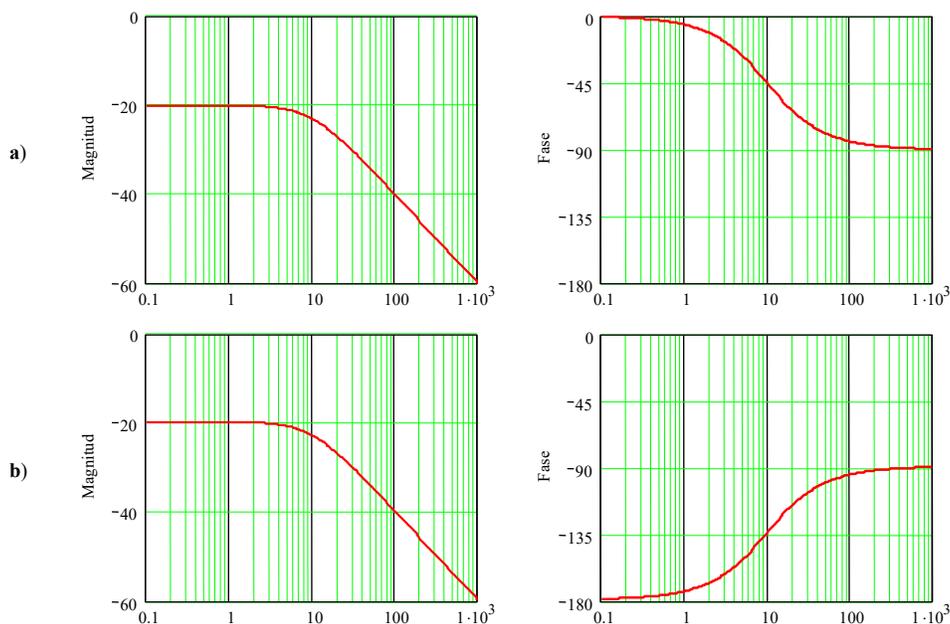


Fig. 6.9 D. de B. de sistemas no-mínimos de fase; a) $1/(s + 10)$, b) $1/(s - 10)$.

se prefiere 135°). En general, se miden en sentido antihorario(horario) los ángulos en el primer(tercer) y segundo(cuarto) cuadrante.

Ejemplo 6.8. Dibujar el D. de B. de $h_1(s) = \frac{1}{s+10}$ y de $h_2(s) = \frac{1}{s-10}$. **R.:** Al tomar $s = j\omega$, se encuentra que $h_1(\omega) = \frac{1}{j\omega+10}$ y $h_2(\omega) = \frac{1}{j\omega-10}$. Por lo tanto, los módulos son $|h_1(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+10^2}}$ y $|h_2(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+10^2}}$, los que son iguales. Sin embargo, al tomar la fase de cada uno se tiene que $\arg\{h_1(\omega)\} = 0 - \tan^{-1}(\omega/10) = -\tan^{-1}(\omega/10)$ y $\arg\{h_2(\omega)\} = 0 - \tan^{-1}(-\omega/10) = \tan^{-1}(\omega/10)$, las que son distintas. En particular, como $j\omega - 10$ está en el segundo cuadrante, el ángulo está entre 90° (para $\omega \rightarrow \infty$) y 180° (para $\omega \rightarrow 0$), por lo que el ángulo de $1/(j\omega - 10)$ estará entre -90° (para $\omega \rightarrow \infty$) y -180° (para $\omega \rightarrow 0$), lo que queda representado por $\arg\{h_2(\omega)\} = -180^\circ + \tan^{-1}(\omega/10)$. Los resultados se encuentran en la Fig. 6.9. ♣

Ejemplo 6.9. Para el elevador de tensión mostrado en la Fig. 6.10(a), obtenga el D. de B. de sus F. de T.. **R.:** El modelo promedio, linealizado y normalizado (con $\Delta e_n = \Delta e/e_o$, $\Delta d_n = \Delta d/d_o$, $\Delta v_n = \Delta v/v_o$, e $\Delta i_n = \Delta i/i_o$) es $\frac{d\Delta v_n}{dt} = -\frac{1}{RC}\Delta v_n + \frac{1}{RC}\Delta i_n + \frac{-d_o}{RC(1-d_o)}\Delta d_n$, $\frac{d\Delta i_n}{dt} = -\frac{R}{L}(1-d_o)^2\Delta v_n + \frac{R}{L}(1-d_o)d_o\Delta d_n + \frac{R}{L}(1-d_o)^2\Delta e_n$. Derivando la primera ecuación se tiene, $\frac{d^2\Delta v_n}{dt^2} = -\frac{1}{RC}\frac{d\Delta v_n}{dt} + \frac{1}{RC}\frac{d\Delta i_n}{dt} + \frac{-d_o}{RC(1-d_o)}\frac{d\Delta d_n}{dt}$, reemplazando la segunda ecuación en este resultado se tiene, $\frac{d^2\Delta v_n}{dt^2} = -\frac{1}{RC}\frac{d\Delta v_n}{dt} + \frac{1}{RC}\left\{-\frac{R}{L}(1-d_o)^2\Delta v_n + \frac{R}{L}(1-d_o)d_o\Delta d_n + \frac{R}{L}(1-d_o)^2\Delta e_n\right\} + \frac{-d_o}{RC(1-d_o)}\frac{d\Delta d_n}{dt}$, ordenando se llega a $\frac{d^2\Delta v_n}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{d\Delta v_n}{dt} + \frac{1}{LC}(1-d_o)^2\Delta v_n = \frac{-d_o}{RC(1-d_o)}\frac{d\Delta d_n}{dt} + \frac{1}{LC}(1-d_o)d_o\Delta d_n + \frac{1}{LC}(1-d_o)^2\Delta e_n$.

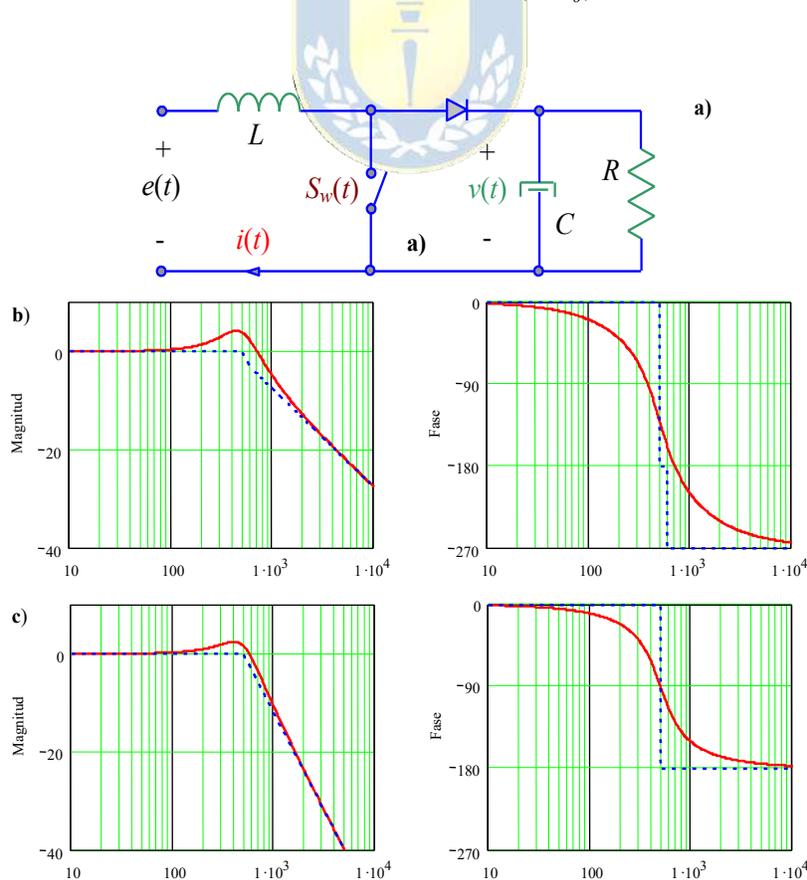


Fig. 6.10 D. de B. de las F. de T. del elevador de tensión; **a)** esquema, **b)** $h_{vndn}(s)$, **c)** $h_{vnen}(s)$.

Tomando T.L. y $\Delta e_n = 0$ se obtiene, $\left\{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}(1-d_o)^2\right\}\Delta v_n = \left\{\frac{-d_o}{RC(1-d_o)}s + \frac{1}{LC}(1-d_o)d_o\right\}\Delta d_n$. Definiendo,

$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}(1-d_o)$, $\xi = \frac{\sqrt{LC}}{2RC(1-d_o)}$, y $k_p = \frac{d_o}{1-d_o}$, la F. de T. entre la salida Δv_n y la entrada Δd_n es

$\Delta h_{vndn}(s) = k_p \frac{-2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$. Similarmente, se obtiene la F. de T. entre la salida Δv_n y la perturbación Δe_n que resulta ser

$\Delta h_{vnen}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$. Los polos son únicos y están dados por las raíces de $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$, que resultan ser $-208 \pm$

$j454.43$. El D. de B., Fig. 6.10(a) de $h_{vndn}(s)$ indica que para altas frecuencias el sistema atenúa con 20dB por década y no con 40dB como esperado para un sistema de segundo orden. Esto se debe a la presencia del cero de fase no mínima. Similarmente, para altas frecuencias la fase tiende a -270° y no a -180° como esperado para sistemas de segundo orden. Contrariamente, el D. de B. de $h_{vnen}(s)$ tiene un comportamiento regular por cuanto es una F. de T. de fase mínima. La característica de fase no mínima es perjudicial a la hora de controlar estos sistemas, esto se analizará en los cursos venideros. ♣

Ejemplo 6.10. Para el elevador de tensión mostrado en la Fig. 6.10(a) y utilizando los D. de B. del ejemplo anterior determine la salida en s.s. para la entrada $\Delta u_n(t) = \Delta d_n(t) = 0.2[\sin(2\pi f_o t) + 1/5\sin(5 \cdot 2\pi f_o t - \pi) + 1/7\sin(7 \cdot 2\pi f_o t - \pi)]$, con $f_o = 25$ Hz. **R.:** Dado que la entrada es una sumatoria de sinusoidales, se puede emplear el D. de B. del sistema. A partir de éste se obtiene para cada frecuencia la amplificación y el desfase. Así, para la frecuencia $2\pi f_o$ se obtiene una amplificación de $\Delta v_1 = 1.101$ y un desfase de $\Delta\phi_1 = -30.868^\circ$, para la frecuencia $5 \cdot 2\pi f_o$ se obtiene una amplificación de $\Delta v_5 = 0.838$ y un desfase de $\Delta\phi_5 = -190.888^\circ$, y para la frecuencia $7 \cdot 2\pi f_o$ se obtiene una amplificación de $\Delta v_7 = 0.491$ y un desfase de $\Delta\phi_7 = -215.845^\circ$. Por lo tanto la salida es, $\Delta y_n(t) = \Delta v_n(t) = 0.2[\Delta v_1 \sin(2\pi f_o t + \Delta\phi_1) + \Delta v_5/5 \sin(5 \cdot 2\pi f_o t - \pi + \Delta\phi_5) + \Delta v_7/7 \sin(7 \cdot 2\pi f_o t - \pi + \Delta\phi_7)]$. Si bien determinar en forma exacta desde un D. de B. la amplificación y fase es difícil, éste da una buena estimación de las características en frecuencia de un sistema. En particular si es un pasa bajos, pasa banda, pasa altos, etc. ♣

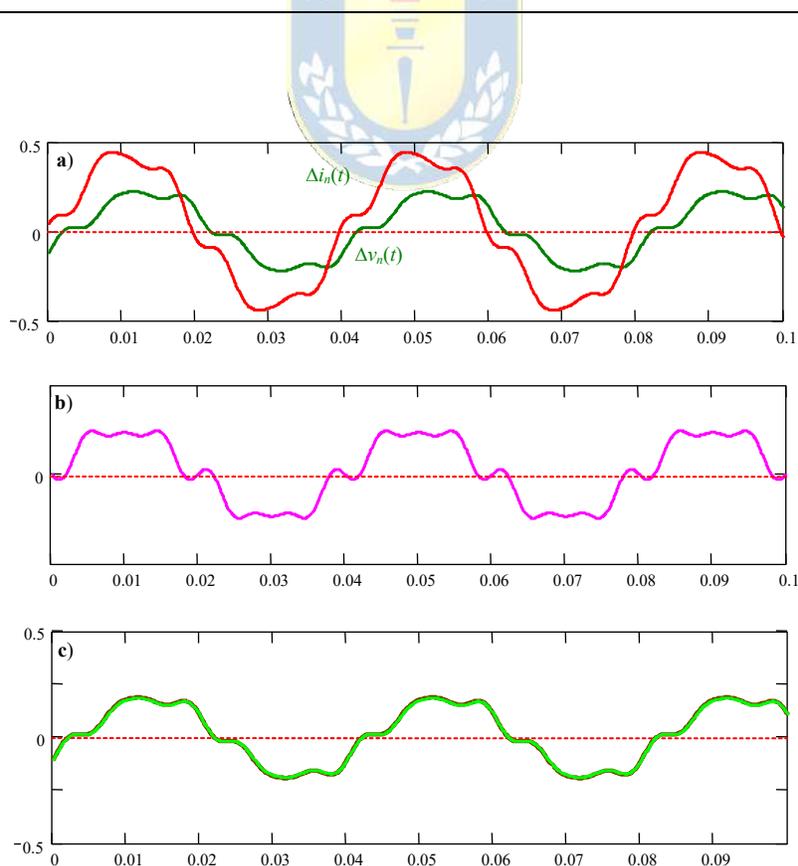


Fig. 6.11 Respuesta en s.s. para entrada compuesta por sinusoidales del elevador de tensión; **a)** voltaje y corriente simuladas, **b)** entrada, **c)** voltaje calculado y simulado.

6.6 Diagrama de Bode de Sistemas Tiempo Discreto

Hasta ahora el análisis en frecuencia ha sido orientado a sistemas tiempo continuo. Ahora se revisará el caso de sistemas tiempo discreto, Fig. 6.12. La salida de estos sistemas puede expresarse como la convolución entre la entrada y la respuesta a impulso de éste. Así, para una entrada arbitraria se tiene que,

$$y(kT) = h(kT) * u(kT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(iT)u(kT - iT),$$

donde $h(kT)$ es la respuesta impulso del S.L.I. tiempo discreto. Considerando la entrada como $u(kT) = e^{j\Omega kT}$, que corresponde a la base de generación de señales periódicas, en particular sinusoidales, se tiene,

$$y(kT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(iT)e^{j\Omega(kT-iT)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(iT)e^{j\Omega kT} e^{-j\Omega iT} = e^{j\Omega kT} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(iT)e^{-j\Omega iT},$$

donde el término sumatoria corresponde a la T.F.T.D. de la respuesta a impulso del sistema; es decir,

$$h(\Omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(iT)e^{-j\Omega iT},$$

luego, la señal de salida queda como,

$$y(kT) = h(\Omega)e^{j\Omega kT},$$

donde se ve claramente que la señal periódica de entrada, $e^{j\Omega kT}$, se ve reflejada en la salida como una señal de igual frecuencia a la señal de entrada, pero atenuada/amplificada y adelantada/retrasada en el factor $h(\Omega)$. Nótese que $h(\Omega)$ es una propiedad del sistema y es un número complejo, el cual se puede representar en un plano complejo o en módulo y ángulo. Recordar que para obtener la T.F.T.D. de una señal discreta se puede reemplazar z por $e^{j\Omega T}$ en su T. Z. Es importante notar que la función $e^{j\Omega T}$ es periódica de periodo $2\pi/T$. Esta característica se debiera observar en el D. de B. de estos sistemas.

El D. de B. de sistemas tiempo discreto es también el gráfico del módulo, en dB, y la fase, en grados, de una F. de T. con $z = e^{j\Omega T}$ en función de la frecuencia en base logarítmica. Sin embargo, como se ilustrará con un ejemplo, los D. de B. de sistemas discretos quedan mejor graficados al utilizar una escala de frecuencia lineal. Notar que el D. de B. depende de Ω y de T , que es el período de muestreo, el cual se considera constante durante el análisis.

Ejemplo 6.11. Dibujar el D. de B. de $h(z) = \frac{b_0}{z + a_0}$, para varios valores de T . En este caso, la T.F.T.D. queda como $h(\Omega) =$

$\frac{b_0}{e^{j\Omega T} + a_0}$, por lo que al considerar la identidad de Euler se tiene que, $h(\Omega) = \frac{b_0}{\cos(\Omega T) + j \sin(\Omega T) + a_0}$. Así, el módulo es,

$|h(\Omega)| = \frac{b_0}{\sqrt{(\cos(\Omega T) + a_0)^2 + (\sin(\Omega T))^2}} = \frac{b_0}{\sqrt{1 + 2a_0 \cos(\Omega T) + a_0^2}}$, y la fase es $\arg\{h(\Omega)\} = -\tan^{-1}\left\{\frac{\sin(\Omega T)}{\cos(\Omega T) + a_0}\right\}$. La

Fig. 6.13 muestra la gráfica para varios valores de T ; donde por conveniencia se ha definido $a_0 = -e^{-10T}$ y $b_0 = 0.1(1 - e^{-10T})$. Es

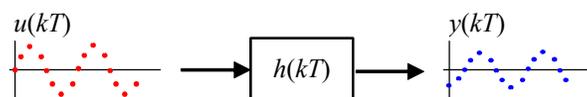


Fig. 6.12 Sistema S.L.I. tiempo discreto.

importante destacar que el uso de escalas lineales es más ilustrativo en estos casos; por ejemplo, la periodicidad del D. de B. es más evidente, Fig. 6.13(c). ♣

Ejemplo 6.12. Dibujar el D. de B. del equivalente discreto del motor c.c. ilustrado en la Fig. 6.5(a). **R.:** El modelo continuo con $x_1 = i_a$ y $x_2 = \omega$ es $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -k_m/L \\ k_m/J_l & -d/J_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} v_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_l \end{bmatrix} t_l$, $\omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y el discreto para $t = T = 0.25$, está dado por $\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -0.058 & -0.295 \\ 0.109 & 0.518 \end{bmatrix}$, $\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0.574 \\ 0.615 \end{bmatrix}$, y $\underline{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0.615 \\ -1.413 \end{bmatrix}$, lo que resulta en el modelo $\begin{bmatrix} i_a(kT+T) \\ \omega(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.058 & -0.295 \\ 0.109 & 0.518 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(kT) \\ \omega(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.574 \\ 0.615 \end{bmatrix} v_a(kT) + \begin{bmatrix} 0.615 \\ -1.413 \end{bmatrix} t_l(kT)$ por lo que $\omega(z) = h_{\omega v_a}(z)v_a(z) + h_{\omega t_l}(z)t_l(z)$, $i_a(z) = h_{i_a v_a}(z)v_a(z) + h_{i_a t_l}(z)t_l(z)$. El D. de B. de $h_{\omega t_l}(z)$ ilustrado en la Fig. 6.14, para dos frecuencias de muestreo, indica que su validez es a lo más la mitad de frecuencia de muestreo (π/T). ♣

6.7 Ejercicios Propuestos.

Resuelva los problemas siguientes. Anote todo su trabajo.

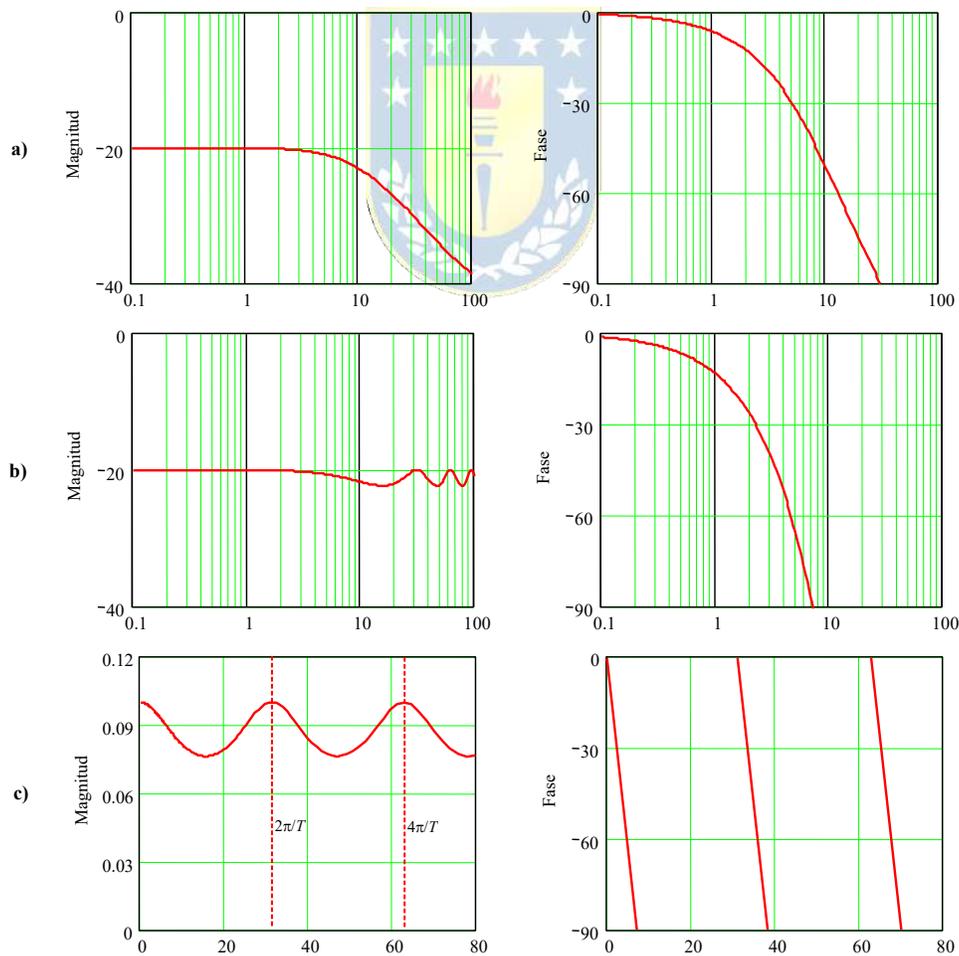


Fig. 6.13 D. de B. de $h(z) = \frac{b_0}{z + a_0}$, $a_0 = -e^{-10T}$ y $b_0 = 0.1(1 - e^{-10T})$; **a)** $T = 0.02$, **b)** $T = 0.2$, **c)** $T = 0.2$ con escalas lineales.

A. Nivel básico.

1.- Dibuje el D. de B. asintótico de las F. de T. siguientes.

(a) $h(s) = \frac{10}{s+10}$

(b) $h(s) = 10 \frac{s+1}{s+10}$

(c) $h(s) = 10 \frac{s-1}{s+10}$

(d) $h(s) = \frac{s+1}{(s+0.1)(s+10)}$

(e) $h(s) = \frac{(s+0.1)(s-1)}{s+10}$

(f) $h(s) = \frac{10}{s+10} e^{-0.1s}$

(g) $h(s) = \frac{10}{s+10} \frac{1}{s^2+0.2s+1}$

(h) $h(s) = \frac{0.1}{s+10} \frac{s+100}{s^2+0.2s+1}$

(i) $h(s) = \frac{1}{s^2}$

(j) $h(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$

2.- Dibuje el D. de B. de las F. de T. de las siguientes ecuaciones.

(a) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = u(t)$

(b) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) + 10$

(c) $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt}$

(d) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t)$

(e) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3y(t) = u(t-1)$

(f) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t-1)$

(g) $y(kT+T) + a_0 y(kT) = 0$

(h) $y(kT+T) + 0.5y(kT) = u(kT)$

(i) $y(kT+T) + 1.5y(kT) = u(kT)$

(j) $y(kT+2T) + 1.5y(kT) = u(kT)$

(k) $y(kT+2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT+T) + u(kT)$

(l) $y(kT+2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT+T) + u(kT)$

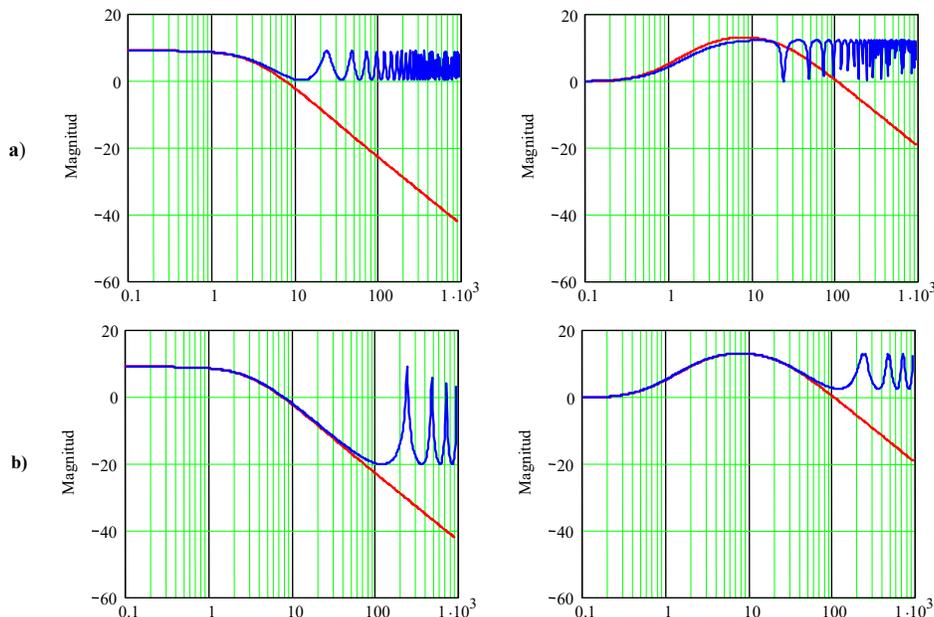
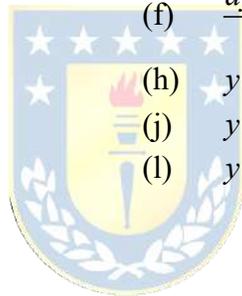


Fig. 6.14 D. de B. de las F. de T. continuas (líneas rojas) y discretas (líneas azules) de la máquina c.c.; **a)** $h_{cont}(z)$ y $h_{iava}(z)$ con $T = 0.25$, **b)** $h_{cont}(z)$ y $h_{iava}(z)$ con $T = 0.025$.

4.- Dibuje el D. de B. de las F. de T. de las siguientes ecuaciones.

(a) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [4 \quad 10] \mathbf{x}(t)$

(b) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t) + u(t)$

(c) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(t) + u(t)$

(d) $\mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(kT)$

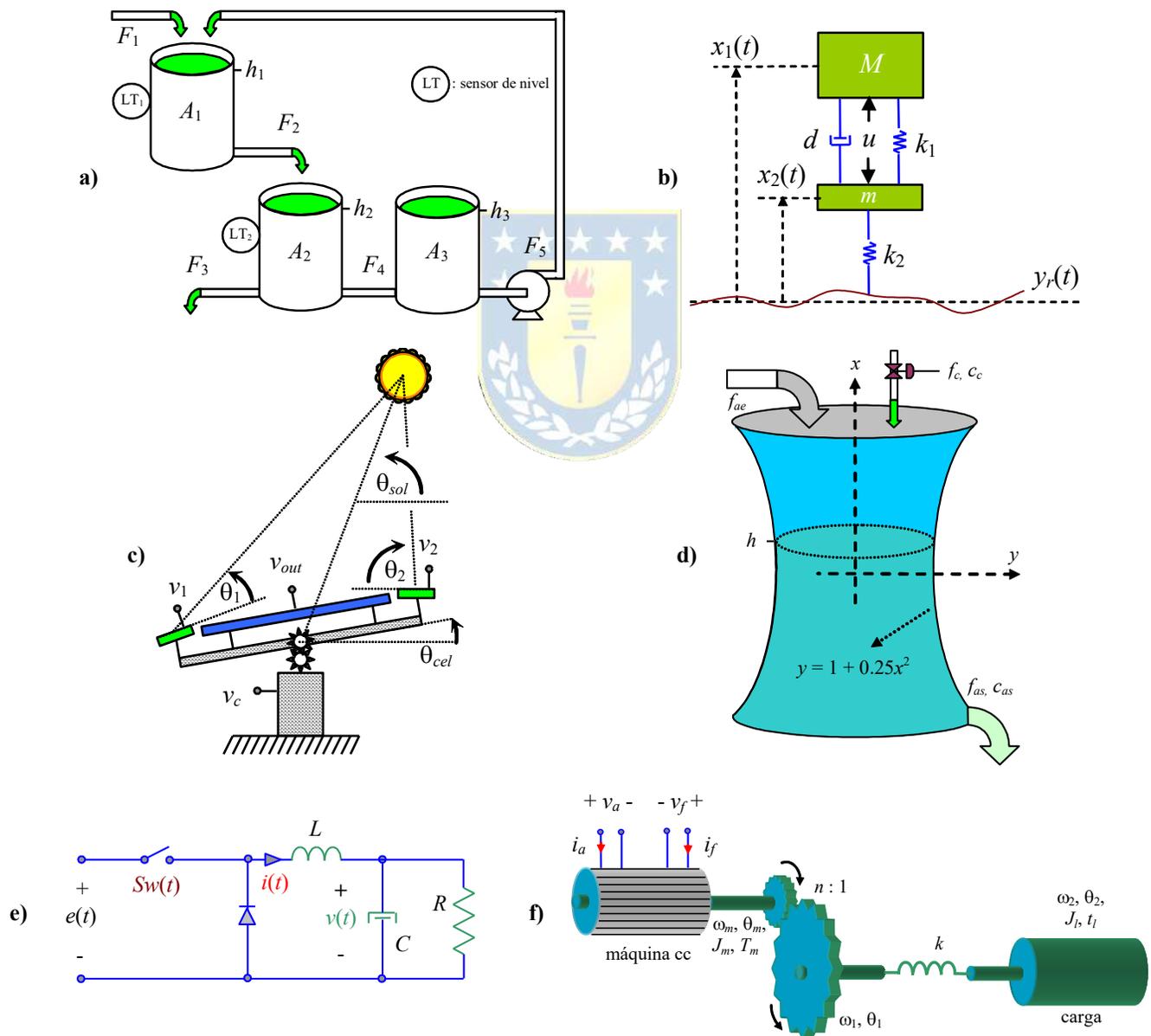


Fig. 6.15 Sistemas para ejercitar; **a)** estanques, **b)** amortiguación de un automóvil, **c)** generación solar, **d)** estanque diluidor, **e)** circuito reductor de tensión, **f)** motor de cc con eje flexible.

$$(e) \quad \mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT)$$

$$(f) \quad \mathbf{x}(kT + T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT) + u(kT)$$

B. Nivel intermedio.

- 1.- Dibuje el D. de B. de todas y cada una de las F. de T. de los sistemas ilustrados en la Fig. 6.15. Para los sistemas no lineales utilice la linealización. Los parámetros son como los utilizados en los capítulos anteriores.
- 2.- Dibuje el D. de B. de los sistemas discretos equivalentes de los ilustrados en la Fig. 6.15. Compare este D. de B. con el D. de B. continuo.
- 3.- Para la entrada arbitraria $u(t) = 10 \cdot \sin(2\pi 0.01t) + 100 \cdot \sin(2\pi 0.1t) + 2 \cdot \sin(2\pi t) + 5 \cdot \sin(2\pi 10t) + 50 \cdot \sin(2\pi 100t) + 0.1 \cdot \sin(2\pi 1kt) + 3 \cdot \sin(2\pi 10kt) + 80 \cdot \sin(2\pi 100kt) + 1.5 \cdot \sin(2\pi 1Mt)$, determine a partir del D. de B. de la pregunta anterior la respuesta que debiera tenerse.
- 4.- Simule los sistemas de la Fig. 6.15 y utilice la entrada anterior. Verifique con lo encontrado en la pregunta anterior.

C. Nivel avanzado.

- 1.- Un retardo en un sistema continuo se manifiesta como un retraso de fase en el D. de B. del sistema. Explique cómo se manifiesta el retardo de un sistema discreto en su D. de B..
- 2.- Indique un procedimiento para obtener la F. de T. que representa el comportamiento de un sistema descrito por la F. de T. $h(s)$ para altas frecuencias y para bajas frecuencias.
- 3.- Utilizando los resultados anteriores, cuál sería la F. de T. que representa a altas y la F. de T. que

$$\text{representa a bajas frecuencias a } h(s) = k \frac{1 \prod_{l=1}^m (s + z_l)}{s^N \prod_{l=1}^n (s + p_l)} e^{-t_d s}.$$

- 4.- Determine las condiciones para que el polinomio característico de un sistema continuo de segundo orden tenga sus raíces en el S.P.D. Repita para un sistema discreto, pero para que tenga raíces en el interior del círculo unitario.

7 Estabilidad de Sistemas Lineales

El análisis de sistemas normalmente pasa por el estudio de su estabilidad. En particular cuando el hombre lo interviene, debe asegurar como mínimo que su intervención resultará en un sistema estable. Este capítulo introduce los conceptos de estabilidad entrada-salida e interna, muestra además, su extensión a sistemas continuos y discretos que pueden estar representados por su F. de T. y/o sus ecuaciones de estado. Más aún, se muestran metodologías matemáticas para determinar la estabilidad de estos sistemas. Se encuentra que en S.L.I. descritos por sus ecuaciones de estado, la estabilidad depende exclusivamente de la matriz \mathbf{A} ; en particular, de los valores propios de ésta.

7.1 Introducción

El concepto de estabilidad dice relación con las características de los sistemas de mantener en el tiempo sus variables de salida y/o estado acotadas, ante cambios acotados en las c.i. y/o entradas. Existen varias formas de definir la estabilidad en sistemas, las cuales se describen a continuación.

7.2 Estabilidad de Sistemas Continuos en Ecuaciones de Estado

Sea el modelo de un sistema no-lineal autónomo, es decir la función \mathbf{f} no depende explícitamente del tiempo,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

se definió en el Capítulo 2 el punto de equilibrio \mathbf{x}_0 del sistema anterior como aquel que satisface la siguiente condición,

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Def.: El punto de equilibrio \mathbf{x}_0 es **estable** si para toda c.i. finita, $\|\mathbf{x}_0\| < M$, se cumple que:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \delta.$$

Def.: El punto de equilibrio \mathbf{x}_0 es **asintóticamente estable** si para toda c.i. finita, $\|\mathbf{x}_0\| < M$, se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| \rightarrow \mathbf{0}.$$

Si el sistema tiene entradas $\mathbf{u}(t)$,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \text{con } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

Se define el punto de equilibrio del sistema en función de un valor constante de estas variables de entrada $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$, es decir,

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0),$$

esta función representa la características estática del sistema. En el caso lineal continuo,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \text{con } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

los puntos de equilibrios para una entrada constante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ están dados por

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0,$$

y si la entrada es nula ($\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$), el punto de equilibrio es $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ y es único mientras \mathbf{A} sea invertible. En este sentido, cuando se habla de estabilidad del sistema lineal se refiere a la estabilidad del punto de equilibrio del sistema, y esta característica depende de la matriz \mathbf{A} . En efecto, la evolución del sistema para una entrada constante esta dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_0, \quad \text{con } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

y para considerar tan sólo la evolución en torno al punto de equilibrio \mathbf{x}_0 , se puede restar a ambos lados de la ecuación anterior la cantidad $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0$, puesto que es cero. De esta forma la ecuación queda

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 - (\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0), \quad \text{con } \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0,$$

por lo tanto,

$$\frac{d(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0)}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0), \quad \text{con } \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0,$$

y definiendo el error $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0$, la ecuación anteriormente se puede escribir como,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t), \quad \text{con } \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0,$$

de la cual se puede ver claramente que la estabilidad para cualesquier punto de equilibrio depende de la matriz \mathbf{A} . En este sentido, si los valores propios de la matriz \mathbf{A} tienen parte real negativa. Es decir, que los valores propios se encuentren en el S.P.I. del plano complejo, el sistema será asintóticamente estable. En cambio, si alguno de sus valores propios tiene parte real igual a cero el sistema será tan sólo estable. Esta estabilidad también se conoce como estabilidad interna.

7.3 Estabilidad Entrada-Salida en Sistemas Tiempo Continuo

Sea la siguiente definición,

Def.: Un S.L.I. es estable en el sentido entrada-salida si toda entrada acotada produce una salida acotada.

También se dice que el sistema es BIBO estable (Bounded Input Bounded Output). En términos de la F. de T. esto significa que si,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau)h(\tau)dt,$$

y considerando,

$$|u(t - \tau)| < U < \infty,$$

entonces,

$$|y(t)| < U \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau,$$

luego, para que el sistema sea BIBO estable, se debe cumplir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < M < \infty,$$

donde $h(t)$ es la respuesta del sistema para entrada impulso. Es decir, la integral del valor absoluto de la respuesta a impulso debe converger.

A. Relación entre los polos de un sistema y su estabilidad

Para entender la relación que existe entre los polos de un sistema y su estabilidad, consideremos un sistema SISO en el espacio de estados. Esto es

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t),$$

considerando la respuesta impulso; es decir $y(t) = h(t)$ cuando $u(t) = \delta(t)$ con c.i. nulas,

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} \delta(\tau) d\tau = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}, \quad h(t) = \mathbf{c}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} + d\delta(t).$$

Por lo tanto, para que la integral del valor absoluto de la respuesta a impulso converga, el factor $\mathbf{c}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}$ debe converger. Si \mathbf{A} es diagonal, es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

se cumple que los elementos de la diagonal (los autovalores) corresponden a los valores propios del sistema puesto que también son las raíces del polinomio $\det\{\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}\} = 0$. Para este sistema, la matriz de transición $e^{\mathbf{A}t}$ tiene la forma

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

de lo anterior se puede ver que para garantizar la estabilidad de entrada/salida (BIBO) del sistema, es suficiente que los valores propios cumplan con,

$$\Re\{\lambda_i\} < 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

es decir, que el sistema sea internamente estable. Así se garantiza que $e^{\mathbf{A}t}$ converge. Sin embargo, sólo es necesario que la expresión $\mathbf{c}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}$ converga y no toda la expresión $e^{\mathbf{A}t}$. Para determinar las implicancias de esto se toma la T.L. a $\mathbf{c}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}$ que resulta en,

$$\mathcal{L}\{\mathbf{c}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}\} = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = n(s) / d(s),$$

se observa que las raíces de $d(s)$ - que son también los polos del sistema - deben estar en el S.P.I.. O bien, los polos del sistema, los λ_l que quedan en la expresión $\mathbf{c}e^{At}\mathbf{b}$ y que son un subconjunto de los, $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, deben cumplir con,

$$\Re\{\lambda_l\} < 0, \forall l = 1, 2, \dots, k, \text{ con } k \leq n.$$

Para determinar la estabilidad entonces, se debe inspeccionar la ubicación de los polos de $\mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$. En particular, su ubicación en el plano complejo. Afortunadamente, si los polos están dados por las raíces del polinomio $d(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$, existe un método que permite determinar la ubicación de éstas mediante la inspección de los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n .

Ejemplo 7.1. Estudiar la estabilidad térmica de una habitación como ilustrada en la Fig. 7.1. **R.:** Al asumir que el flujo de calor es del exterior al interior, es decir, $T_o > T_m > T_i$ se obtuvo que, $C_1 \frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{R_1}(T_m - T_i)$ y $C_2 \frac{dT_m}{dt} = \frac{1}{R_2}(T_o - T_m) - \frac{1}{R_1}(T_m - T_i)$. Definiendo, $x_1 = T_i, x_2 = T_m, p = T_o$ (nótese que no hay entradas manipulables y sólo la

perturbación es entrada) el sistema queda definido por $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & \frac{1}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_2 R_1} & -\frac{1}{C_2 R_2} - \frac{1}{C_2 R_1} \end{bmatrix}$, $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix}$. La estabilidad interna

queda dada por la ubicación de los valores propios de la matriz \mathbf{A} . Al evaluar simbólicamente el escalar $\det\{\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\}$, se obtiene, $\lambda^2 + \left\{ \frac{R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right\} \lambda + \frac{R_1 + 2R_2}{R_1^2 R_2 C_1 C_2}$. Si bien no es evidente dónde están ubicados los valores propios de este ejemplo, el criterio de estabilidad a revisar a continuación indicará que siempre están en el S.P.I. Una alternativa de estudiar la estabilidad entrada/salida es observando la F. de T. considerando a la temperatura de la habitación como salida y a la temperatura ambiente como entrada, en este caso $\mathbf{c} = (1 \ 0)$ y por lo tanto $h_{T/T_o}(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{e} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + \left\{ \frac{R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right\} s + \frac{R_1 + 2R_2}{R_1^2 R_2 C_1 C_2}}$, cuyos polos son también los valores propios del sistema y por lo tanto

el sistema es siempre estable. Nótese que el hecho de tener valores propios estables (estabilidad interna) asegura la estabilidad entrada/salida. ♣

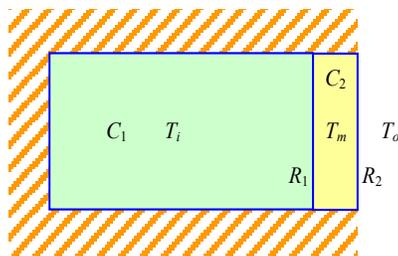


Fig. 7.1 Modelo de una habitación simplificado.

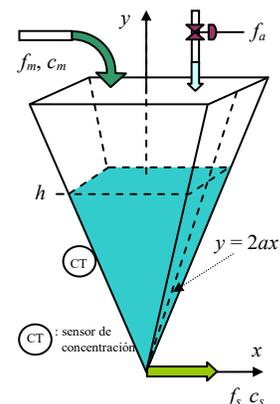


Fig. 7.2 Estanque diluidor.

Ejemplo 7.2. En el estanque de la Fig. 7.2 se definen las variables de estado $\Delta x_1 = \Delta h$, $\Delta x_2 = \Delta c_s$, $\Delta u = \Delta f_a$, $\Delta p_1 = \Delta f_m$ y Δp_2

$$= \Delta c_m, \text{ por lo que el modelo linealizado queda descrito por } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2 g k_v}{2x_{1o}^2 \sqrt{g x_{1o}}} & 0 \\ 0 & -\frac{3a^2 (p_{1o} + u_o)}{x_{1o}^3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{x_{1o}^2} \\ -\frac{3a^2 x_{2o}}{x_{1o}^3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{x_{1o}^2} & 0 \\ \frac{3a^2 (p_{2o} - x_{2o})}{x_{1o}^3} & \frac{3a^2 p_{1o}}{x_{1o}^3} \end{bmatrix}, \text{ donde el punto de operación está dado por las ecuaciones, } f_{mo} + f_{ao} - k_v \sqrt{g h_o} = 0 \text{ y}$$

$f_{mo} c_{mo} - f_{mo} c_{so} - f_{ao} c_{so} = 0$. Analice la estabilidad. **R.:** En este caso los valores propios están dados simplemente por $-\frac{a^2 g k_v}{2x_{1o}^2 \sqrt{g x_{1o}}}$ y por $-\frac{3a^2 (p_{1o} + u_o)}{x_{1o}^3}$ que son siempre negativos lo que asegura la estabilidad interna y entrada/salida. Por otro

lado, la F. de T. considerando a la altura como salida es $\frac{a^2}{x_{1o}^2} \frac{1}{s + \frac{a^2 g k_v}{2x_{1o}^2 \sqrt{g x_{1o}}}}$ cuyo único polo es $-\frac{a^2 g k_v}{2x_{1o}^2 \sqrt{g x_{1o}}}$. Nótese que en

este caso los polos son un sub-conjunto de los valores propios del sistema. Esto además indica un comportamiento dinámico de sistema de primer orden entre la altura y el flujo de entrada. ♣

B. Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz es un método para determinar cuándo un sistema es estable o no, basándose en los coeficientes del polinomio característico del sistema. Este método es particularmente útil en sistemas de orden superior debido a que no es necesario factorizar el denominador de la F. de T.. Sea $d(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$, la interrogante es ¿ puede determinarse si habrá una raíz en el S.P.D. si sólo se observan los coeficientes a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 ?.

Inspección Inicial. Sea el caso de $d(s)$,

$$(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3) = s^3 + (p_1 + p_2 + p_3)s^2 + (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)s + p_1 p_2 p_3,$$

de donde se puede observar que el caso general es,

$$\begin{aligned} d(s) = s^n &+ (\text{suma de todos los polos}) s^{n-1} \\ &+ (\text{suma de los productos de a dos}) s^{n-2} \\ &+ (\text{suma de los productos de a tres}) s^{n-3} \\ &+ \dots + \\ &+ (\text{producto de todos los polos}). \end{aligned}$$

Por lo que a_{n-1} = suma de todos los polos, a_{n-2} = suma de los productos de a dos, ..., a_0 = producto de todos los polos. Por otro lado, se sabe que si $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$, son estables, entonces, $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n > 0$ lo que implica que todos los coeficientes de $d(s)$; es decir, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 son positivos y distintos de cero. Es decir,

$$\begin{aligned} \text{si } p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n > 0 &\quad \Rightarrow \quad \text{si } a_{n-1} \wedge a_{n-2} \wedge \dots \wedge a_0 > 0 && : \text{ caso estable.} \\ \text{si } a_{n-1} \vee a_{n-2} \vee \dots \vee a_0 \leq 0 &\quad \Rightarrow \quad p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \leq 0 && : \text{ caso inestable.} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.3. Analizar la estabilidad del polinomio característico (a) $s^2 - 3s + 1$ y (b) $s^3 + 0.5s^2 + 3.5s + 4$. **R.:** El caso (a) tiene a lo menos una raíz positiva: inestable, el caso (b) puede o no puede ser estable. ♣

Ejemplo 7.4. Analizar la estabilidad de levitador magnético ilustrado en la Fig. 7.3. **R.:** Definiendo $\Delta x_1 = \Delta i$, $\Delta x_2 = \Delta x$, Δx_3

$$= d\Delta x/dt = \Delta v \text{ y } \Delta u = \Delta e \text{ se tiene la representación lineal dada por } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2\frac{k_i}{m} \frac{i_o}{l_1 - x_o + a} & \frac{k_i}{m} \frac{i_o^2}{(l_1 - x_o + a)^2} - \frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, $\mathbf{c} = [0 \ 1 \ 0]$, $d = 0$. Nótese que en el punto de operación se cumple que $-Ri_o/L + u_o/L = 0$ y $-g + k_i i_o^2 / [m(l_1 - x_o + a)] + k(l_1 - x_o)/m = 0$. Luego de algo de trabajo se obtiene la expresión de la F. de T. dada por

$$\Delta x(s) = k_p \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{\tau s + 1} \Delta e(s), \quad \text{donde} \quad k_p = 2\frac{k_i}{m} \frac{i_o}{l_1 - x_o + a} \frac{1}{R}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} - \frac{k_i}{m} \frac{i_o^2}{(l_1 - x_o + a)^2},$$

$$\xi = \frac{d}{2m\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k_i}{m} \frac{i_o^2}{(l_1 - x_o + a)^2}}} \text{ y } \tau = L/R. \text{ La F. de T. tiene tres polos, uno independiente del punto de operación y los otros}$$

dos dados por las raíces de $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$. Nótese que los coeficientes de este polinomio son siempre positivos en tanto el coeficiente ω_n^2 lo sea. Por otro lado, el escalar $\det\{\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}\}$ se obtiene en forma simbólica y resulta ser

$$\left[\lambda^2 + \frac{d}{m} \lambda + \frac{1}{m} \left\{ k - \frac{F_{mo}}{l_1 - x_o + a} \right\} \right] \left\{ \lambda + \frac{R}{L} \right\}, \text{ donde, } F_{mo} = k_i \frac{i_o^2}{l_1 - x_o + a}.$$

Claramente el polinomio cuadrático puede tener raíces en el SPI en la medida que $k < \frac{F_{mo}}{l_1 - x_o + a}$. Esto se cumple siempre si $k = 0$; es decir, si no hay un resorte en el esquema.

Nótese que también puede cumplirse para valores pequeños de k ; es decir, la elección del resorte es fundamental para tener un sistema estable. Otra opción es utilizar un sistema externo que manipule la tensión de entrada e para conseguir que el objeto, Fig. 7.3, quede siempre a la misma distancia. ♣

El criterio de Routh Hurwitz es necesario y suficiente para el análisis de estabilidad. A partir del polinomio característico $d(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ se genera:

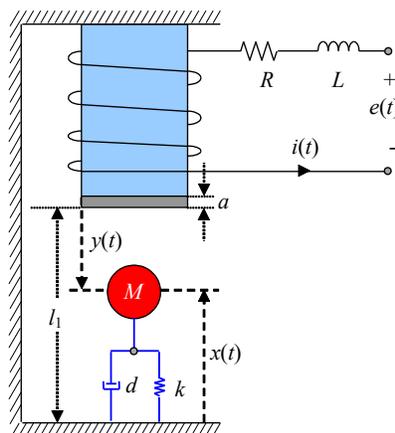


Fig. 7.3 Levitador magnético.

$$\begin{array}{l|llll}
 s^n & \delta_{01} = 1 & \delta_{02} = a_{n-2} & \delta_{03} = a_{n-4} & \dots \\
 s^{n-1} & \delta_{11} = a_{n-1} & \delta_{12} = a_{n-3} & \delta_{13} = a_{n-5} & \dots \\
 s^{n-2} & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots \\
 s^{n-3} & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 s^1 & \delta_{n-1,1} & 0 & 0 & \dots \\
 s^0 & \delta_{n1} & & &
 \end{array}$$

en donde, $\delta_{ij} = \frac{\delta_{i-1,1}\delta_{i-2,j+1} - \delta_{i-2,1}\delta_{i-1,j+1}}{\delta_{i-1,1}}$; $i = 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots$. El criterio establece que el número de raíces de $d(s)$ con parte real positiva es igual al número de cambios de signo en la primera columna del arreglo (columna pivote). El análisis se complica cuando hay ceros en la columna pivote.

Caso N°1: No hay ceros en la columna pivote.

$$\text{i) } d(s) = s^2 + a_1s + a_0, \quad \begin{array}{l|ll}
 s^2 & 1 & a_0 \\
 s^1 & a_1 & 0 \\
 s^0 & b_1 & 0
 \end{array}, \quad b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{array}{l|ll}
 1 & a_0 \\
 a_1 & 0
 \end{array} = a_0 \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 > 0 \\ a_0 > 0 \end{array}$$

Estos resultados confirman la estabilidad interna del sistema térmico revisado en el Ejemplo 7.1.

$$\text{ii) } d(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0, \quad \begin{array}{l|ll}
 s^3 & 1 & a_1 \\
 s^2 & a_2 & a_0 \\
 s^1 & b_1 & 0 \\
 s^0 & c_1 & 0
 \end{array}, \quad \begin{array}{l} b_1 = -\frac{1}{a_2}(a_0 - a_2a_1) \\ c_1 = -\frac{1}{b_1}(a_2 \cdot 0 - b_1a_0) = a_0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 > 0 \\ a_2a_1 > a_0 \\ a_0 > 0 \end{array}$$

Caso N°2: Ceros en la columna pivote con elementos distinto de cero en la fila en donde está el cero.

Se hace igual a ε y luego se lleva al límite. Por ejemplo, $d(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$

$$\begin{array}{l|lll}
 s^5 & 1 & 2 & 11 \\
 s^4 & 2 & 4 & 10 \\
 s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\
 s^2 & c_1 & 10 & 0 \\
 s^1 & d_1 & 0 & 0 \\
 s^0 & 10 & 0 & 0
 \end{array}$$

$$c_1 = \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = -\frac{12}{\varepsilon}, \quad \text{dos cambios de signo} \Rightarrow \text{inestable} \Rightarrow \text{dos raíces inestables.}$$

$$d_1 = \frac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} \rightarrow 6$$

Caso N°3: Ceros en la columna pivote con elementos iguales a cero en la fila en donde está el cero.

Este caso ocurre cuando hay simetrías en torno al origen: $(s + \sigma)(s - \sigma)$ ó $(s + j\omega)(s - j\omega)$ se puede utilizar un polinomio auxiliar. Por ejemplo, $d(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + k$

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & k \\ s^1 & \frac{8-k}{2} & 0 \\ s^0 & k & 0 \end{array}$$

es estable si $0 < k < 8 \Rightarrow k_c = 8$.

Nota: Este método complementa la Regla N° 10 (encuentra k_c). Si $k = 8$ la fila en s^1 se hace cero. Por lo tanto, el polinomio auxiliar es generado con la fila de s^2 que es $2s^2 + ks^0 = 2s^2 + 8 = 2(s^2 + 4)$, por lo que,

$$\begin{array}{r} d(s) : 2(s^2 + 4) = s^3 + 2s^2 + 4s + 8 : 2(s^2 + 4) = s/2 + 1 \\ \underline{-s^3 \qquad \qquad + 4s} \\ \qquad 2s^2 \qquad + 8 \\ \underline{-2s^2 \qquad + 8} \\ \qquad \qquad \qquad 0 \end{array},$$

por lo que $d(s) = 2(s^2 + 4)(s/2 + 1) = (s^2 + 4)(s + 2) \Rightarrow$ marginalmente estable.

Caso N°4: Raíces repetidas en el eje imaginario.

En este caso aparecen varias filas idénticas a cero. Por ejemplo,

$$d(s) = (s + 1)(s + j)(s - j)(s + j)(s - j) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$$

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 2 & 1 \\ s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \leftarrow \text{fila de ceros} \\ s^2 & 1 & 1 & \\ s^1 & \varepsilon & 0 & \leftarrow \text{fila de ceros} \\ s^0 & 1 & & \end{array},$$

podría pensarse que es estable si $\varepsilon > 0$, pero

$$s^4: s^4 + 2s^2 + 1 = (s^2 + 1)^2$$

$$s^2: s^2 + 1$$

múltiple raíces \Rightarrow inestable.

Ejemplo 7.5. Analizar la estabilidad del sistema compuesto por la suspensión del automóvil, Fig. 7.4. **R.:** En este caso el modelo en variables de estado para $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = dx_1/dt$ y $\xi_4 = dx_2/dt$, está dado por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} + \mathbf{ep} + \boldsymbol{\gamma}$ donde las

matrices son,
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1/M & k_1/M & -d/M & d/M \\ k_1/m & -(k_1+k_2)/m & d/m & -d/m \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M \\ -1/m \end{bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2/m \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 l_1 / M - g \\ k_1 l_1 / m + k_2 l_2 / m - g \end{bmatrix},$$

donde \mathbf{e} es un vector asociado a la perturbación y_r y $\boldsymbol{\gamma}$ es un vector de constantes. El escalar $\det\{\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\}$ se obtiene en forma simbólica y resulta ser $\lambda^4 + d \frac{M+m}{Mm} \lambda^3 + \frac{k_2 M + k_1 m + k_1 M}{Mm} \lambda^2 + \frac{dk_2}{Mm} \lambda + \frac{k_1 k_2}{Mm}$. Afortunadamente, es posible obtener la matriz

auxiliar también en forma simbólica y resulta ser,

s^4	1	$\frac{k_2 M + k_1 m + k_1 M}{Mm}$	$\frac{k_1 k_2}{Mm}$	
s^3	$d \frac{M+m}{Mm}$	$\frac{dk_2}{Mm}$	0	
s^2	$\frac{mk_1(m+2M) + M^2(k_1+k_2)}{Mm}$	$\frac{k_1 k_2}{Mm}$	0	. En este
s^1	$\frac{k_2^2}{m} \frac{Md}{mk_1(m+2M) + M^2(k_1+k_2)}$	0	0	
s^0	$\frac{k_1 k_2}{Mm}$	0	0	

caso es claro que la columna pivote no tiene cambios de signo en tanto las constantes sean todas positivas, lo cual es el caso del sistema de suspensión del automóvil. Por lo tanto, la estabilidad interna está asegurada y por lo tanto la estabilidad entrada/salida, cualesquiera sea la cantidad considerada como salida, también está asegurada. ♣

7.4 Estabilidad de Sistemas Discretos en Ecuaciones de Estado

Al igual que en el caso continuo, se considera el modelo de un sistema no-lineal autónomo, es decir la función \mathbf{f} no depende explícitamente del tiempo,

$$\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(kT)),$$

se definió en el Capítulo 2 el punto de equilibrio \mathbf{x}_0 del sistema anterior como aquel que satisface la siguiente condición,

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0),$$

Def.: El punto de equilibrio \mathbf{x}_0 es **estable** si para toda c.i. finita, $\|\mathbf{x}_0\| < M$, se cumple que:

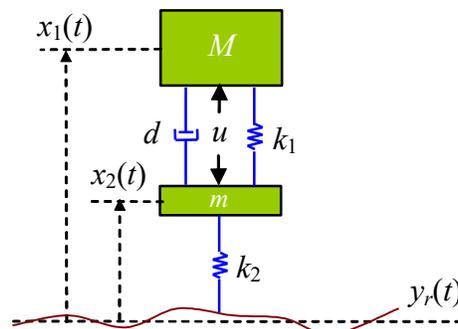


Fig. 7.4 Sistema mecánico: suspensión activa.

$$\|\mathbf{x}(kT) - \mathbf{x}_0\| < \delta.$$

Def.: El punto de equilibrio \mathbf{x}_0 es **asintóticamente estable** si para toda c.i. finita, $\|\mathbf{x}_0\| < M$, se cumple que:

$$\lim_{kT \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(kT) - \mathbf{x}_0\| \rightarrow \mathbf{0}.$$

Si el sistema tiene entradas $\mathbf{u}(kT)$,

$$\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(kT), \mathbf{u}(kT)), \quad \text{con } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

se define el punto de equilibrio del sistema en función de un valor constante de estas variables de entrada $\mathbf{u}(kT) = \mathbf{u}_0$, es decir,

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0),$$

esta función representa la característica estática del sistema. En el caso lineal discreto,

$$\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT), \quad \text{con } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

los puntos de equilibrios para una entrada constante $\mathbf{u}(kT) = \mathbf{u}_0$ están dados por

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0,$$

y si la entrada es nula ($\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$), el punto de equilibrio es $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ y es único mientras $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ sea invertible. En este sentido, cuando se habla de estabilidad del sistema lineal se refiere a la estabilidad del punto de equilibrio del sistema, y esta característica depende de la matriz \mathbf{A} . En efecto, la evolución del sistema para una entrada constante esta dada por:

$$\mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}_0, \quad \text{con } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

y para considerar tan sólo la evolución en torno al punto de equilibrio \mathbf{x}_0 , se puede restar a ambos lados de la ecuación anterior la cantidad $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0$. De esta forma la ecuación queda

$$\mathbf{x}(kT + T) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 - (\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0), \quad \text{con } \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0,$$

por lo tanto,

$$\mathbf{x}(kT + T) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{x}(kT) - \mathbf{x}_0), \quad \text{con } \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0,$$

y definiendo el error $\tilde{\mathbf{x}}(kT) = \mathbf{x}(kT) - \mathbf{x}_0$, la ecuación anterior se puede escribir como,

$$\tilde{\mathbf{x}}(kT + T) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(kT), \quad \text{con } \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0,$$

de la cual podemos ver claramente que la estabilidad para cualquier punto de equilibrio depende de la matriz \mathbf{A} . En este sentido, si los valores propios de la matriz \mathbf{A} están en el círculo unitario, el sistema será asintóticamente estable. En cambio si alguno de sus valores propios está sobre el círculo unitario, el sistema será tan sólo estable.

Ejemplo 7.6. Estudie la estabilidad del modelo de la Población de Conejos, Fig. 7.5, dado por, $y(kT + 2T) - y(kT + T) - y(kT) = u(kT)$, con $y(0) = 1$, $y(T) = 1$ y con $u(kT) = 0$. **R.:** Al considerar $x_1(kT) = y(kT)$ y $x_2(kT) = y(kT + T)$ se obtiene que una

representación en variables de estado es, $\begin{bmatrix} x_1(kT+T) \\ x_2(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT)$, $y(kT) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$. El polinomio $\det\{\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\} = . \clubsuit$

7.5 Estabilidad Entrada-Salida en Sistemas Tiempo Discreto

Al igual que en sistemas tiempo continuo, el concepto de estabilidad BIBO se aplica a los sistemas tiempo discreto. En términos de la F. de T: esto significa que si,

$$y(kT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(kT - iT)h(iT),$$

y considerando,

$$|u(kT - iT)| < U < \infty,$$

entonces,

$$|y(kT)| < U \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h(iT)|,$$

luego, para que el sistema sea BIBO estable, se debe cumplir,

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h(iT)| < M < \infty,$$

donde $h(iT)$ es la respuesta del sistema para entrada impulso. Es decir, la sumatoria del valor absoluto de la respuesta a impulso debe converger.

A. Relación entre los polos de un sistema y su estabilidad

Para entender la relación que existe entre los polos de un sistema y su estabilidad, consideremos un sistema SISO en el espacio de estados discreto. Esto es

$$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{b}u(kT), \quad y(kT) = \mathbf{c}\mathbf{x}(kT) + du(kT),$$

considerando la respuesta impulso; es decir $y(kT) = h(kT)$ cuando $u(kT) = \delta(kT)$ con c.i. nulas,

$$\mathbf{x}(kT) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j} \mathbf{b} \delta(jT) = \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}, \quad h(kT) = \mathbf{c} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} + d \delta(kT).$$

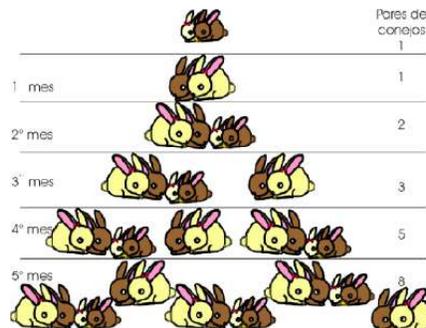


Fig. 7.5 Población de conejos.

Por lo tanto, para que la sumatoria del valor absoluto de la respuesta a impulso converga, el factor dado por $\mathbf{cA}^{k-1}\mathbf{b}$ debe converger. Si \mathbf{A} es diagonal, es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

se cumple que los elementos de la diagonal (los autovalores) corresponden a los valores propios del sistema puesto que también son las raíces del polinomio $\det\{\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\} = 0$. Para este sistema, la matriz de transición \mathbf{A}^k tiene la forma,

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix},$$

de lo anterior se puede ver que para garantizar la estabilidad de entrada/salida (BIBO) del sistema, es suficiente que los valores propios cumplan con,

$$|\lambda_i| < 1, \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

es decir, que el sistema sea internamente estable. Sin embargo, sólo es necesario que $\mathbf{cA}^{k-1}\mathbf{b}$ converga y no toda la expresión \mathbf{A}^{k-1} . Para determinar las implicancias de esto se toma la T.Z. a $\mathbf{cA}^{k-1}\mathbf{b}$ que resulta ser,

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{cA}^{k-1}\mathbf{b}\} = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = n(z)/d(z),$$

lo que indica que las raíces de $d(z)$ - que son también los polos del sistema - deben estar en el círculo unitario. O bien, los polos del sistema, los λ_l que quedan en la expresión $\mathbf{cA}^{k-1}\mathbf{b}$ y que son un subconjunto de los, $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, deben cumplir con,

$$|\lambda_l| < 1, \forall l = 1, 2, \dots, k, \text{ con } k \leq n.$$

Para determinar la estabilidad entonces, se debe inspeccionar la ubicación de los polos de $\mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$. En particular, su ubicación en el plano complejo. Afortunadamente, hay un método equivalente al de Ruth-Hurwitz que permite determinar la ubicación de éstas mediante la inspección de los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n .

B. Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Sea el polinomio característico $d(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ mediante el cambio de variable $z = \frac{1+r}{1-r}$, se puede aplicar el criterio de Routh-Hurwitz visto para sistemas tiempo continuo a los sistemas discretos. En efecto, con este cambio de variable, lo que se logra es mapear la región de convergencia del plano z (círculo unitario) al plano r (S.P.I.). Así se busca que los polos en r estén en el S.P.I. para asegurar la estabilidad. Nótese que se utiliza r y no s , Fig. 7.6, pues no es un mapeo punto a punto y sólo de regiones.

Ejemplo 7.7. Para el siguiente polinomio característico $z^3 + 5.94z^2 + 7.2z - 0.368$, realizar el cambio de variable que corresponda y aplicar el criterio de Routh-Hurwitz y comentar acerca de la ubicación de la raíces. **R.:** Aplicando el cambio de variable $z = \frac{1+r}{1-r}$ el polinomio mapeado al plano r queda de la forma $3.128r^3 - 11.74r^2 + 2.344r + 14.27$. Dado que un coeficiente es negativo, existe una o más raíces imaginarias que se encuentran en el S.P.D. del plano complejo r . Esto indica que en el plano z , existe una raíz del polinomio característico que se encuentra fuera del círculo unitario y por lo tanto el sistema discreto es inestable. ♣

7.6 Ejercicios Propuestos.

Resuelva los problemas siguientes. Anote todo su trabajo.

A . Nivel básico.

1.- Determine si los siguientes sistemas son estables entrada/salida.

(a) $h(s) = \frac{10}{s+10}$

(b) $h(s) = 10 \frac{s+1}{s+10}$

(c) $h(s) = 10 \frac{s+10}{s+1}$

(d) $h(s) = \frac{s+1}{(s+0.1)(s+10)}$

(e) $h(s) = \frac{(s+0.1)(s+1)}{s+10}$

(f) $h(s) = \frac{10}{s+10} e^{-0.1s}$

(g) $h(s) = \frac{10}{s+10} \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$

(h) $h(s) = \frac{0.1}{s+10} \frac{s+100}{s^2 + 0.2s + 1}$

(i) $h(s) = \frac{1}{s^2}$

(j) $h(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$

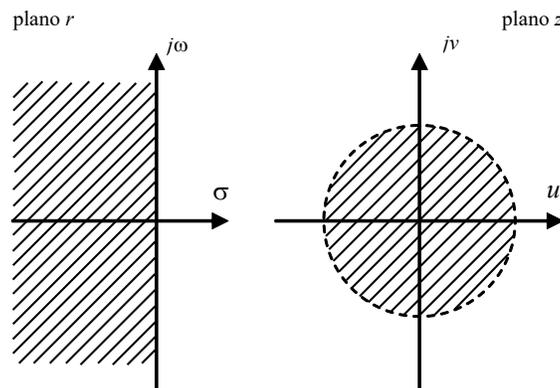
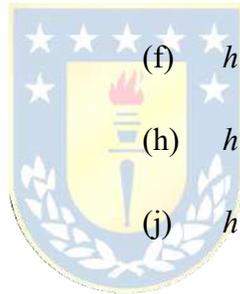


Fig. 7.6 Mapeo del plano z y r , mediante $z = \frac{1+r}{1-r}$.

2.- Determine si los siguientes sistemas son estables entrada/salida.

- | | |
|---|--|
| (a) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = u(t)$ | (b) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) + 10$ |
| (c) $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt}$ | (d) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t)$ |
| (e) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3y(t) = u(t-1)$ | (f) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 10u(t-1)$ |
| (g) $y(kT + T) + a_0 y(kT) = 0$ | (h) $y(kT + T) + 0.5y(kT) = u(kT)$ |
| (i) $y(kT + T) + 1.5y(kT) = u(kT)$ | (j) $y(kT + 2T) + 1.5y(kT) = u(kT)$ |
| (k) $y(kT + 2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT + T)$ | (l) $y(kT + 2T) + 1.5y(kT) = 5u(kT + T) + u(kT)$ |

4.- Determine si los siguientes sistemas son estables internamente y entrada/salida.

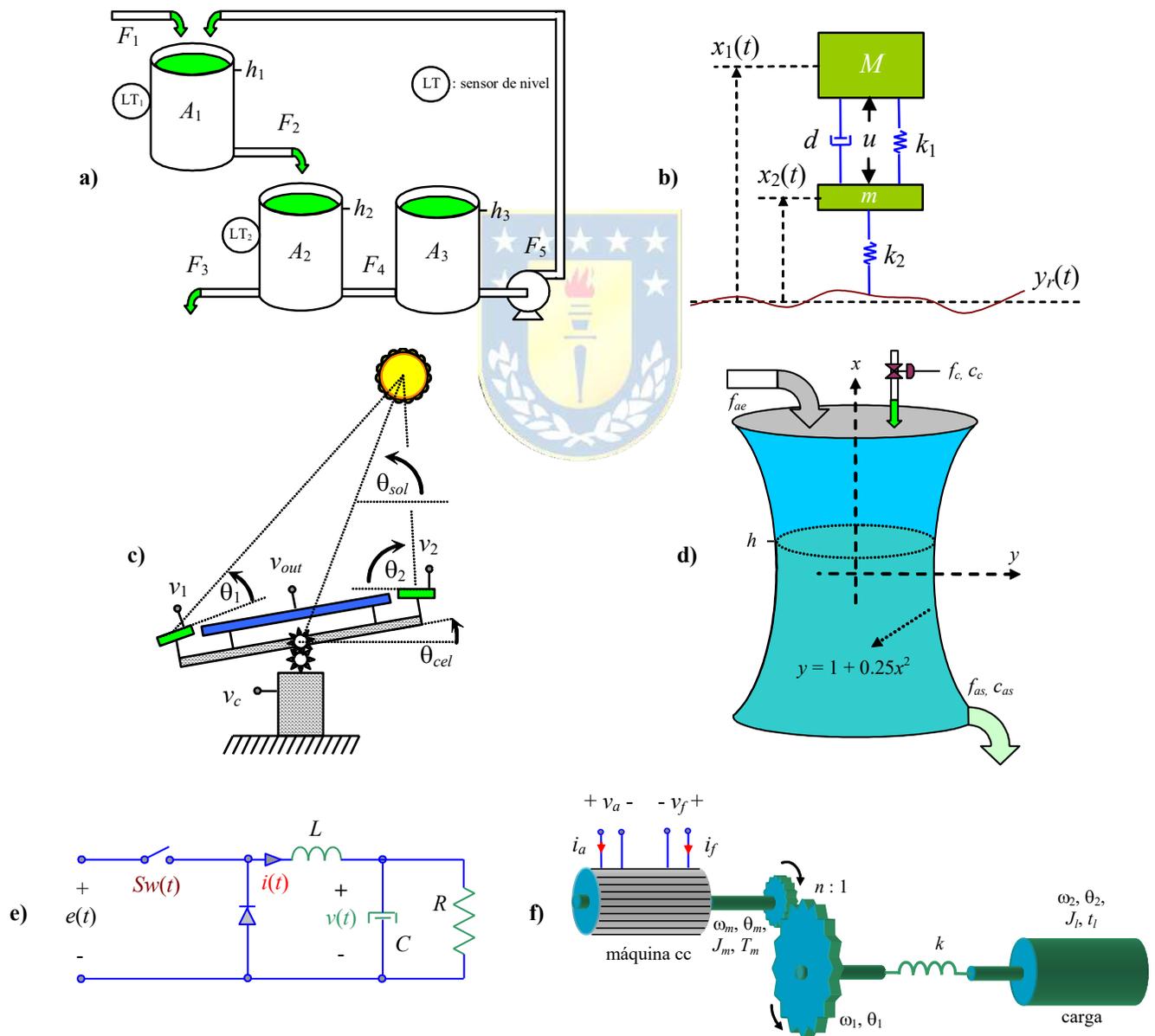


Fig. 7.7 Sistemas para ejercitar; a) estanques, b) amortiguación de un automóvil, c) generación solar, d) estanque diluidor, e) circuito reductor de tensión, f) motor de cc con eje flexible.

$$(a) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [4 \quad 10] \mathbf{x}(t)$$

$$(b) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t) + u(t)$$

$$(c) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(t) + u(t)$$

$$(d) \quad \mathbf{x}(kT+T) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 2] \mathbf{x}(kT)$$

$$(e) \quad \mathbf{x}(kT+T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT)$$

$$(f) \quad \mathbf{x}(kT+T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT), \quad y(kT) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(kT) + u(kT)$$

- 5.- En todos los casos anteriores se puede identificar la F. de T. $h(s)$ o $h(z)$ del sistema. Determine los valores de k tal que la F. de T. dada por $\frac{kh(s)}{1+kh(s)}$ o $\frac{kh(z)}{1+kh(z)}$, respectivamente, representa un sistema estable.

B. Nivel intermedio.

- 1.- Determine si los sistemas ilustrados en la Fig. 7.7 son estables entrada/salida y/o internamente. Para los sistemas no lineales utilice la linealización. Los parámetros son como los utilizados en los capítulos anteriores.
- 2.- Demuestre que un sistema internamente estable es estable entrada/salida.
- 3.- Demuestre que un sistema inestable entrada/salida es inestable internamente.
- 4.- ¿ Son los polos de un sistema un subconjunto de los valores propios del mismo ?.

C. Nivel avanzado.

- 1.- ¿ Puede un sistema discreto – que es una representación de uno continuo estable – ser inestable producto del tiempo de muestreo utilizado ?.
 - 2.- Dé un ejemplo de un sistema estable entrada/salida e inestable internamente.
 - 3.- ¿ Porqué los polos y/o valores propios si salen ser complejos entonces se encuentran en pares conjugados ?. ¿ Siempre se cumple ?. Dé un ejemplo de un sistema con un polo complejo y que su conjugado no sea polo de éste.
 - 4.- Puede aplicarse Routh-Hurwitz a sistemas continuos con retardo.
 - 5.- Puede aplicarse Routh-Hurwitz a sistemas discretos con retardo.
-

A Anexo: Modelación de Sistemas

Este anexo presenta las pautas básicas para la modelación de sistemas dinámicos como los encontrados en las diferentes disciplinas de la ingeniería. Éstos están basados en balances de energía y en el principio de mínima acción. Las materias se complementan con variados ejemplos de modelación de sistemas mecánicos, electromecánicos, eléctricos, hidráulicos y térmicos. No se revisan los principios eléctricos por considerarse conocidos.

A.1 Modelo y Simulación

La simulación dice relación con la solución de las ecuaciones del modelo, esta puede ser llevada a cabo mediante programas computacionales hechos a la medida usando algún lenguaje ad-hoc, o bien usando ambientes de simulación específicos como MatLabTM, PSpiceTM, MathCadTM, PSimTM por tan solo nombrar algunos.

A . Sistemas Mecánicos

Los sistemas mecánicos en general están constituidos por los siguientes elementos básicos que interactúan a través de fuerzas y desplazamientos (en movimientos lineales), y torques y desplazamientos angulares (en movimientos rotacionales).

Resortes. Los resortes son elementos mecánicos los cuales están constituidos por algún elemento elástico. La relación entre la fuerza aplicada a este elemento y el desplazamiento resultante, se conoce como Ley de Hooke, la expresión más simple corresponde a una relación lineal,

$$F = kx,$$

donde, F es la fuerza aplicada al resorte, x el desplazamiento producido por la fuerza y k una constante de proporcionalidad. Expresiones más complejas, tales como $F = k_1x + k_2x^3$, generalmente son necesarias si se consideran desplazamientos “grandes”. Este fenómeno también ocurre si una barra se tuerce, en este caso se habla de resorte torsional, y el torque (en vez de fuerza) es,

$$T = k(\theta_1 - \theta_2),$$

donde, T es el torque aplicado, θ_1 y θ_2 son los ángulos de los extremos de la barra y k es una constante de proporcionalidad.

Amortiguadores. Los amortiguadores son los elementos que disipan energía en los sistemas mecánicos. En este caso existe una relación entre la fuerza aplicada y la velocidad que adquiere el punto donde se aplica la fuerza. Para velocidades pequeñas la siguiente relación describe con cierta precisión este tipo de sistemas:

$$F = d \frac{dx}{dt} = d\dot{x},$$

donde, d es el coeficiente de disipación. Un modelo para un rango de velocidades mayor es dado por $F = d |\dot{x}| \dot{x}$.

Estos elementos en conjunto con la ley de la conservación de la cantidad de movimiento permiten modelar una gran variedad de sistemas mecánicos. Esta ley plantea que la variación de cantidad de movimiento es igual a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema, es decir,

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i(t),$$

donde $\mathbf{P}(t)$ representa un vector de cantidad de movimiento (en general se considera en las tres dimensiones) y $\mathbf{F}_i(t)$ son las fuerzas actuando sobre el sistema. Esta ecuación para el caso rotacional se puede expresar como:

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = \sum_i \mathbf{T}_i(t),$$

donde las componentes del vector $\mathbf{M}(t)$ representan los momentos angulares asociados a los tres posibles ejes de rotación, y \mathbf{T}_i es un vector representando los torques que estarían actuando sobre el sistema.

Ejemplo A.1. En la Fig. A.1 se muestra un sistema resorte–masa–disipador. Este sistema consta de una masa m , sujeta a un punto de apoyo superior a través de un resorte de coeficiente de elasticidad k y a un apoyo inferior a través de un disipador de constante de disipación d . Existe además una fuerza $F(t)$ aplicada a la masa. Se define una coordenada x a través de la cual se desplaza la masa, así la distancia entre el punto de apoyo y la masa queda representada por $x(t)$. La distancia l_0 corresponde a la distancia entre el techo y el centro de m con el resorte en reposo. El modelado de este sistema se realiza haciendo la aceleración del cuerpo en el eje x por su masa igual a la suma de las fuerzas que convergen en éste. Así tenemos, $m \frac{d^2x}{dt^2} = mg + F(t) - k(x - l_0) - d \frac{dx}{dt}$, donde mg es la fuerza de gravedad ejercida sobre el cuerpo, $k(x - l_0)$ es la fuerza ejercida por el resorte y $d \frac{dx}{dt}$ es la fuerza ejercida por el disipador. Así la ecuación diferencial que rige el comportamiento dinámico del sistema es, $\ddot{x} + (d/m)\dot{x} + (k/m)x = g + F(t)/m + kl_0/m$, y haciendo, $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = dx(t)/dt$, $u(t) = F(t)$, se tiene la representación en variables de estado con las matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$, y $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ kl_0/m + g \end{bmatrix}$, donde $\boldsymbol{\gamma}$ corresponde a un vector constante de manera que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \boldsymbol{\gamma}$. En la Fig. A.1 se muestran los resultados obtenidos al simular el sistema, donde en la línea de segmento fino podemos ver la fuerza aplicada, en la línea de segmento grueso podemos ver la velocidad y en la línea continua la posición de la masa. ♣

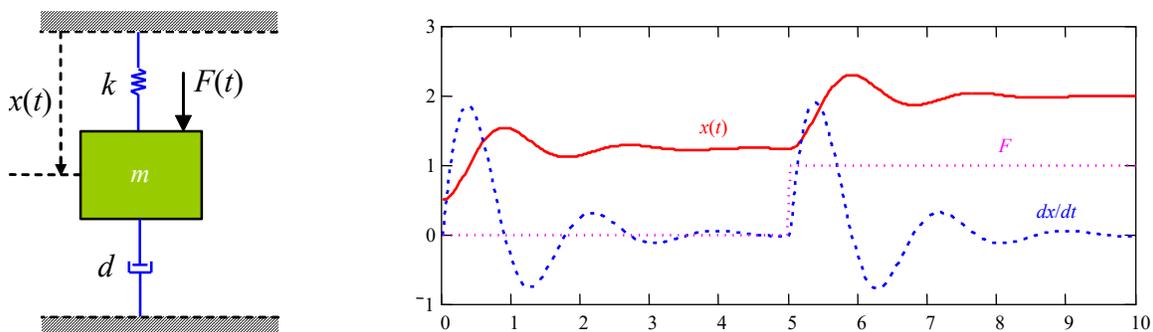


Fig. A.1 Sistema mecánico: masa-resorte-amortiguador.

Ejemplo A.2. El siguiente ejemplo consiste en modelar el sistema de amortiguación activa de un automóvil, el modelo mecánico de este sistema se muestra en la Fig. A.2. Este modelo consiste en una masa M correspondiente a la masa del automóvil y una masa m correspondiente a la masa del sistema de amortiguación. Entre estas dos masas se encuentra un resorte con un coeficiente de elasticidad k_1 y un amortiguador con una constante de disipación d . Luego entre el sistema de amortiguación y el suelo existe un resorte de coeficiente de elasticidad k_2 que representa el efecto producido por los neumáticos. Además, existe una variable de entrada u que corresponde a la fuerza ejercida entre ambas masas por el sistema de suspensión activa. Se define una coordenada vertical x , representando las distancias $x_1(t)$ y $x_2(t)$ entre el suelo y la masa M y m , respectivamente. Las distancias l_1 y l_2 corresponden a las distancias entre ambas masas y entre la masa m y el suelo, respectivamente, con los resortes en reposo. Existe además una perturbación denominada $y_r(t)$ que corresponde al relieve por el cual la rueda va avanzando. La modelación de este sistema se hace planteando las ecuaciones de movimiento de cada masa con respecto a su posición correspondiente. Así, se tiene para M que $M\ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2 - l_1) - d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - Mg + u$, donde $k_1(x_1 - x_2 - l_1)$ es la fuerza ejercida por el resorte que se encuentra entre ambas masas, $d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ es la fuerza ejercida por el disipador M y u es la fuerza ejercida sobre ambas masas. Similarmente, para m se tiene, $m\ddot{x}_2 = k_1(x_1 - x_2 - l_1) + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - mg - k_2(x_2 - l_2 - y_r) - u$, donde $k_1(x_1 - x_2 - l_1)$ es la fuerza ejercida por el resorte entre ambas masas - nótese el cambio de signo -, $d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ es la fuerza ejercida por el disipador sobre m y $k_2(x_2 - l_2 - y_r)$ es la fuerza ejercida por el resorte que se encuentra entre el suelo y la masa m . Considerando $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = dx_1/dt$ y $\xi_4 = dx_2/dt$, se

tiene la representación en variables de estado dada por las matrices,
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1/M & k_1/M & -d/M & d/M \\ k_1/m & -(k_1+k_2)/m & d/m & -d/m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M \\ -1/m \end{bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2/m \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 l_1 / M - g \\ k_1 l_1 / m + k_2 l_2 / m - g \end{bmatrix},$$
 donde \mathbf{e} es un vector asociado a la perturbación y_r y $\boldsymbol{\gamma}$ es un vector de constantes de manera que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{e}p + \boldsymbol{\gamma}$. ♣

Ejemplo A.3. En este caso se modela un tren de una locomotora y dos carros, su modelo mecánico es el mostrado en la Fig. A.3. Este modelo consta en tres masas que representan a la locomotora M y dos carros del tren de masa m ; además, existe

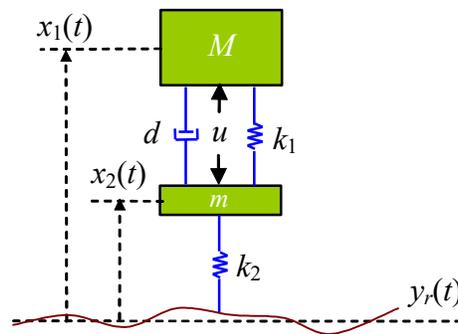


Fig. A.2 Sistema mecánico: suspensión activa.

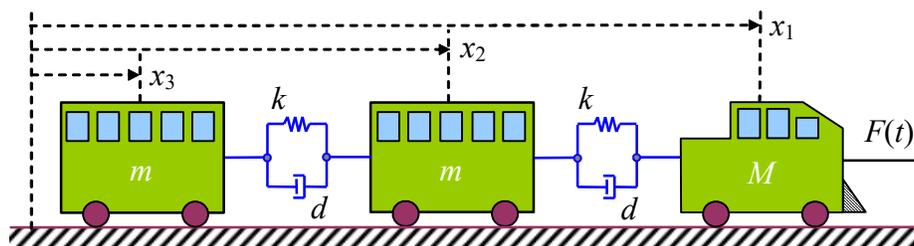


Fig. A.3 Sistema mecánico: tren con una locomotora y dos carros.

entre cada uno de estos carros un sistema resorte-disipador de constante k y d respectivamente, y existe una fuerza $F(t)$ que representa el empuje desarrollado por la locomotora. Se define una coordenada x horizontal a partir de una posición fija y tres variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ que representan las posiciones de cada una de las masas en el sistema de coordenadas definido. La distancia l_0 es la distancia entre dos carros consecutivos con los resortes en reposo. La modelación de este sistema se realiza planteando la ecuación de movimiento para cada una de los carros. Para la locomotora se tiene $M\dot{x}_1 = F(t) - k(x_1 - x_2 - l_0) - d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$, para el 1^{er} carro, $m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2 - l_0) - k(x_2 - x_3 - l_0) + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - d(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$ y para el último, $m\ddot{x}_3 = k(x_2 - x_3 - l_0) + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$. Considerando $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = x_3$, $\xi_4 = dx_1/dt$, $\xi_5 = dx_2/dt$, $\xi_6 = dx_3/dt$ y $u = F(t)$,

se tiene la representación en variables de estado dada por las matrices,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/M & k/M & 0 & -d/M & d/M & 0 \\ k/m & -2k/m & k/m & d/m & -2d/m & d/m \\ 0 & k/m & -k/m & 0 & d/m & -d/m \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ kl_0/M \\ 0 \\ -kl_0/m \end{bmatrix}, \text{ donde } \boldsymbol{\gamma} \text{ es un vector de}$$

constantes. ♣

Ejemplo A.4. Este ejemplo es el péndulo simple, consistente en una masa m colgada al extremo de una barra rígida de largo l_0 sin peso, el coeficiente de roce angular es d , y existe además un torque T aplicado a la masa, Fig. A.4. La modelación de este sistema se realiza haciendo que la sumatoria de torques sea igual a la inercia rotacional por la aceleración angular. Así, $ml_0^2\ddot{\theta} = -l_0mg \sin(\theta) - dl_0^2\dot{\theta} + T$, donde, ml_0^2 es la inercia rotacional del péndulo, $l_0mg \sin(\theta)$ es el torque producido por la gravedad sobre la masa, $dl_0^2\dot{\theta}$ es el torque producido por el roce y T es el torque aplicado. Considerando, $x_1 = \theta$ y $x_2 = d\theta/dt$,

$u = T$ se obtiene, $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -dx_2/m - g \sin(x_1)/l_0 + u/(ml_0^2) \end{bmatrix}$. Es posible notar que, debido al término trigonométrico, el sistema modelado es no-lineal y no puede descomponerse en forma matricial sino que debe ser expresado en una función. Es posible utilizar en este ejemplo el principio de mínima acción, según el cual podemos plantear la función de energía cinética,

$$K = \frac{1}{2}m \left\{ [l_0\dot{\theta} \cos(\theta)]^2 + [l_0\dot{\theta} \sin(\theta)]^2 \right\} = \frac{1}{2}ml_0^2\dot{\theta}^2, \text{ y la función de energía potencial como, } P = mgl_0(1-\cos(\theta)) + P_0. \text{ El}$$

Lagrangiano es entonces, $L = \frac{1}{2}ml_0^2\dot{\theta}^2 - mgl_0(1-\cos(\theta)) - P_0$. El principio de mínima acción en este caso queda como,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q, \text{ por lo tanto, } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left\{ \frac{1}{2}ml_0^2\dot{\theta}^2 + mgl_0 \cos(\theta) \right\} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{2}ml_0^2\dot{\theta}^2 + mgl_0 \cos(\theta) \right\} = T - dl_0^2\dot{\theta}. \text{ Lo que queda}$$

como, $ml_0^2\ddot{\theta} + mgl_0 \sin(\theta) = T - dl_0^2\dot{\theta}$, expresión que coincide con la obtenida anteriormente. Este ejemplo parece no apropiado de ser atacado con el Lagrangiano; sin embargo, el péndulo invertido de la Fig. A.5 sí lo amerita. ♣

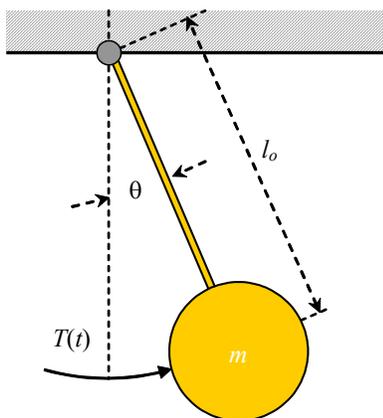


Fig. A.4 Péndulo simple.

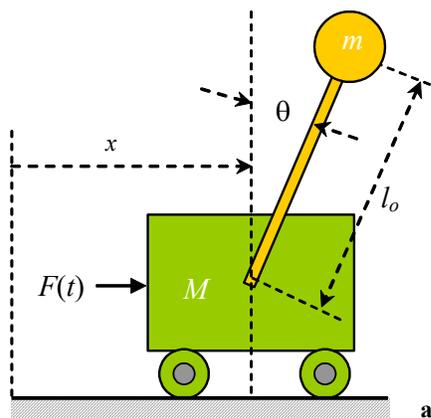
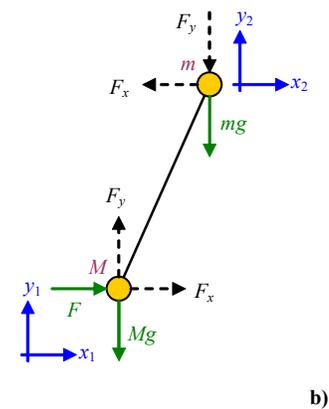


Fig. A.5 Péndulo invertido; a) bosquejo, b) diagrama de cuerpo libre.



Ejemplo A.5. Este ejemplo consiste en modelar un péndulo invertido montado sobre un carro, Fig. A.5(a). En este caso se denomina m a la masa del péndulo y M a la masa del carro, al igual que el caso anterior la longitud de la barra es l_0 . Existe una fuerza F que empuja horizontalmente al carro. Se plantea la sumatoria de fuerzas y de torques en el carro y el péndulo denominando F_x y F_y a las fuerzas que interactúan entre ambos como se muestra en la Fig. A.5(b), así planteamos las ecuaciones de fuerzas en el carro en las coordenadas locales x_1, y_1 obteniendo, $M\ddot{x}_1 = F_x + F$, $0 = F_y - Mg$. Ahora planteamos las ecuaciones de fuerzas en el péndulo en las coordenadas locales x_2, y_2 obteniendo, $m\ddot{x}_2 = -F_x$, $m\ddot{y}_2 = -F_y - mg$ y la ecuación de torque considerando la coordenada θ como $0 = -l_0 F_x \cos(\theta) + l_0 F_y \sin(\theta)$. La sumatoria de torques se considera cero ya que la barra no tiene masa ($I = 0$). Despejando las fuerzas F_x y F_y de las ecuaciones de movimiento del péndulo y reemplazando en las del carro se tiene, $M\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = F$, $l_0 m\ddot{x}_2 \cos(\theta) - l_0(m\ddot{y}_2 + mg)\sin(\theta) = 0$. Por geometría podemos obtener la expresión de los desplazamientos del segundo eje de coordenadas como, $x_2 = x_1 + l_0 \sin(\theta)$, $y_2 = l_0 \cos(\theta)$, de donde, $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + l_0 \cos(\theta)\ddot{\theta} - l_0 \sin(\theta)\dot{\theta}^2$, $\ddot{y}_2 = -l_0 \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - l_0 \sin(\theta)\ddot{\theta}$, reemplazando en las ecuaciones obtenidas se tiene, $M\ddot{x}_1 + m(\ddot{x}_1 + l_0 \cos(\theta)\ddot{\theta} - l_0 \sin(\theta)\dot{\theta}^2) = F$, $l_0 m(\ddot{x}_1 + l_0 \cos(\theta)\ddot{\theta} - l_0 \sin(\theta)\dot{\theta}^2) \cos(\theta) + l_0 m(l_0 \cos(\theta)\dot{\theta}^2 + l_0 \sin(\theta)\ddot{\theta}) \sin(\theta) - l_0 m g \sin(\theta) = 0$. Haciendo $x_1 = x$ y desarrollando las expresiones se tiene finalmente que, $(M + m)\ddot{x} + ml_0 \cos(\theta)\ddot{\theta} - ml_0 \sin(\theta)\dot{\theta}^2 = F$, $ml_0 \cos(\theta)\ddot{x} + ml_0^2 \ddot{\theta} - mgl_0 \sin(\theta) = 0$.

Podemos abordar este problema utilizando el principio de mínima acción, calculando la función de energía del sistema que es, $L = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[\{\dot{x} + l_0 \dot{\theta} \cos(\theta)\}^2 + \{l_0 \dot{\theta} \sin(\theta)\}^2 \right] - mgl_0 \cos(\theta) - P_0$. Siendo el primer término la energía cinética asociada al carro, el segundo término corresponde a la energía cinética asociada a la masa del péndulo tanto en su movimiento lineal como rotacional y el tercer término corresponde a la energía potencial de la masa del péndulo, entonces se tiene para x , $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F$, $\frac{d}{dt} [M\dot{x} + m(\dot{x} + l_0 \dot{\theta} \cos(\theta))] - 0 = F$, $(M + m)\ddot{x} + ml_0 \ddot{\theta} \cos(\theta) - ml_0 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) = F$ y para θ , $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, $\frac{d}{dt} [ml_0 \cos(\theta)\dot{x} + ml_0^2 \dot{\theta}] - [-ml_0 \sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x} + mgl_0 \sin(\theta)] = 0$, $ml_0 \cos(\theta)\ddot{x} - ml_0 \sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + ml_0^2 \ddot{\theta} + ml_0 \sin(\theta)\dot{\theta}\dot{x} - mgl_0 \sin(\theta) = 0$, $ml_0 \cos(\theta)\ddot{x} + ml_0^2 \ddot{\theta} - mgl_0 \sin(\theta) = 0$. Las ecuaciones resultantes son idénticas a las obtenidas con el método de sumatorias de fuerzas. En la figura 2.8 se muestran los resultados de la simulación del péndulo invertido. Aquí se puede apreciar la evolución de la posición del carro y el ángulo del péndulo normalizado a 360° . ♣

Ejemplo A.6. Este ejemplo consiste en un carro de masa M que posee cero fricción con la superficie, adosado a éste se encuentra una barra rígida con una masa m concentrada en su punto medio ubicado a una distancia l_0 del extremo sujeto al carro, Fig. A.7. Esta barra puede rotar en torno al extremo sujeto al carro teniendo también una fricción cero. La coordenada de desplazamiento del carro es llamada x y el ángulo de giro de la barra es llamado θ . Existe además una fuerza $F(t)$ que impulsa el carro en la dirección de x y un torque $T(t)$ que impulsa a la barra. El Lagrangiano es, $L = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 +$

$\frac{1}{2} m \left[\{\dot{x} + l_0 \dot{\theta} \cos(\theta)\}^2 + \{l_0 \dot{\theta} \sin(\theta)\}^2 \right] + \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 - mgl_0(1 - \cos(\theta)) - P_0$. Siendo el primer término la energía cinética asociada al carro, el segundo término corresponde a la energía cinética asociada al desplazamiento lineal de la barra, el tercer término corresponde a la energía cinética asociada al desplazamiento rotacional de la barra y el cuarto término corresponde a la energía

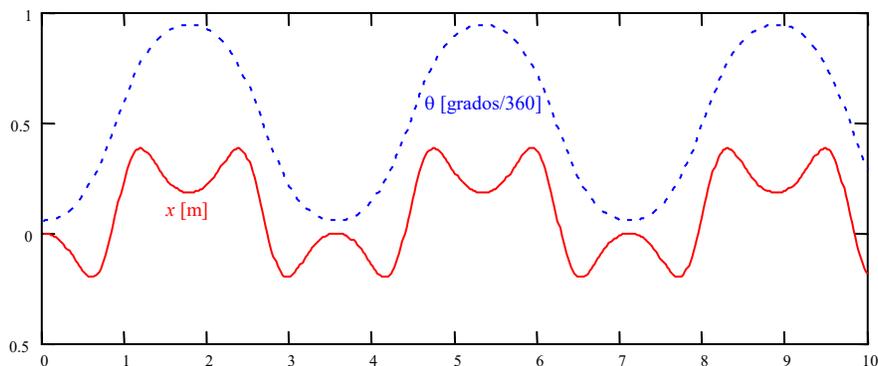
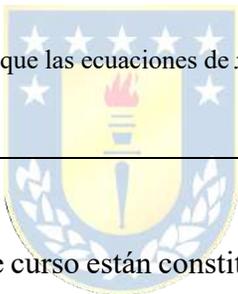


Fig. A.6 Péndulo invertido, simulación con c.i. no nulas y sin fuerza externa.

potencial de la barra; entonces, tenemos para la coordenada x se tiene que, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F$, $\frac{d}{dt}[M\dot{x} + m(\dot{x} + l_0\dot{\theta}\cos(\theta))] - 0 = F$, $(M + m)\ddot{x} + ml_0\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml_0\dot{\theta}^2\sin(\theta) = F$ y para θ se tiene que, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = T$, $\frac{d}{dt}[ml_0\cos(\theta)\dot{x} + ml_0^2\dot{\theta} + I\dot{\theta}] - [-ml_0\sin(\theta)\dot{x} - mgl_0\sin(\theta)] = T$, $ml_0\cos(\theta)\ddot{x} - ml_0\sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + ml_0^2\ddot{\theta} + I\ddot{\theta} + ml_0\sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta} + mgl_0\sin(\theta) = T$, $ml_0\cos(\theta)\ddot{x} + (I + ml_0^2)\ddot{\theta} + mgl_0\sin(\theta) = T$.

Es posible notar que las ecuaciones resultantes son similares a las obtenidas en el caso anterior. Sin embargo ahora existe un término proveniente de la masa de la barra que en el caso anterior era despreciada. ♣

Ejemplo A.7. Este ejemplo corresponde a un modelo de un satélite, el cual gira a una distancia r y es afectado por una fuerza tangencial $F_{\theta}(t)$ y una fuerza radial $F_r(t)$. La modelación de este sistema se realiza aplicando el principio de mínima acción planteando el siguiente Lagrangiano, $L = \frac{1}{2}m[r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2]$, que corresponde a la energía cinética asociada al satélite. A lo largo de la coordenada θ tenemos, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_{\theta}r$, $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - 0 = F_{\theta}r$, $m2r\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - 0 = F_{\theta}r$, y para la coordenada r se tiene que, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = F_r - \frac{km}{r^2}$, $\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 = F_r - \frac{km}{r^2}$, $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r - \frac{km}{r^2}$. Considerando $x_1 = r$, $x_2 = dr/dt$, $x_3 = \theta$, $x_4 = d\theta/dt$, $u_1 = F_r(t)$ y $u_2 = F_{\theta}(t)$, se tiene la representación en variables de estado dada por, $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1x_4^2 - k/x_1^2 + u_1/m \\ x_4 \\ -2x_3x_4/x_1 + u_2/mx_1 \end{bmatrix}$, es posible apreciar que las ecuaciones de x_2 y x_4 son no lineales. ♣



B . Sistemas Eléctricos

Los sistemas eléctricos a considerar en este curso están constituidos por los siguientes elementos básicos.

Condensadores. Un condensador es un elemento almacenador de energía en forma de carga eléctrica, la expresión que rige su comportamiento es,

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt},$$

donde, i_c es la corriente que circula a través del condensador y v_c es el voltaje aplicado a sus terminales

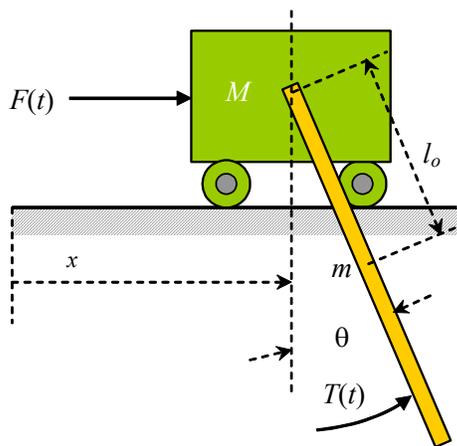


Fig. A.7 Carro con péndulo.

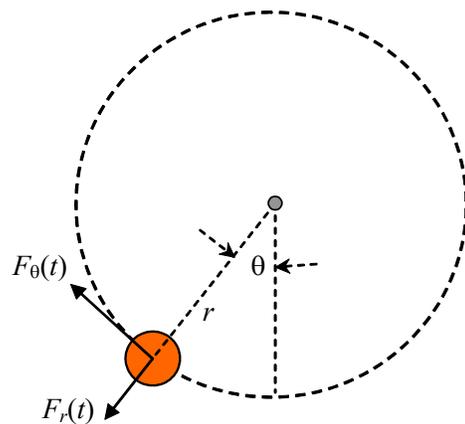


Fig. A.8 Satélite en órbita.

(la corriente entra por el terminal positivo).

Inductores. Los inductores también son elementos de almacenamiento de energía pero esta vez en forma de flujos magnéticos, la expresión que rige su comportamiento es,

$$v_L = L \frac{di_L}{dt},$$

donde, v_L es el voltaje aplicado en los terminales del inductor e i_L es la corriente que circula por éste (la corriente entra por el terminal positivo).

Resistencias. Estos elementos son disipadores de energía, en donde la corriente circulante a través de ellos es proporcional al voltaje aplicado a sus terminales.

$$v_R = Ri_R,$$

donde, v_R es el voltaje aplicado en los terminales del resistor e i_R es la corriente que circula por éste (la corriente entra por el terminal positivo).

Utilizando estos tres elementos, además de las fuentes de voltaje y corriente controladas o no controladas, y en conjunto con las Leyes de Kirchoff de voltaje y de corriente (conservación de energía), es posible modelar la totalidad de los sistemas eléctricos.

Ejemplo A.8. Este es un ejemplo eléctrico que corresponde a un circuito RLC alimentado por una fuente de voltaje. A partir de la Fig. A.9 es posible apreciar que la fuente de tensión $e(t)$ alimenta a una inductancia L , resistencia R , y un capacitor C , todos en serie. Para modelar este circuito es conveniente definir la dinámica de las variables corriente $i(t)$ en el inductor y voltaje $v(t)$ en el capacitor utilizando las leyes de Kirchoff. Así tenemos, $e = Ri + L \frac{di}{dt} + v$, $i = C \frac{dv}{dt}$, utilizando la última expresión, $e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt$, dado que $i = \frac{dq}{dt}$, queda, $e = R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q$, nótese la similitud de esta expresión con el modelo encontrado del sistema ilustrado en la Fig. A.1, en particular si se considera $C = 1/k$, $L = m$ y $R = d$. Este modelo se puede expresar en ecuaciones de estado considerando, $q = x_1$, $i = x_2$ y $e = u$ quedando, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$ que es lineal. ♣

Ejemplo A.9. El circuito considerado en este ejemplo es un poco más complejo que el anterior e incluye fuentes de tensión y de corriente controladas, Fig. A.10. El modelamiento se hace en forma idéntica al anterior, tenemos para la malla de entrada, $e = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a$, luego para el primer nodo de la malla de salida, $i_e = C_m \frac{dv_m}{dt} + i_t$, para la malla central de salida $v_m = L_t \frac{di_t}{dt} + v_l$ y para el segundo nodo de la salida $i_t = \frac{1}{R_l} v_l + C_l \frac{dv_l}{dt} + i_l$. Considerando $e_a = k_m v_m$, $i_e = k_m i_a$ y ordenando las

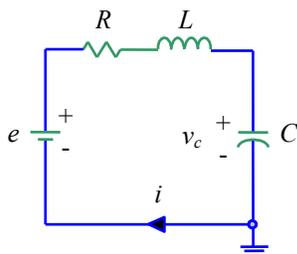


Fig. A.9 Circuito serie RLC.

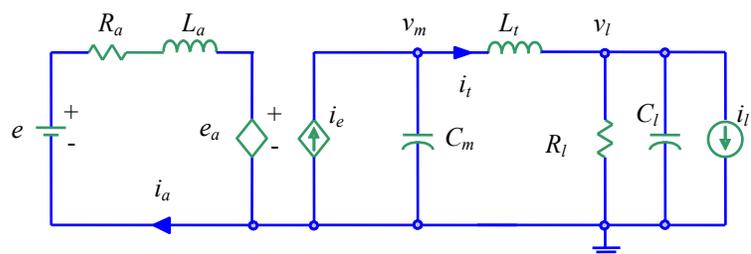


Fig. A.10 Circuito con fuentes independientes.

ecuaciones nos queda, $\frac{dv_m}{dt} = \frac{k_m}{C_m} i_a - \frac{1}{C_m} i_t$, $\frac{dv_l}{dt} = \frac{1}{C_l} i_t - \frac{1}{C_l} i_l - \frac{1}{R_l C_l} v_l$, $\frac{di_t}{dt} = \frac{1}{L_l} v_m - \frac{1}{L_l} v_l$, $\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} e - \frac{k_m}{L_a} v_m - \frac{1}{L_a} R_a i_a$.

Denominamos $x_1 = v_m$, $x_2 = v_l$, $x_3 = i_t$, $x_4 = i_a$, $u = e$, $p = i_l$, obteniendo en forma inmediata la representación en ecuaciones de

estado,
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/C_m & k_m/C_m \\ 0 & -1/R_l C_l & 1/C_l & 0 \\ 1/L_l & -1/L_l & 0 & 0 \\ -k_m/L_a & 0 & 0 & -R_a/L_a \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/L_a \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/C_l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
 Nótese que la corriente i_l es una perturbación en el sistema. ♣

Ejemplo A.10. Modelar y simular el circuito elevador ilustrado en la Fig. A.11(a). **R.:** El circuito de la Fig. A.11(b) muestra que para $S_w = 1$, $e = L \frac{di}{dt}$ y $0 = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$ y el de la Fig. A.11(c) muestra que para $S_w = 0$, $e = L \frac{di}{dt} + v$ y $i = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$. Lo que se puede escribir como, $e = L \frac{di}{dt} + v(1 - S_w)$ y $i(1 - S_w) = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$. La razón entre el tiempo encendido y el tiempo de apagado más apagado es $d(t)$, en la práctica, para la operación del circuito se compara una señal continua $d(t)$ con una diente de sierra, Fig. A.11(d), y de la comparación resulta $S_w(t)$ de encendido-apagado del switch como ilustrado en la Fig. A.11(e). La simulación para $R = 12 \Omega$, $C = 200 \mu\text{F}$, y $L = 5 \text{ mH}$ se encuentra en la Fig. A.11(f), donde $e(t)$ aumenta de 6 a 7 V en $t =$

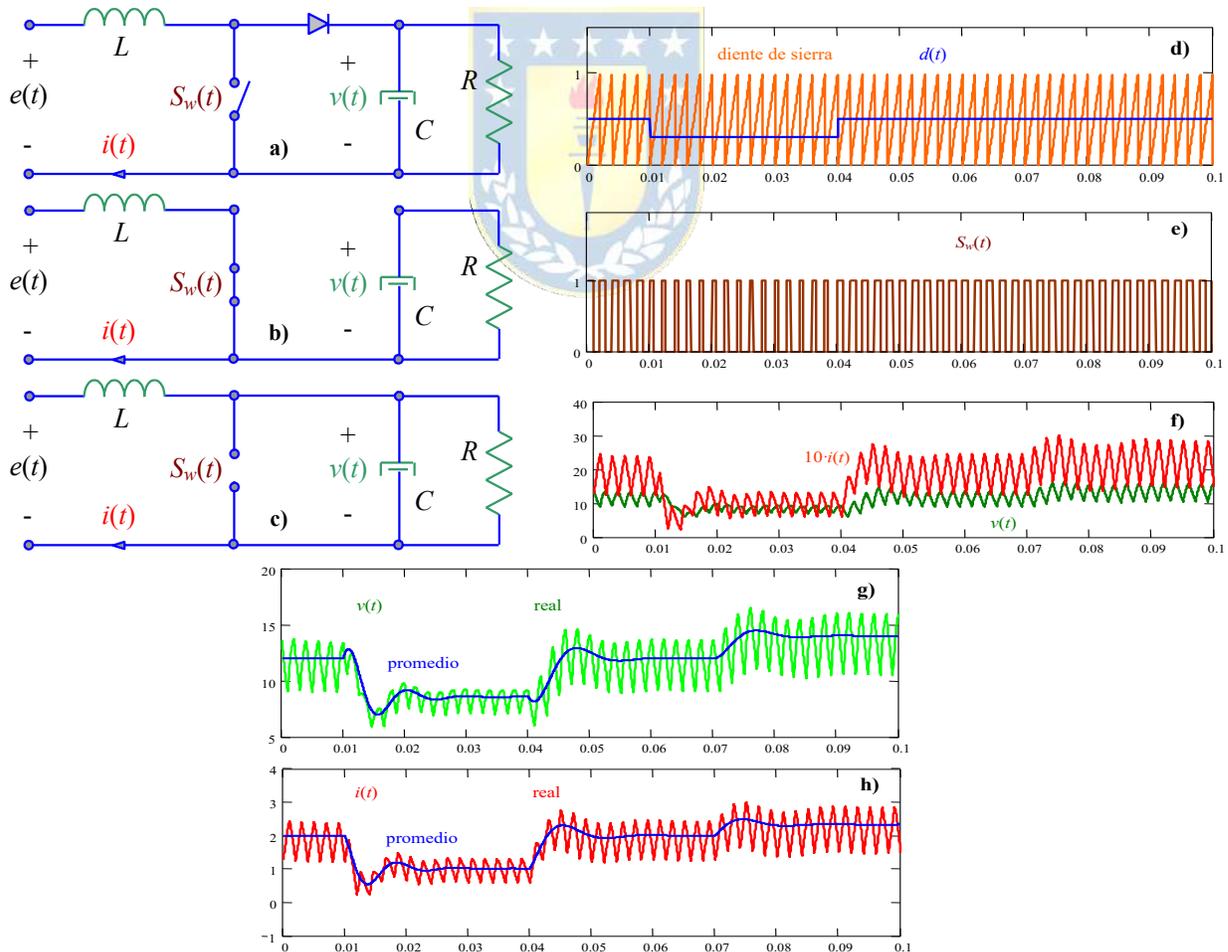


Fig. A.11 Circuito no-lineal dc/dc elevador; **a)** circuito, **b)** equivalente, $S_w = 1$ (ON), **c)** equivalente, $S_w = 0$ (OFF), **d)** generación de S_w , **e)** señal S_w , **f)** simulación modelo real (con switch), **g)** comparación de voltajes, **h)** comparación de corrientes.

70 ms. Asumiendo $x_1 = v$ y $x_2 = i$, entonces el modelo queda, $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{C}(1-u) - \frac{x_1}{RC} \\ -\frac{x_1}{L}(1-u) + \frac{p}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \end{bmatrix}$, donde x_1 es el

voltaje v , x_2 es la corriente i , u es la señal de conmutación S_w , y p es la tensión de entrada e . Este modelo es claramente no lineal y la entrada es una señal no continua por lo que se opta por un modelo promedio. Este se obtiene al reemplazar la señal $S_w(t)$ por $d(t)$, lo que se justifica en la medida que la triangular tiene una alta frecuencia. Así, el modelo resultante es $e = L \frac{di}{dt} + v(1-d)$ y $i(1-d) = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$, cuya simulación está en la Fig. A.11(g) y (h). El modelo en variables de estado no cambia, excepto que la entrada ahora es $u(t) = d(t)$. Por lo tanto, el modelo resultante es no lineal también debido a la multiplicación de variables de estado con la entrada. ♣

C . Sistemas Electromecánicos

Los sistemas electromecánicos permiten transformar la energía eléctrica en energía mecánica y viceversa, el elemento típico es la maquina eléctrica.

Ejemplo A.11. Este es un ejemplo electromecánico correspondiente a un motor de corriente continua conectado a una carga a través de un eje rígido como se muestra en la Fig. A.12. El campo de la máquina es alimentado con una tensión constante. Para plantear el modelo en su parte eléctrica y debido a que la tensión del campo es constante, la dinámica de la corriente de armadura es, $v_a = L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + e_a$, donde v_a es el voltaje aplicado a la armadura, i_a es la corriente de armadura y e_a es el voltaje inducido en la máquina debido a la velocidad del rotor. Por otro lado, las ecuaciones mecánicas del sistema son, $J_l \frac{d^2\theta}{dt^2} = t_e - d \frac{d\theta}{dt} - t_l$, donde θ es el ángulo de desplazamiento del eje, t_e es el torque eléctrico producido por la corriente de armadura y t_l es el torque producido por la carga. Ahora para poder terminar el modelo es necesario encontrar relaciones entre las variables eléctricas y mecánicas. Estas relaciones son $e_a = k_m \omega$ y $t_e = k_m i_a$; reemplazandolas en el modelo y considerando $\omega = d\theta/dt$ se tiene, $L \frac{di_a}{dt} = v_a - Ri_a - k_m \omega$, $J_l \frac{d\omega}{dt} = k_m i_a - d\omega - t_l$, denominamos $x_1 = i_a$, $x_2 = \omega$, $u = v_a$, $p = t_l$ y la representación en variables de estado queda, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R/L & -k_m/L \\ k_m/J_l & -d/J_l \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_l \end{bmatrix}$ que es lineal. ♣

Ejemplo A.12. En este ejemplo se considera el mismo sistema del ejemplo anterior pero considerando un eje elástico Fig. A.13. La ecuación eléctrica del motor es de igual forma pero esta vez la velocidad es la del eje del motor ω_m . $v_a = L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + k_m \omega_m$. Ahora debemos agregar la ecuación dinámica del motor, $J_m \frac{d\omega_m}{dt} = k_m i_a - t_l$, donde t_l es el torque producido por el eje elástico sobre el eje del motor y que es reflejado también sobre el eje de la carga. Escribimos la ecuación dinámica de la carga pero esta vez referida a la velocidad de la carga ω_l , $J_l \frac{d\omega_l}{dt} = t_l - d_l \omega_l - t_l$. Luego agregamos la ecuación

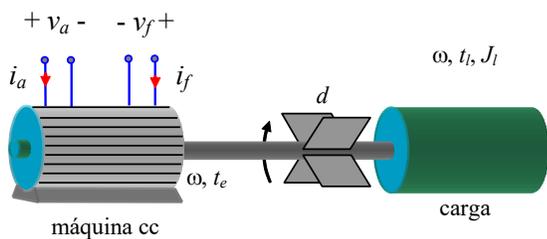


Fig. A.12 Accionamiento en c.c.

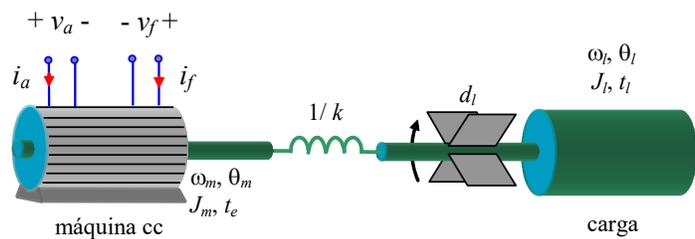


Fig. A.13 Accionamiento en c.c. con eje flexible.

dinámica del torque t_i , $\frac{1}{k} \frac{dt_i}{dt} = \omega_m - \omega_l$. Considerando $x_1 = \omega_m$, $x_2 = \omega_l$, $x_3 = t_i$, $x_4 = i_a$, $u = v_a$, $p = t_i$, se tiene,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/J_m & k_m/J_m \\ 0 & -d_l/J_l & 1/J_l & 0 \\ k & -k & 0 & 0 \\ -k_m/L & 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El modelo obtenido es lineal y de cuarto orden a diferencia del anterior que solamente era de segundo orden. ♣

Ejemplo A.13. El siguiente ejemplo es un sistema de levitación magnética compuesto por un electro-imán al cual se le puede imponer una corriente deseada y el campo magnético producido permite sostener una bola de acero de masa m , Fig. A.14. El modelado de este sistema se realiza planteando primero las ecuaciones eléctricas del electro-imán $e = L \frac{di}{dt} + Ri$, donde e es

le tensión aplicada e i es la corriente circulante. La ecuación mecánica por su parte es, $m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg + F_m + k(l_0 - x) - d \frac{dx}{dt}$,

donde F_m es la fuerza magnética producida pro el electroimán. Ahora es necesario relacionar las ecuaciones anteriores haciendo $F_m = k_i i^2 / (y + a) = k_i i^2 / (l_1 - x + a)$, reemplazando en las ecuaciones anteriores y definiendo $x_1 = i$, $x_2 = x$, $x_3 = dx/dt$ y

$u = e$ se tiene la representación en variables de estado, $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Rx_1/L + u/L \\ x_3 \\ -g + k_i x_1^2 / [m(l_1 - x_2 + a)] + k(l_0 - x_2)/m - dx_3/m \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -Rx_1/L \\ x_3 \\ -g + k_i x_1^2 / [m(l_1 - x_2 + a)] + k(l_0 - x_2)/m - dx_3/m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

El modelo resultante es no lineal debido a la presencia de términos cuadráticos. Nótese que el modelo anterior puede ser escrito en forma generalizada como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$. $R = 1 \Omega$, $L = 50 \text{ mH}$. Un ser de parámetros puede ser $a = 2 \text{ cm}$ y $k_i = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{s}^2 \text{A}^2)$, $l_1 = 50 \text{ cm}$, $l_r = 20 \text{ cm}$, $l_0 = 30 \text{ cm}$, $M = 250 \text{ gr}$, $k = 24.5 \text{ kg/s}^2$, $d = 1.5 \text{ kg/s}$ y $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. ♣

D . Sistemas Hidráulicos

En esta sección se consideran sistemas de fluidos incomprensibles, es decir cuya densidad no varía con la presión, y conducidos en sistemas cerrados, tales como cañerías. Aplicando ley de conservación de energía a un sistema que está en régimen permanente; es decir, no hay variación temporal del volumen acumulado en la cañería, y que representa un flujo único, como se muestra en la Fig. A.15, se tiene que,

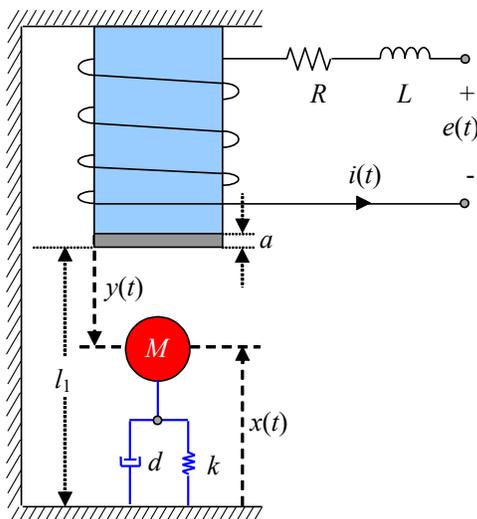


Fig. A.14 Levitador magnético.

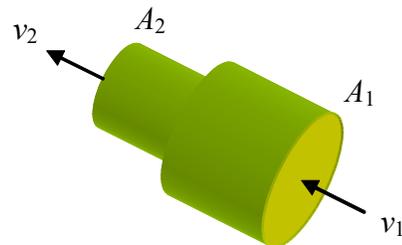


Fig. A.15 Propiedades hidráulicas en una tubería.

$q_1 = q_2$. Es decir, el flujo volumétrico en m^3/s que entra es igual al que sale, o bien, $A_1v_1 = A_2v_2$, donde A_1 y A_2 son las secciones de las cañerías y v_1 y v_2 las velocidades. El balance de energía a su vez es:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \beta,$$

donde el primer término representa la energía potencial, el segundo la energía necesaria para ingresar el fluido al sistema, y la última es la energía cinética correspondiente. La constante β representa las pérdidas debido al roce y γ es el peso específico del fluido. Cuando existe una restricción en el sistema que lleva el fluido se produce una redistribución de la energía a medida que el fluido se acerca a las restricciones, consideremos el sistema descrito en la Fig. A.15, de la relación anterior con $z_1 = z_2$ se obtiene que la

velocidad de salida es $v_2 = \sqrt{\frac{2A_2^2}{A_1^2 - A_2^2} \frac{g}{\gamma} \Delta p}$, usando esta expresión y la relación dada por el balance de materia $A_1v_1 = A_2v_2$ se tiene que el flujo que pasa por la restricción es

$$q = A_2^2 \sqrt{\frac{2}{A_1^2 - A_2^2} \frac{g}{\gamma} \Delta p} = k_v \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}},$$

donde, k_v es en m^2 , ρ en kg/m^3 ; es decir, el flujo a través de la restricción es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de presión, y la constante de proporcionalidad depende de la relación de áreas. Se desprende que el fluido se acelera al pasar por la restricción y debido a que el balance de energía se debe cumplir, es necesario que la presión en la sección menor disminuya.

Ejemplo A.14. En este ejemplo se modela el estanque cuadrado de la Fig. A.16, cuyo lado mide l y la altura del líquido se denota por h . Este estanque es alimentado por un flujo de entrada f_e y en su parte inferior existe un flujo de salida f_s dependiente de la hidrostática. Para modelar este sistema se plantea inicialmente la función que describe al área, en este caso es, $A(y) = l^2$. Luego calculamos el volumen integrando la función anterior con respecto a la altura, $dV(h) = A(h)dh$, por lo que $V(h) = \int_0^h A(y)dy = l^2h$. Ahora aplicamos la ley de conservación de materia que nos dice, $\frac{dV(h)}{dt} = \frac{dV(h)}{dh} \frac{dh}{dt} = f_e - f_s$.

Considerando el flujo de salida dependiente de la presión hidrostática se tiene que $f_s = k_v \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} = k_v \sqrt{\frac{\rho gh}{\rho}} = k_v \sqrt{gh}$, por lo que $l^2 \frac{dh}{dt} = f_e - k_v \sqrt{gh}$. Finalmente, la expresión es, $\frac{dh}{dt} = \frac{f_e}{l^2} - \frac{k_v}{l^2} \sqrt{gh}$. Como es posible apreciar, el modelo resultante es

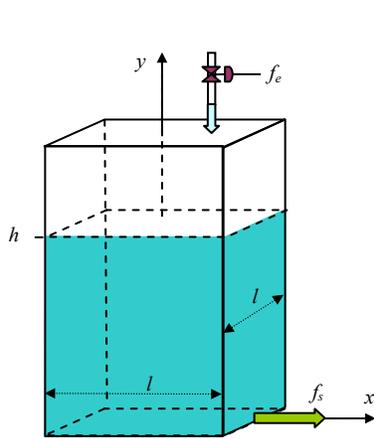


Fig. A.16 Estanque de área constante.

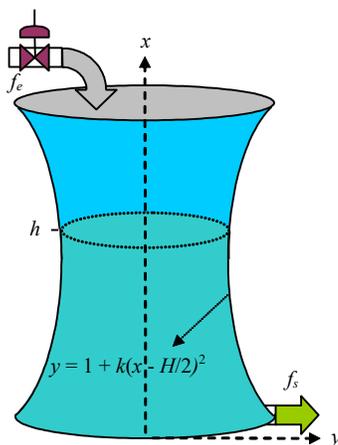


Fig. A.17 Estanque de área variable.

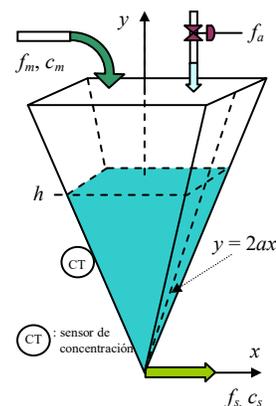


Fig. A.18 Estanque diluidor.

no-lineal ya que tiene a la variable h en forma racional. ♣

Ejemplo A.15. Este ejemplo plantea un estanque en las mismas condiciones que el anterior pero cuya forma es cóncava Fig. A.17. El área en función de la altura es, $A(x) = \pi(1+k(x-H/2)^2)^2$. Por lo tanto, $dV(h)/dh = A(h) = \pi(1+k(h-H/2)^2)^2$. Aplicando la ley de conservación de materia se tiene, $\frac{dV(h)}{dt} = \frac{dV(h)}{dh} \frac{dh}{dt} = \pi(1+k(h-H/2)^2)^2 \frac{dh}{dt} = f_e - k_v \sqrt{gh}$. Así se tiene, $\frac{dh}{dt} = \frac{f_e - k_v \sqrt{gh}}{\pi(1+k(h-H/2)^2)^2}$. La ecuación dinámica es de tipo no lineal. ♣

Ejemplo A.16. En este ejemplo se plantea modelar un estanque triangular como el mostrado en la Fig. A.18. Este estanque recibe un flujo f_m con una cierta concentración c_m de alguna componente y por otro lado es alimentado con un flujo f_a puro. En este caso el área corresponde a la función $A(y) = (y/a)^2$. El volumen queda $V(h) = \frac{1}{3} \frac{h^3}{a^2}$. Se plantea primero la ecuación de balance de materia para todo el fluido quedando, $\frac{dV(h)}{dt} = \frac{dV(h)}{dh} \frac{dh}{dt} = f_m + f_a - f_s$, por lo que, $\frac{dh}{dt} = \frac{f_m + f_a - k_v \sqrt{gh}}{h^2 / a^2}$. Por otro lado, se hace un balance de materia para el componente que se diluye en el estanque, este queda dado por $\frac{d[V(h)c_s]}{dt} = \frac{dV(h)}{dt} c_s + V(h) \frac{dc_s}{dt} = \frac{dV(h)}{dh} \frac{dh}{dt} c_s + V(h) \frac{dc_s}{dt} = f_m c_m + f_a 0 - f_s c_s$, lo que se reduce a, $(f_m + f_a - k_v \sqrt{gh})c_s + \frac{1}{3} \frac{h^3}{a^2} \frac{dc_s}{dt} = f_m c_m - k_v \sqrt{gh} c_s$ o bien, $\frac{dc_s}{dt} = \frac{f_m c_m - f_m c_s - f_a c_s}{h^3 / (3a^2)}$. Considerando $x_1 = h$, $x_2 = c_s$, $u = f_a$, $p_1 = f_m$ y $p_2 = c_m$ se tiene,

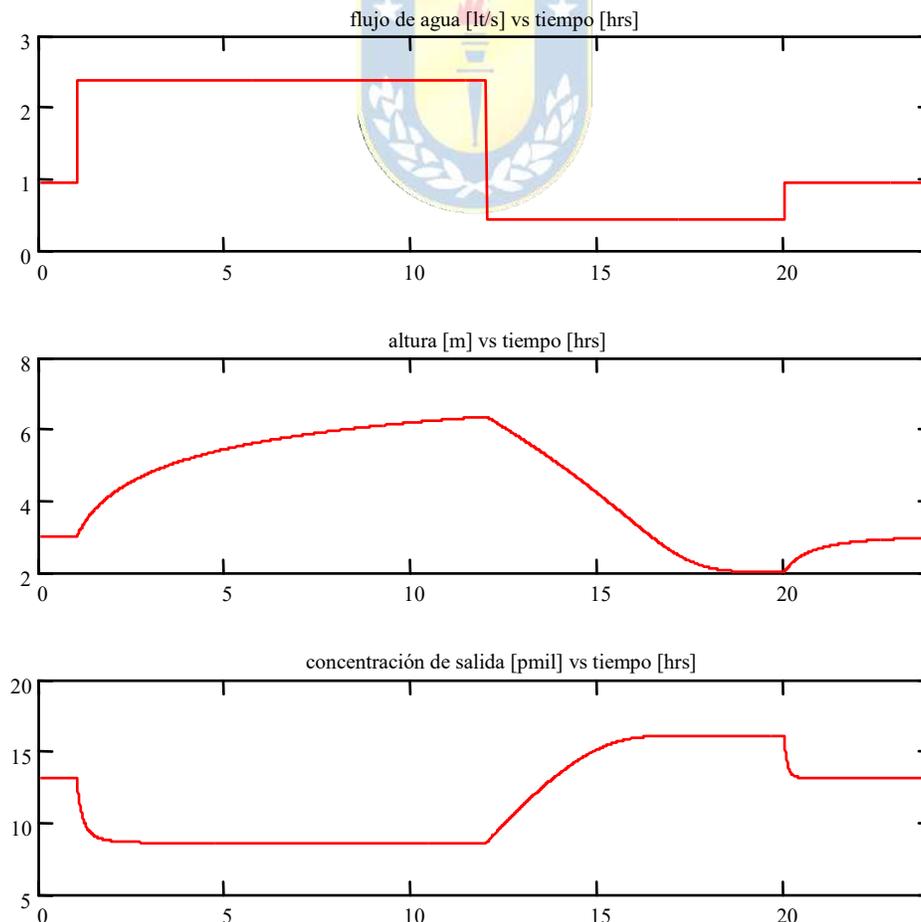


Fig. A.19 Simulación del estanque diluidor.

$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2(p_1 + u - k_v \sqrt{gx_1})/x_1^2 \\ 3a^2(p_1 p_2 - (p_1 + u)x_2)/x_1^3 \end{bmatrix}$. Nótese que para este caso la mejor forma de representarlo en forma generalizada es $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$. En la Fig. A.19 se muestran los resultados de la simulación de este sistema. ♣

E . Sistemas Térmicos

En los sistemas térmicos la energía es transferida y guardada en forma de calor. La mayoría de los procesos térmicos muestran efectos que pueden ser descritos sólo por sistemas de parámetros distribuidos, por esta razón solo unos pocos sistemas térmicos industriales han sido modelados dinámicamente hasta ahora, entre los cuales figuran los intercambiadores de calor y hornos continuos. La principal dificultad en la modelación de este tipo de sistemas en contraste al caso eléctrico radica en que el flujo de calor no necesariamente sigue un camino específico.

Se distinguen traspasos o flujos de calor por conducción, por conducción a través de una película entre materiales diferentes, por radiación y por convección. Mientras los tres primeros se efectúan entre objetos de diferente temperatura, la convección esta relacionada al transporte de masa.

Conducción de calor. La relación básica para el flujo de calor a través de un material homogéneo entre dos secciones transversales paralelas es la Ley de Fourier, Fig. A.20,

$$q = KA \frac{T_1 - T_2}{d},$$

donde, q es el flujo de calor, A el área de sección transversal, T_1, T_2 temperaturas, d longitud y K es la conductividad térmica.

El flujo de calor a través de una película delgada es un caso especial de conducción. Se supone que existe entre materiales de diferentes fases como, por ejemplo, un sólido a una temperatura y un líquido o gas bien mezclado a otra temperatura. La ecuación empleada para describir este fenómeno se conoce como Ley de Enfriamiento de Newton,

$$q = hA(T_1 - T_2),$$

donde h es el coeficiente peculiar o de traspaso de calor.

Radiación de calor. Para altas temperaturas existe una gran transferencia de calor debido a radiación, esto se explica por la relación de Boltzmann:

$$q = A\epsilon\sigma T^4,$$

es decir, un objeto produce un flujo de calor debido a la radiación electromagnética, que es proporcional

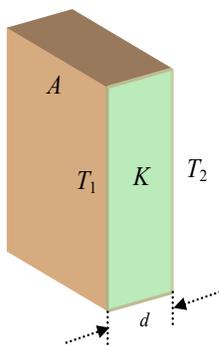


Fig. A.20 Conducción de calor.

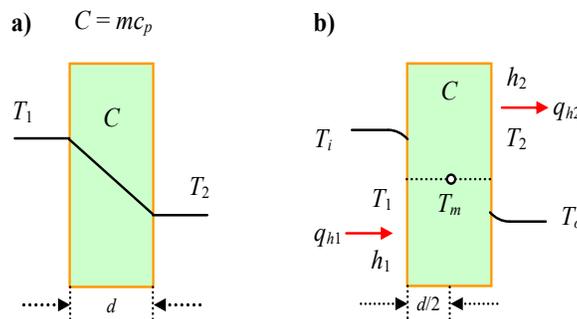


Fig. A.21 Modelo de muralla simplificado; a) S.S., b) parámetros concentrados.

a su superficie de emisividad ε y a su temperatura elevada a la cuarta. La constante σ , es la constante de Stefan-Boltzmann. Para un radiador negro, la emisividad ($\varepsilon = 1$). Generalmente, la emisividad depende de la frecuencia de radiación.

Para deducir un modelo de traspaso de calor entre dos objetos hay que considerar más detalles físicos. Si una energía de radiación E incide sobre (o ilumina) una sección transversal A con emisividad ε_2 , una parte $\varepsilon_2 E$ se absorbe y otra parte $(1 - \varepsilon_2)E$ es reflejada independiente de la temperatura de A . Si todas las emisiones, absorciones y reflexiones son evaluadas en la superficie de los dos objetos el flujo de calor puede ser descrito como:

$$q = 4.96 A \varepsilon (T_1^4 - T_2^4).$$

El coeficiente de emisividad ε depende de ε_1 y ε_2 y de la configuración geométrica de los cuerpos.

Convección. El flujo de calor debido al flujo de masa es:

$$q = cTW,$$

donde W es el flujo másico, c es el calor específico, y T es la temperatura.

Existen tablas con valores de K , h , ε y c para materiales y situaciones diversas.

La Transferencia de calor a través de una muralla. La expresión dada por $q = KA(T_1 - T_2)/d$ es una aproximación que es válida tan sólo bajo supuestos. Si ambas caras de la muralla se extienden a infinito el flujo de calor es unidimensional. Adicionalmente, si el material es homogéneo, el gradiente de temperatura a través de la muralla es constante en condiciones de S.S. como se muestra en la Fig. A.21. Consideremos que esta muralla esta rodeada de algún fluido y que su temperatura interior se puede considerar concentrada en un punto y denotada por T_m . Al estar la muralla en contacto con fluidos, se forma un pequeño gradiente de temperatura entre el fluido y la muralla, que se puede representar como una capa, llamada capa límite. Las temperaturas T_1 y T_2 son las temperaturas en la vecindad de la muralla, T_i y T_o y son las temperaturas fuera de las capas límites como se ilustra en la Fig. A.21. Toda capa límite posee un coeficiente de transferencia de calor h . El flujo de calor que entra por la muralla esta dado por:

$$q_{h1} = h_1 A (T_i - T_1) = \frac{2kA}{d} (T_1 - T_m),$$

de esta ecuación se puede despejar T_1 en función de las otras temperaturas como,

$$T_1 = \frac{2kT_m + dh_1 T_i}{2k + dh_1},$$

de forma similar se puede encontrar una relación entre T_2 , T_m y T_o . El balance de energía al interior de la muralla es:

$$\frac{d(CT_m)}{dt} = C \frac{dT_m}{dt} = c_p m \frac{dT_m}{dt} = q_{h1} - q_{h2},$$

reemplazando los valores de T_1 y T_2 se obtiene

$$C \frac{dT_m}{dt} = \frac{2kh_1 A}{2k + dh_1} (T_i - T_m) - \frac{2kh_2 A}{2k + dh_2} (T_m - T_o),$$

Notar que el término $a_1 = \frac{2kh_1 A}{2k + dh_1}$ representa la conductancia que existe entre los puntos donde se tiene

T_i y T_m . Este a su vez se puede escribir como la suma de las resistencias térmicas de la capa límite más la resistencia asociada a la conducción en la muralla, $R_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{2k + dh_1}{2kh_1A} = \frac{1}{h_1A} + \frac{d}{2kA}$. Similarmente se puede obtener $a_2 = \frac{2kh_2A}{2k + dh_2} = \frac{1}{R_2}$. Por lo que,

$$C \frac{dT_m}{dt} = \frac{1}{R_1}(T_i - T_m) - \frac{1}{R_2}(T_m - T_o).$$

En muchos casos se puede considerar que la masa de la muralla es muy pequeña y por lo tanto la dinámica se puede despreciar, de esta forma $q_{h1} - q_{h2} = c_p m \frac{dT_m}{dt}$ se simplifica en $q_{h1} = q_{h2}$ con la cual se puede obtener la expresión de T_m siguiente $T_m = \frac{a_1 T_i + a_2 T_o}{a_1 + a_2}$, además de la expresión para $q_{h1} = q_{h2} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} (T_i - T_o)$.

Ejemplo A.17. Considere el caso de una habitación como ilustrada en la Fig. A.22. Suponga que el flujo de calor es del exterior al interior, es decir, $T_o > T_m > T_i$. Aplicando la ley de conservación de energía se tiene, $C_1 \frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{R_1}(T_m - T_i)$ y

$$C_2 \frac{dT_m}{dt} = \frac{1}{R_2}(T_o - T_m) - \frac{1}{R_1}(T_m - T_i). \clubsuit$$



A.2 Analogías de Sistemas

Los modelos análogos son de naturaleza tal que, respecto del proceso, son gobernados por leyes de equivalencias, de modo que es posible observar comportamientos también equivalentes por medio de los valores que toman algunas de sus variables. Como ejemplo se tienen tres elementos físicos como se esquematiza en la Fig. A.23.

Allí se observa una red con flujo q , entre dos puntos con diferencia de presión Δp ; un elemento de circuito eléctrico, por la cual circula una corriente i , entre dos puntos con una diferencia de tensión Δv ; y una pared por la cual se transfiere un flujo de calor q , debido a una diferencia de temperatura ΔT . En estos casos, los comportamientos son equivalentes entre sus variables. La Tabla. A.1 resume estas equivalencias.

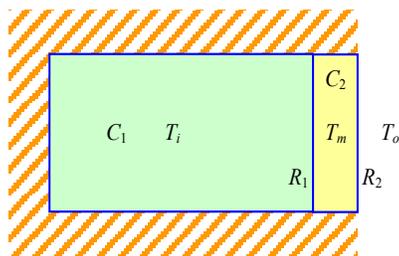


Fig. A.22 Modelo simplificado de una habitación.

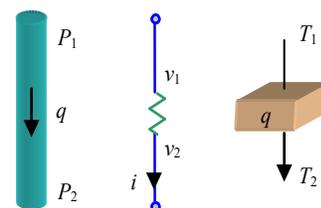


Fig. A.23 Fenómenos equivalentes.

Tabla. A.1 Fenómenos equivalentes.

Analogía	Esfuerzo	Flujo	Inductor	Capacitor	Resistencia
Eléctrica	Voltaje	Corriente	Inductor	Capacitor	Resistencia
Trasnacional	Fuerza	Velocidad	Cuerpo	Resorte	Fricción
Rotacional	Vel. Angular	Torque	Eje elástico	Inercia	Fricción
Hidráulico	Presión	Flujo líquido	Tubo	Estanque	Orificio
Térmico	Temperatura	Flujo calor	-	Masa	Res. térmica

Ejemplo A.18. Estudiar la equivalencia entre el circuito eléctrico del Ejemplo A.9 ilustrado en la Fig. A.24 y el motor de c.c. con eje flexible del Ejemplo A.12 ilustrado en la Fig. A.24. **R.:** En el Ejemplo A.9 se encontró que el modelo del circuito

está dado por $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/C_m & k_m/C_m \\ 0 & -1/R_l C_l & 1/C_l & 0 \\ 1/L_t & -1/L_t & 0 & 0 \\ -k_m/L_a & 0 & 0 & -R_a/L_a \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/L_a \end{bmatrix}$, y $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/C_l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, donde, $x_1 = v_m, x_2 = v_l, x_3 = i_l, x_4 =$

$i_a, u = v_a, p = i_i$; por otro lado, en el Ejemplo A.12 se encontró que el modelo del motor está dado por

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/J_m & k_m/J_m \\ 0 & -d_l/J_l & 1/J_l & 0 \\ k & -k & 0 & 0 \\ -k_m/L & 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$, y $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, donde, $x_1 = \omega_m, x_2 = \omega_l, x_3 = t_l, x_4 = i_a, u = v_a, y p = t_l$.

De la definición de las variables de estado se comprueba la equivalencia entre voltajes y velocidades angulares, corrientes y torques; por otro lado, la equivalencia entre parámetros es capacitor e inercia, resistencia y fricción, e inductancia y eje elástico. ♣

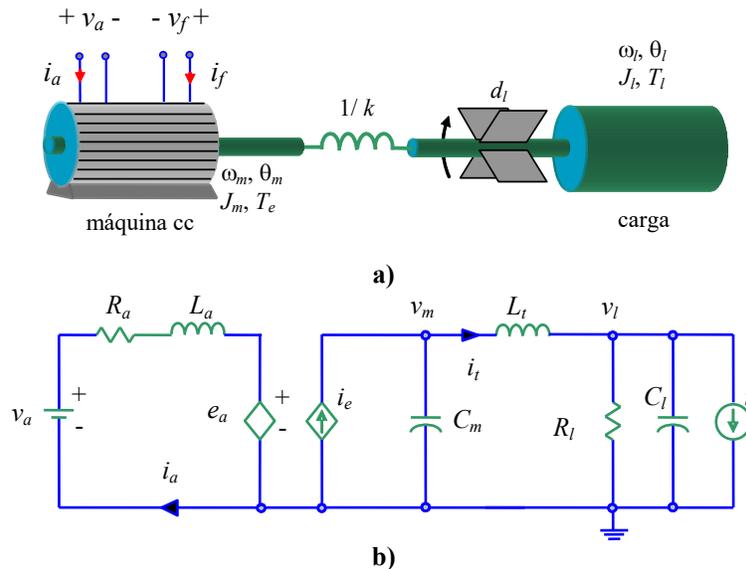


Fig. A.24 Modelos equivalentes; a) accionamiento c.c. con eje flexible, b) circuito eléctrico.

A.3 Ejercicios Propuestos.

Resuelva los problemas siguientes. Anote todo su trabajo.

Nivel básico.

- 1.- Para las siguientes realidades físicas, escoja un objetivo y escriba las ecuaciones asociadas a éste.
 - (a) En la Fig. A.25(a) se muestra un sistema de estanques donde todos los flujos son volumétricos y las áreas seccionales de los estanques son $A_1 = 4\text{m}^2$, $A_2 = 3\text{m}^2$, y $A_3 = 2\text{m}^2$, respectivamente. La bomba de descarga del estanque de área A_3 entrega un flujo que es proporcional a la velocidad de la bomba v , considere que el valor de esta constante es $0.01 \text{ (lt/min)/(rpm)}$. El flujo F_1 está dado por condiciones externas a este proceso. Considere que los flujos de descarga F_2 , F_3 , F_4 son proporcionales a la raíz cuadrada de las presiones hidrostáticas que lo generan, las constantes respectivas son 10, 5 y 8.
 - (b) En la Fig. A.25(b) se muestra un modelo idealizado del sistema masa-suspensión activa de un automóvil. El desplazamiento y_r es depende de la superficie del camino y u es una fuerza externa utilizada para mejorar la suspensión. m representa la masa de las ruedas junto a las barras de transmisión, M corresponde a la masa restante del vehículo (carrocería, asientos, etc.). El sistema de suspensión es modelado por d y un resorte k_1 ; el efecto de los neumáticos se representa por k_2 (se ignora el desplazamiento lateral). Considere que $M = 300 \text{ kg}$, $m = 50 \text{ kg}$, $k_1 = 6000 \text{ N/m}$, $k_2 = 30000 \text{ N/m}$, $d = 600 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, y $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Cuando los resortes están em reposo se tiene que $x_1(t)$ es 1.05 m y $x_2(t)$ es 0.25 m .
 - (c) En la Fig. A.25(c) se muestra una central generadora solar. La tensión $v_c(t)$ es manipulada para que el panel mayor siempre esté perpendicular al sol y así generar la mayor tensión posible en los terminales v_{out} . La relación entre estas variables es: $\tau \frac{d^2\theta_{cel}}{dt^2} + \frac{d\theta_{cel}}{dt} = k_p v_c$. A manera de sensores, usted dispone de dos celdas solares auxiliares que están montadas en el plano de la celda solar más una inclinación de $\pm 10^\circ$ como se muestra en la Fig. A.25(c). Estas celdas auxiliares generan tensiones v_1 y v_2 proporcionales a los ángulos incidentes θ_1 y θ_2 , respectivamente (se considera que $0 < \theta_1, \theta_2 < 90^\circ$). Las relaciones son: $v_1 = k_{aux}\theta_1$ con $\theta_1 = \theta_{sol} - 10^\circ - \theta_{cel}$ y $v_2 = k_{aux}\theta_2$ con $\theta_2 = -\theta_{sol} + 170^\circ + \theta_{cel}$. Nótese que el sol es perpendicular al plano de la celda mayor cuando las tensiones generadas por las celdas auxiliares son iguales. Asumir, $\tau = 10$, $k_p = 5$, $k_{aux} = 0.5$.
 - (d) La Fig. A.25(d) muestra un *estanque de paso* - 4 m de alto - que permite clorar agua para su uso doméstico en una villa de 200 personas. El flujo de agua - a 13°C - es $f_{ae} = 10/1000 \text{ m}^3/\text{s}$, es suministrado por vertientes naturales, no posee concentraciones de cloro apreciables y puede ser considerado constante. El cloro es suministrado mediante el flujo regulable f_c a una concentración $c_c = 11/1000$ fija. El líquido en el estanque está perfectamente agitado para asegurar una concentración uniforme en éste y en el flujo de salida f_{as} el cual es suministrado a otro estanque. Nótese que el estanque es de área circular y con geometría parabólica en sus paredes. Además, considere que el flujo de descarga f_{as} es proporcional a la raíz cuadrada de la presión hidrostática que lo genera con una constante $k_v = 2.2/1000 \text{ m}^2$.

- (e) La Fig. A.25(e) muestra un circuito *reductor de tensión* como los utilizados en equipos portátiles que permite producir una tensión $v(t)$ menor que $e(t)$. La tensión $e(t)$ es de 6 V pero se espera que esté entre 5 y 7 volts en condiciones de temperatura ambiente t_a entre 0 y 55°C. La operación del circuito está sujeta al encendido y apagado del switch. La razón entre el tiempo encendido y el tiempo de encendido más apagado es $d(t)$, en la práctica, para la operación del circuito se compara una señal $d(t)$ con una diente de sierra y de la comparación resulta $Sw(t)$ de encendido-apagado del switch. Los parámetros son $L = 5$ mH, $C = 200$ μ F, $R = 12$ Ω .
- (f) La Fig. A.25(f) muestra una máquina cc que tiene los voltajes de armadura y campo manipulables. La carga, de inercia J_l y sometida a un torque t_l arbitrario, se conecta a través de un sistema de engranajes ($n:1$) y un eje que presenta torsiones con una constante de elasticidad k . El torque generado por al máquina es $T_m = k_1\phi i_a$, con $\phi = k_2 i_f$ y tiene una inercia en el rotor J_m . Por otro lado, el circuito de armadura tiene una resistencia R_a , inductancia L_a , fem $e_a = k_1\phi\omega_m$ y el de campo una resistencia R_f y una inductancia L_f . Se considera que el voltaje de campo v_f es constante de manera

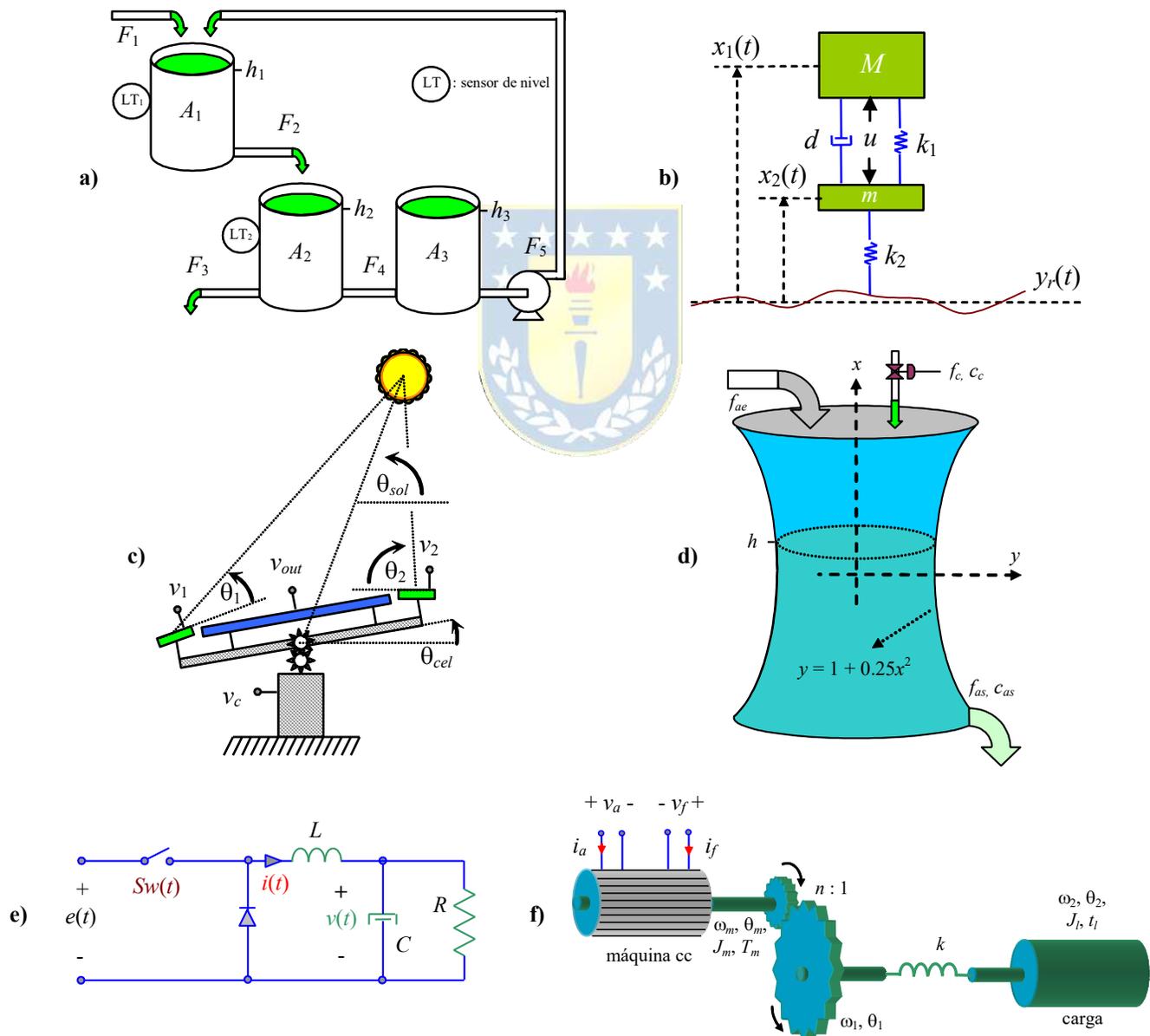


Fig. A.25 Sistemas para ejercitar; **a)** estanques, **b)** amortiguación de un automóvil, **c)** generación solar, **d)** estanque diluidor, **e)** circuito reductor de tensión, **f)** motor de cc con eje flexible.

que $k_1\phi = k_m$. Los parámetros son: $R_a = 1.2 \Omega$, $L_a = 50 \text{ mH}$, $J_m = 8 \cdot 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $J_l = 0.020 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $n = 12$, $k = 500 \text{ Nm/rad}$ y $k_m = 0.05 \text{ Nm/A}$ y $t_l = 0$.

- 2.- Reescriba las ecuaciones anteriores en ecuaciones de estado de modo de tener la representación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ep}$, $\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} + \mathbf{Fp}$ para sistemas lineales y $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ para los no-lineales.
- 3.- Encuentre las ecuaciones estáticas de los sistemas anteriores. Grafique para este caso y para un amplio rango de la(s) entrada(s) el valor de las variables de estado.

Nivel intermedio.

- 1.- Simule para el sistema de la Fig. A.25(a) considerando C.I. nulas y un flujo de entrada de $F_1 = 10 \text{ lts/min}$ y una velocidad de la bomba de $v = 1500 \text{ rpm}$. Repita la simulación pero asegúrese de estar en S.S. para $t = 0$ y aplique un cambio escalón en v de un 10% en $t = 1 \text{ min}$.
- 2.- Simule para el sistema de la Fig. A.25(b) considerando C.I. nulas y una entrada $u = 0.5 \text{ m}$ que aparece en $t = 10 \text{ s}$, asuma $y_r(t) = 0$. Repita la simulación pero asegúrese de estar en S.S. para $t = 0$ y aplique una entrada $u = 0.5 \text{ m}$ que aparece en $t = 2 \text{ s}$, asuma que $y_r(t)$ aparece con un valor de 10 cm en $t = 10 \text{ s}$.
- 3.- Para el sistema de la Fig. A.25(c) determine la tensión $v_c(t)$ para seguir al sol en forma perfecta. Note que antes de todo debe determinar el perfil en el tiempo que tendrá el ángulo del sol $\theta_{sol}(t)$ para un día arbitrario. Simule este caso para 24 horas.
- 4.- Para el sistema de la Fig. A.25(d) encuentre los puntos de equilibrio para obtener concentraciones de cloro en el flujo de salida de salida c_{as} de 0.5/1000, 1.0/1000, 2.0/1000 y 3.0/1000. Determine el perfil dinámico que debe tener el flujo de agua clorada f_c de manera de conseguir concentraciones de cloro c_{as} en estado estacionario en el flujo de salida de 0.5/1000 de 09:00 - 15:00 hrs, de 2.0/1000 de 15:00 - 17:00 hrs, de 0.5/1000 de 17:00 - 00:00 hrs, de 3.0/1000 de 00:00 - 02:00 hrs, y de 1.0/1000 de 02:00 - 09:00 hrs. Simule el sistema aplicando el perfil dinámico para f_c obtenido anteriormente donde el tiempo 0 es las 08:00 hrs.
- 5.- En el sistema de la Fig. A.25(e) la señal $S_w(t)$ debe ser generada comparando una señal diente de sierra de período $T = 2 \text{ ms}$ (amplitud unitaria) y una señal $d(t) = 0.5u(t) - 0.2u(t-0.01) + 0.2u(t-0.04)$. Considere la tensión $e(t) = 6u(t) + u(t-0.07)$ y un rango de simulación de $0 \leq t < 100 \text{ ms}$. Asegúrese de estar en S.S. para $t = 0$.
- 6.- Simule el sistema de la Fig. A.25(f) para C.I. nulas y para $v_a(t) = 3$ para $0 \leq t \leq 2$ y $v_a(t) = -3$ para $2 \leq t \leq 4$. Simule nuevamente, pero esta vez asegúrese de estar en S.S. para $t = 0$.

Nivel avanzado.

- 1.- Un *modelo promedio* del sistema de la Fig. A.25(e) se obtiene reemplazando la señal $S_w(t)$ por la señal $d(t)$ en las ecuaciones originales. Simule el sistema con la señal d y e como utilizadas en el sistema original. Encuentre el punto de operación para $d = d_o = 0.5$ y $e = e_o = 6$, determine un modelo linealizado y simule este sistema para las condiciones anteriores. Compare la simulación del modelo no-lineal original, del modelo promedio y del modelo promedio linealizado.
- 2.- Proponga una transformación para las variables de estado de un circuito RLC – cuya entrada es una fuente sinusoidal – de manera que las nuevas variables de estado sean constantes en S.S..

Bibliografía

- F. Ulaby, A. Yagle, “Signals and Systems: Theory and Applications”, Michigan Publishing, 2018
- R. Dorf, “Modern Control Systems”, Pearson. 2016.
- E. Kreyszig, “Advanced Engineering Mathematics”, John Wiley & Sons 2011.
- K. Ogata, “Ingeniería de Control Moderna”, Prentice-Hall 2010.
- J. Proakis y D. Manolakis, “Tratamiento digital de señales”, Prentice-Hall 2007.
- E.I. Umez-Eronini, “Dinámica de Sistemas de Control”, Thomson Learning 2001.
- B. Kuo, “Sistemas de Control Automático”, Prentice-Hall 2000.
- K. Ogata, “Sistemas de control en tiempo discreto”, Prentice-Hall 2000.
- W. Rugh, “Linear System Theory”, Prentice-Hall. 1996, 2nd edition.
- W. L. Luyben, “Process modeling, simulation and control for chem...”, McGraw Hill, 1989.
- J. Maciejowsky, “Multivariable Feedback Design”, Addison-Wesley Publishing Comp. 1989.
- K. Furuta, A. Sano, and D. Atherton, “State Variable Methods in Automatic ...”, Wiley 1988.
- G. Stephanopoulos, “Chemical process control”, Prentice-Hall, 1984.
- T. Kailath, “Linear Systems”, Prentice Hall 1980.



Índice Alfabético

A

aliasing	34
análisis de sistemas	
de primer orden	103
de primer orden con retardo	103
de segundo orden.....	104

C

Coefficientes de Fourier	lv
convolución continua	28
convolución discreta	34
convolución discreta cíclica.....	36, 37

D

Diagrama de Bode	
asintótico	118
de sistemas con retardo	120, 121
de sistemas de 1 ^{er} orden.....	114
de sistemas de 2 ^{do} orden.....	115
de sistemas tiempo discreto.....	124
definición.....	113

E

ecuación de diferencias	70
polinomio característico	76
respuesta estacionaria.....	77
respuesta forzada.....	75
respuesta homogénea.....	75
respuesta transitoria.....	77
ecuación diferencial	11, 69
ordinaria	69
parcial	69
polinomio característico	72
respuesta estacionaria.....	73
respuesta forzada.....	71
respuesta homogénea.....	71
respuesta transitoria.....	73
ecuación lineal/no-lineal	70
ecuación variable/invariable	70
ecuaciones de estados continuas	12
respuesta forzada.....	81
respuesta homogénea.....	79
ecuaciones de estados de diferencias	78
ecuaciones de estados de diferencias	83
respuesta forzada.....	84
respuesta homogénea.....	84
ejemplo	
eléctrico	
circuito RL.....	5
circuito RLC	7, 11, 150
elevador dc/dc.....	16, xlvi, lvi, lxvi, 122, 123, 151
equivalente motor cc/eje flexible.....	150
generación hidroeléctrica.....	1, 2, 5
generación solar.....	3
electromecánico	
levitador magnético	93, 108, 134, 153

máquina cc.....	152
motor cc.....	116, 119, 125
motor cc/eje flexible.....	14, 34, 92, 99, 152, 159
financiero.....	6, lxi
hidráulico	
estanque cóncavo.....	154
estanque piramidal.....	15, 74, 82, 132, 155
estanque rectangular	154
mecánico	
carro-péndulo invertido	147
grúa	148
locomotora.....	146
masa-resorte-amortiguador.....	145
péndulo	147
satélite.....	149
suspensión activa	137, 146
población	6, 77, 83, 85, 96, 102, 138
térmico	
habitación	132, 158
intercambiador de calor	9
estabilidad	3, 129
de entrada-salida en sistemas continuos.....	130
de entrada-salida en sistemas discretos	139
en ecuaciones de estado continuas	129
en ecuaciones de estado discretas.....	137
polos y estabilidad en sistemas continuos.....	131
polos y estabilidad en sistemas discretos	139
Routh-Hurwitz en sistemas continuos.....	133
Routh-Hurwitz en sistemas discretos	140

F

función de transferencia continua	
a ecuaciones de estado.....	96
ceros	90
definición.....	90, 91
fracciones parciales	98
ganancia dc.....	90, 91
polos	90
sistema de fase mínima	90
función de transferencia discreta	
a ecuaciones de estado.....	100
ceros	94
definición.....	94, 95
fracciones parciales	101
ganancia dc.....	95, 96
polos	94
sistema de fase mínima	94

L

Ley de Enfriamiento de Newton	156
Ley de Fourier.....	156
Ley de Hooke	144
Leyes de Kirchoff.....	150
linealización	14

M

matriz	
de transición de estados continua	79

de transición de estados discreta84

modelo

empírico.....5, 10

fenomenológico.....5, 10, 17

promedio.....152

muestreador.....31

con retención.....31

ideal.....31

P

proceso1

S

señal

definición.....20

descomposición.....28

índices.....22

ortogonalidad.....22

periodicidad.....22

simetría.....21

soporte.....20

soporte compacto.....21

soporte negativo.....21

soporte positivo.....20

señal de prueba continua

escalón.....23

exponencial.....24

impulso.....22

rampa.....24

sinusoidal.....24

señal de prueba discreta

escalón.....32

exponencial.....33

impulso.....32

rampa.....33

sinusoidal.....33

sistema

cantidades.....1

clasificación.....5

causal.....8

concentrado.....9

continuo.....6

dinámico.....7

discreto.....6

distribuido.....9

estático.....7

invariante.....9

lineal.....5

no-causal.....8

no-lineal.....5

varainte.....9

definición.....1

equivalentes.....105

ecuación diferencial a discreta.....105

ecuaciones de estado diferenciales a discretas ...106

modelo.....3

tipo

eléctricos.....149

electromecánicos.....152

hidráulicos.....153

mecánicos.....144

térmicos.....156

Tipo *N*.....118

T

Teorema del Muestreo de Nyquist.....34

transformaciones

complejas

convolución.....28, 34, 36, 37

discretización.....31

simples.....25

normalización.....27

retardo.....27

transformaciones de similitud.....13

Transformada de Fourier.....xliv

definición.....1

inversa.....li

Transformada de Fourier de Frecuencia Discreta.....liv

definición.....liv

inversa.....lv

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto.....lxi

definición.....lxii

inversa.....lxii

Transformada de Fourier Discreta.....lxiii

definición.....lxiii

inversa.....lxiii

Transformada de Laplace.....xliv

definición.....xliv

propiedades.....xlv

Transformada *Z*.....lvii

definición.....lvii

inversa.....lviii

propiedades.....lviii

V

variables

entrada.....2

estado.....2

parámetros.....2

perturbaciones.....2

salida.....2

vector

de entradas.....13

de salidas.....13

