Teorema de Cauchy

Problema Derivar el Teorema de Cauchy mediante la observación de varias transformaciones de contorno.

Parámetros $pts := 100 \quad \omega_o := 1 \quad \omega_{step} := \frac{\omega_o}{pts} \quad \sigma_o := 1 \quad \sigma_{step} := \frac{\sigma_o}{pts}$

Solución Se definen los rangos para el controno a transformar

$\omega_a := \omega_o, \omega_o - \omega_{step} .. -\omega_o \qquad \sigma_a := \sigma_o$

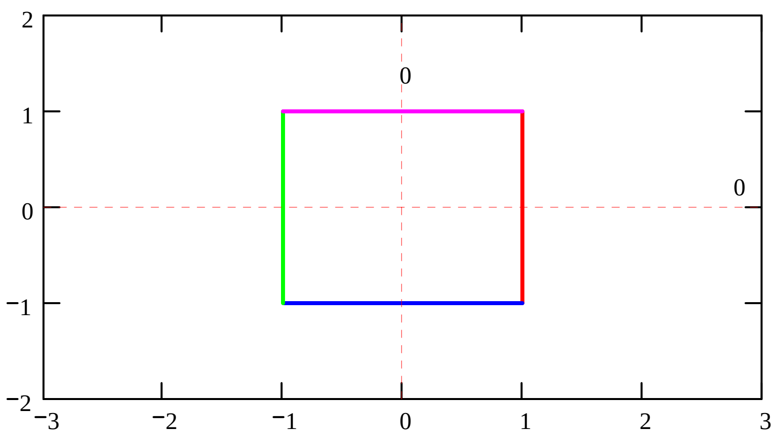
$\sigma_b := \sigma_o, \sigma_o - \sigma_{step} .. -\sigma_o \qquad \omega_b := -\omega_o$

$\omega_c := -\omega_o, -\omega_o + \omega_{step} .. \omega_o \qquad \sigma_c := -\sigma_o$

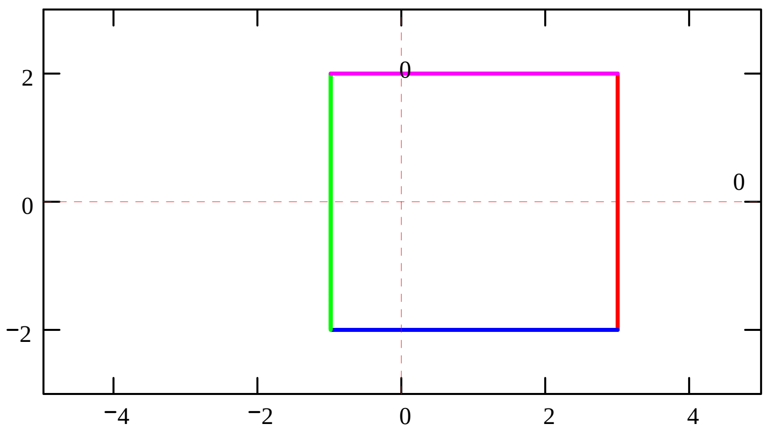
$\sigma_d := -\sigma_o, -\sigma_o + \sigma_{step} .. \sigma_o \qquad \omega_d := \omega_o$

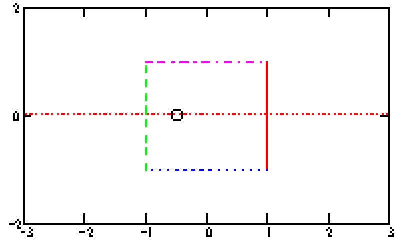
El contorno arbitrario a transformar es:

$\gamma(s) = s \qquad \gamma(\sigma, \omega) := \sigma + j \cdot \omega$



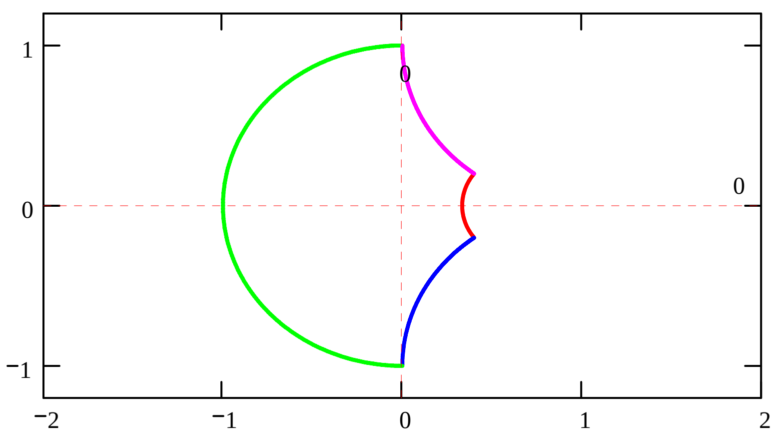
Caso 1 $f(s) = 2 \cdot s + 1$ $f(\sigma,\omega) := 2 \cdot (\sigma + j \cdot \omega) + 1$

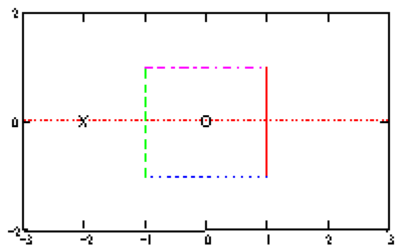




En **f(s)** hay un cero
en
s = -0.5

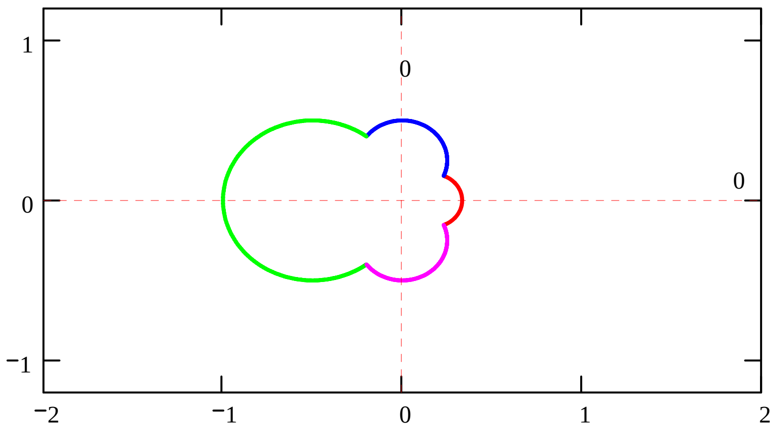
Caso 2 $f(s) = \dfrac{s}{s+2}$ $f(\sigma,\omega) := \dfrac{\sigma + j \cdot \omega}{(\sigma + j \cdot \omega) + 2}$

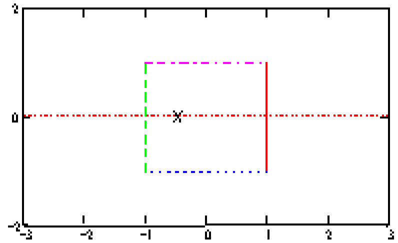




En **f(s)** hay un cero en
s = 0 y un polo en
s = -2

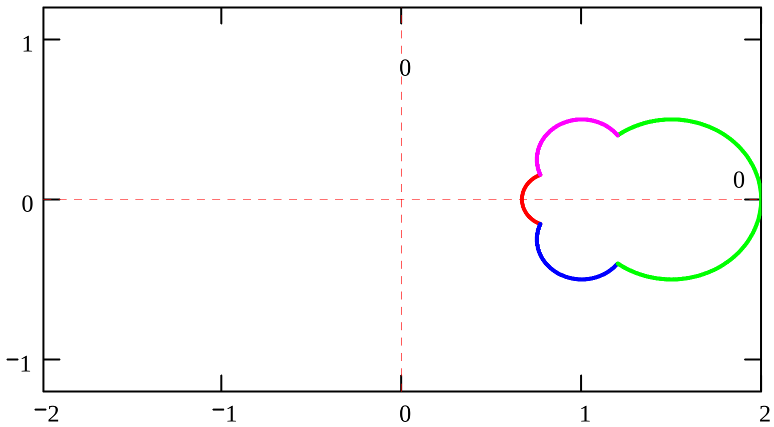
Caso 3 $f(s) = \frac{1}{2 \cdot s + 1}$ $f(\sigma, \omega) := \frac{1}{2 \cdot (\sigma + j \cdot \omega) + 1}$

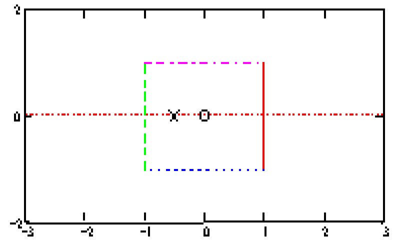




En **f(s)** hay un polo en
s = -0.5

Caso 4 $f(s) = \frac{s}{s + 0.5}$ $f(\sigma, \omega) := \frac{\sigma + j \cdot \omega}{(\sigma + j \cdot \omega) + 0.5}$



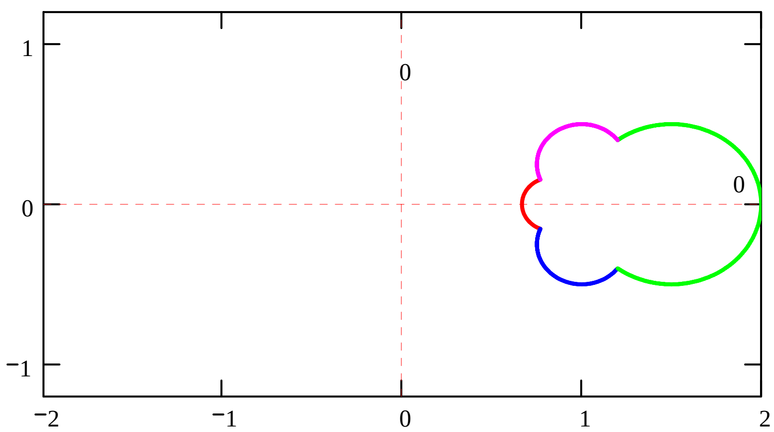


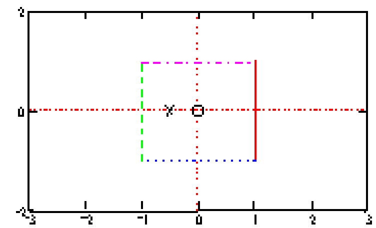
En **f(s)** hay un cero en
s = 0 y un polo en
s = -0.5

Discusión Si un contorno γ encierra *Z* ceros y *P* polos de *f*(*s*) y no pasa a través de ningún polo y/o cero de *f*(*s*) a medida que se viaja en sentido horario, entonces, el contorno transformado encierra al origen (0, 0) en el plano *f*(*s*) un número *N* = *Z* - *P* en sentido horario.

En el último caso se tiene:

$$f(s) = \frac{s}{s + 0.5} \qquad f(\sigma, \omega) := \frac{\sigma + j\cdot\omega}{(\sigma + j\cdot\omega) + 0.5}$$

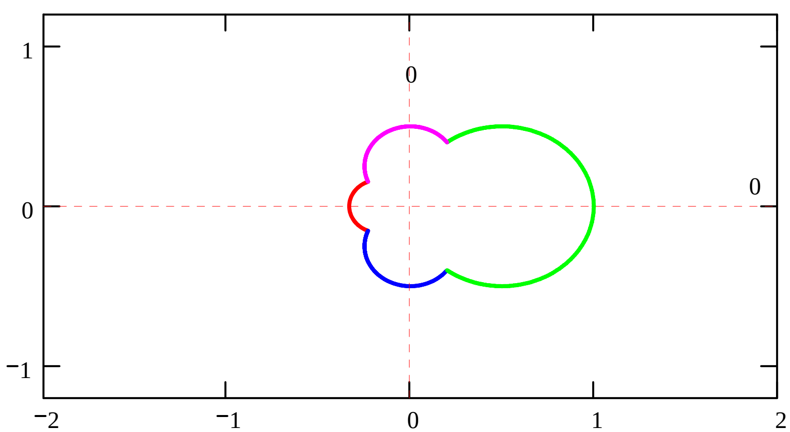


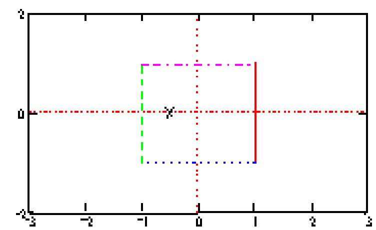


En f**(s)** hay un cero en s = 0 y un polo en s = -0.5

Dado que f(s) = 1 + g(s), el contorno trasnformado en el plano g es:

$$g(s) = f(s) - 1 = \frac{s}{s + 0.5} - 1 \qquad g(\sigma, \omega) := \frac{\sigma + j\cdot\omega}{(\sigma + j\cdot\omega) + 0.5} - 1$$





En g**(s)** hay un polo en s = -0.5

Teorema de Cauchy

Si un contorno γ encierra *Z* ceros y *P* polos de 1 + *g*(*s*) y no pasa a través de ningún polo y/o cero de 1 + *g*(*s*) a medida que se viaja en sentido horario sobre γ, entonces, el contorno transformado encierra al punto (-1, 0) en el plano *g*(*s*) un número *N* = *Z* - *P* en sentido horario.

Criterio de Nyquist para Sistemas Continuos

Problema Ilustrar el Criterio de Nyquist para determinar la estabilidad de sistemas lineales continuos tipo SISO.

Parámetros $pts := 500$ $\theta_o := \dfrac{\pi}{2}$ $\theta_{step} := \dfrac{\theta_o}{pts}$ $r_o := 20$ $r_{step} := \dfrac{r_o}{pts}$

Solución Se definen los rangos para el controno a transformar

$r_a := 0, r_{step} .. r_o$ $\theta_a := \theta_o$

$r_b := r_o$ $\theta_b := \theta_o, \theta_o - \theta_{step} .. 0$

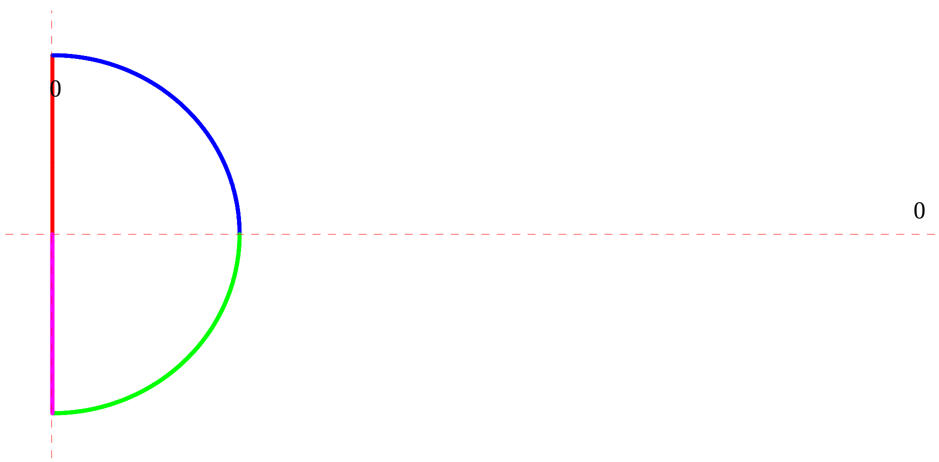
$r_c := r_o$ $\theta_c := 0, -\theta_{step} .. -\theta_o$

$r_d := r_o, r_o - r_{step} .. 0$ $\theta_d := -\theta_o$

El Contorno de Nyquist γ es:

$\gamma(s) := s$

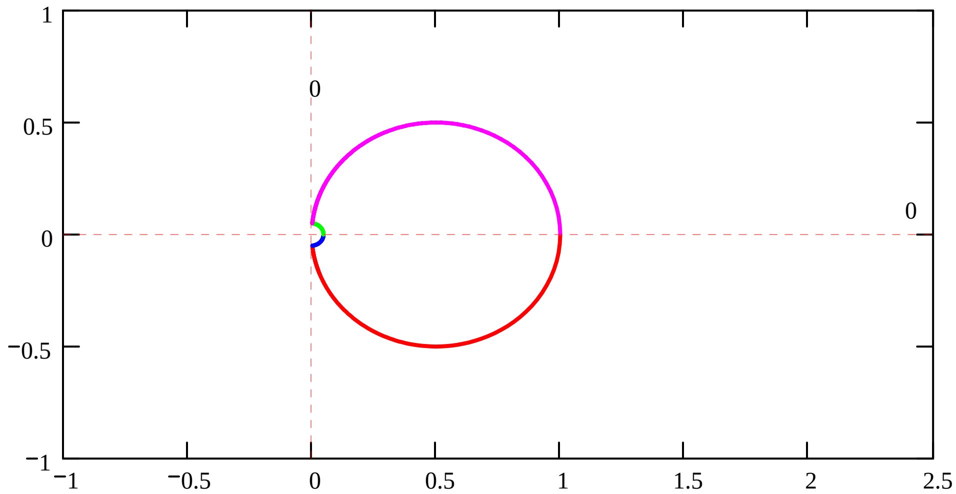
Este contorno encierra todo el semiplano derecho; es decir a todos los polos y ceros inestables.



inestables, entonces, Cauchy indica que el contorno transformado en el plano g(s) encierra N = Z - P veces al punto (-1, 0).

Caso 1

$$g(s) := \frac{1}{s+1}$$

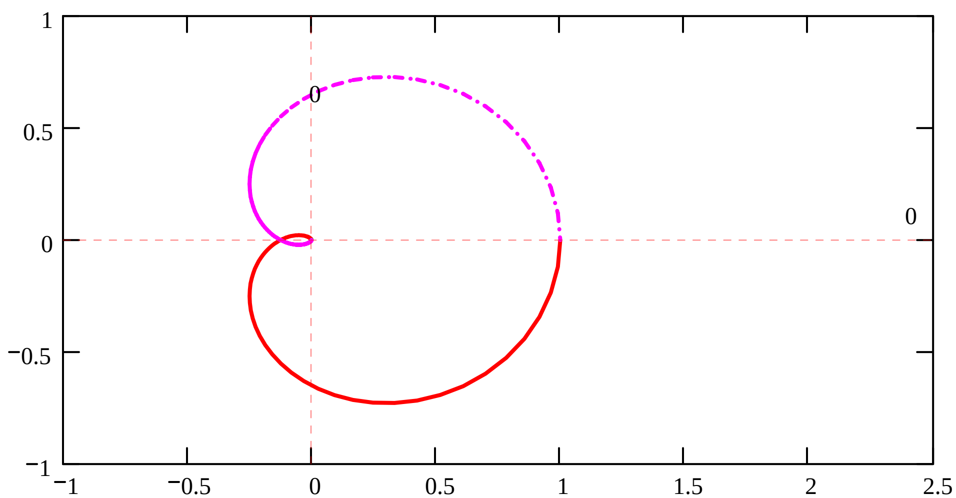


En g**(s)** hay un polo en
s = -1

P = 0
N = 0
por lo tanto Z = 0

Caso 2

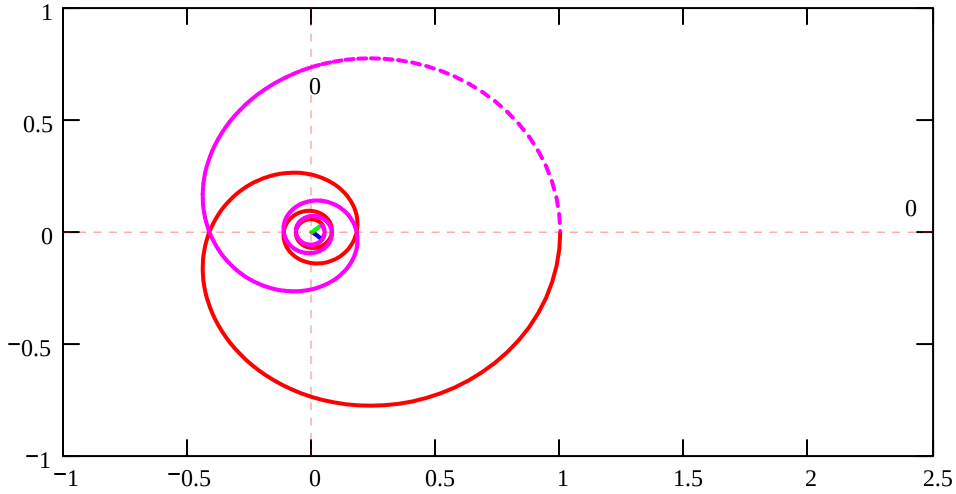
$$g(s) := \frac{1}{(s+1)^3}$$



En **g(s)** hay un polo múltiple en s = -1

P = 0
N = 0
por lo tanto Z = 0

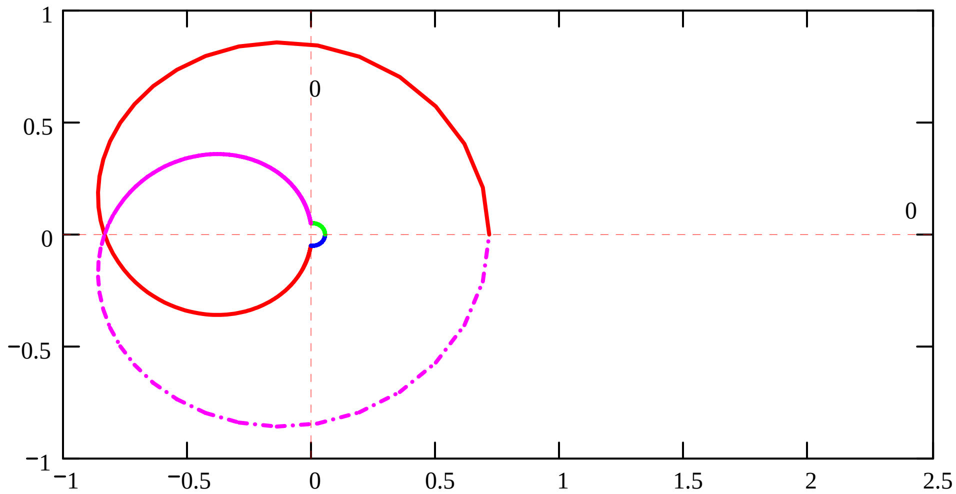
Caso 3 $g(s) := \frac{1}{s+1} \cdot \exp(-0.9 \cdot s)$



En **g(s)** hay un polo en
s = -1

P = 0
N = 0
por lo tanto Z = 0

Caso 4 $g(s) := \frac{s+0.25}{(s-0.5) \cdot (s-0.7)}$

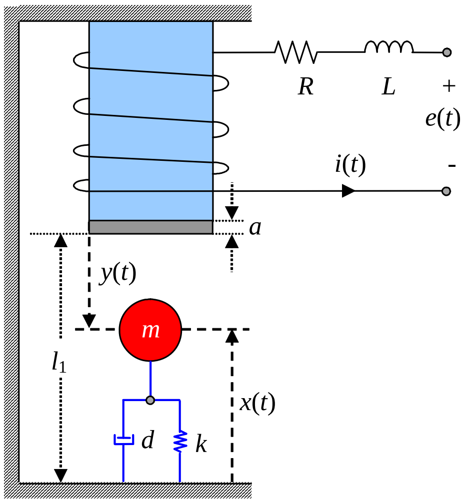


En **g(s)** hay un cero en
s = -0.25, un polo en
s = 0.5 y un polo en
s = 0.7

P = 2
N = 0
por lo tanto Z = 2

Criterio de Nyquist Un sistema realimentado es estable si y sólo si el contorno en el plano gr(s) encierra el punto (-1/k, 0) en sentido antihorario un número de veces igual al número de polos inestables de gr(s).

Problema **Sistema de levitación magnética.**



Parámetros

$R := 1$ $L := 50 \cdot 10^{-3}$ $g := 9.8$ $d := 1.5$ $l_0 := 0.3$

$m := 0.250$ $k_i := 3 \cdot 10^{-3}$ $a := 0.02$ $K := 24.5$ $l_1 := 0.5$

$\Delta x_o := 5 \cdot 10^{-2}$

Modelo.

$$\frac{d}{dt} i = \frac{e}{L} - \frac{R}{L} \cdot i \qquad \frac{d}{dt} x = v \qquad \frac{d}{dt} v = -g + \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i^2}{l_1 - x + a} + \frac{K}{m} \cdot (l_0 - x) - \frac{d}{m} \cdot v$$

Condiciones Iniciales y Entradas.

la corriente if1 para tener la bola a 30 cm desde el piso en t = 0 es,

$$x_f := \frac{30}{100} \qquad i_{f1} := \frac{1}{k_i} \cdot \sqrt{\left[k_i \cdot \left(g \cdot m \cdot l_1 - g \cdot m \cdot x_f + g \cdot m \cdot a + K \cdot x_f \cdot l_1 - K \cdot l_0 \cdot l_1 + K \cdot l_0 \cdot x_f - K \cdot l_0 \cdot a - K \cdot x_f^2 + K \cdot x_f \cdot a\right)\right]}$$

Variables de Estado

$$x_1 = i_a \qquad x_2 = x \qquad x_3 = \frac{d}{dt} x = v$$

por lo que la tensión ef1 a aplicar es,

$e_{f1} := i_{f1} \cdot R$ $e_{f1} = 13.404$ las c.i. son entonces, $i_0 := i_{f1}$ $x_0 := x_f$ $v_0 := 0$

Modelo Lineal $i_o := i_0$ $x_o := x_0$ $v_o := v_0$ $e_o := e_{f1}$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 \cdot \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i_0}{l_1 - x_0 + a} & \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i_0^2}{(l_1 - x_0 + a)^2} - \frac{K}{m} & \frac{-d}{m} \end{bmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Funciones de Transferencia en L.A.

$$h_{xe}(s) := c \cdot (s \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \cdot b \;\Big|\; \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float}, 10 \end{matrix} \rightarrow \frac{1.462252310 \cdot 10^{19}}{(s + 20.) \cdot \left(5.000000000 \cdot 10^{17} \cdot s^2 + 3.000000000 \cdot 10^{18} \cdot s + 2.672727273 \cdot 10^{19}\right)}$$

Error en S.S. Entrada Escalón - Sistema en L.C. de Voltaje - Controlador k_c, con k_a = 1, y k_{st} = 1.

$\Delta e_{esc\_ss} := 0.40$ $\quad k_c := \mathrm{Re}\left[\dfrac{-(\Delta e_{esc\_ss} - 1)}{\Delta e_{esc\_ss} \cdot h_{xe}(0)}\right]$ $\quad k_c = 54.834$ $\quad k_a := 1$ $\quad k_{st} := 1$ $\quad h_c(s) := k_c$ $\quad l(s) := h_{xe}(s) \cdot h_c(s)$

MF

$w_1 := 100$

Given

$|l(j \cdot w_1)| = 1$

$w_o := \mathrm{Find}(w_1, w_2)$ $\quad (w_g \;\; w_p) := (w_{o_1} \;\; w_{o_2})$

$MF := 180 + \arg(l(j \cdot w_g)) \cdot \dfrac{180}{\pi}$ $\quad MF = 28.391$

$l(j \cdot w_g) = -0.88 - 0.475i$ $\quad w_g = 9.766$

$t_r := \dfrac{\pi + \arg(l(j \cdot w_g))}{w_g}$ $\quad t_r \cdot 10^3 = 50.738$ Retardo Crítico

MG

$w_2 := 1$

$\arg(l(j \cdot w_2)) = -\pi$

$MG := \dfrac{1}{|l(j \cdot w_p)|}$ $\quad MG = 2.146$

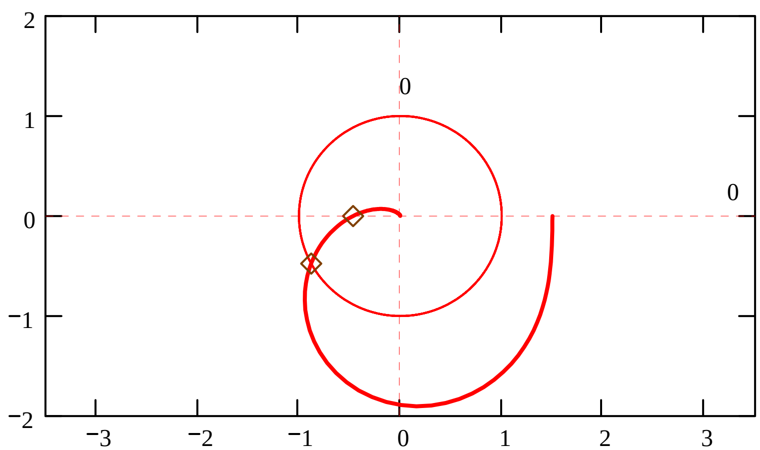
$MG_{dB} := 20 \cdot \log(MG)$ $\quad MG_{dB} = 6.631$

$l(j \cdot w_p) = -0.466 - 6.751i \times 10^{-7}$

Nyquist

Rango para el Nyquist $\quad pts := 500$

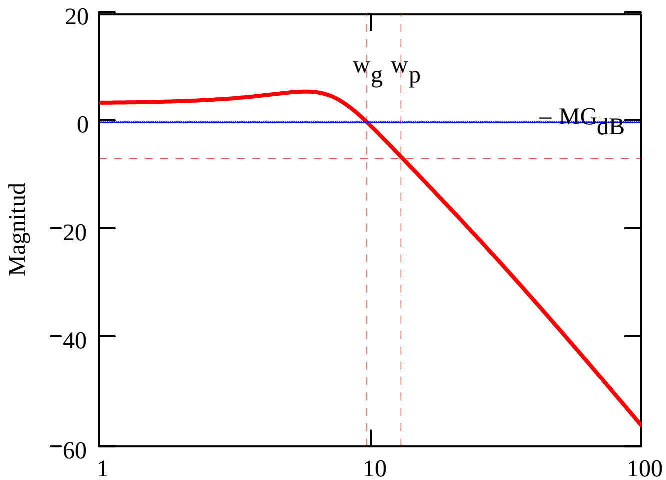
$\theta_o := \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \theta_{step} := \dfrac{\theta_o}{pts}$ $\quad r_o := 100$ $\quad r_{step} := \dfrac{r_o}{pts}$ $\quad k := 1 .. 2$ $\quad r_a := 0, r_{step} .. r_o$ $\quad \theta_a := \theta_o$ $\quad r_b := 1$ $\quad \theta_b := 0, \theta_{step} .. 2 \cdot \pi$

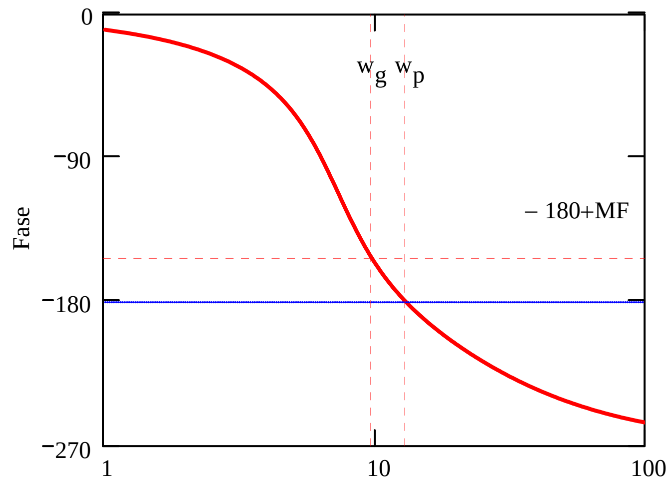


Bode

$n_{max} := 250 \quad n := 1 .. n_{max} \quad w_{min} := 10^0 \quad w_{max} := 10^2 \quad ratio := \log\left(\frac{w_{max}}{w_{min}}\right)\cdot\frac{1}{n_{max}} \quad w(n) := w_{min}\cdot 10^{n\cdot ratio}$

$M(n) := 20\cdot\log(|l(j\, w(n))|) \qquad P(n) := \frac{180}{\pi}\cdot(\mathrm{if}(\arg(l(j\cdot w(n))) > 0, \arg(l(j\cdot w(n))) - 2\pi, \arg(l(j\cdot w(n)))))$

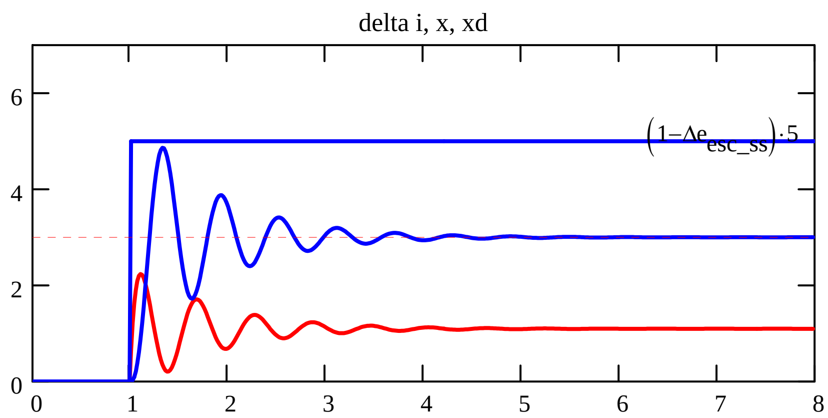


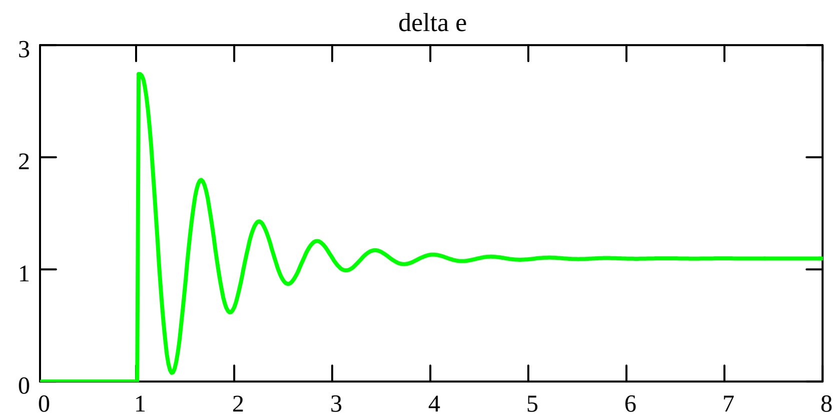


Simulación Sistema en L.C. de Posición - Controlador k_c.

$A_r := A - b\cdot k_c\cdot c \quad b_r := b\cdot k_c \quad c_r := c \quad t_f := 8 \quad l_f := 500 \quad ll := 0 .. l_f \quad t := 0, \frac{t_f}{l_f} .. t_f \quad \Delta x_d(t) := \Delta x_o\cdot\Phi(t-1)$

$D(t,x) := A_r\cdot(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)^T + b_r\cdot\Delta x_d(t) \quad CI := (0 \;\; 0 \;\; 0)^T \quad Z_c := \mathrm{rkfixed}(CI, 0, t_f, l_f, D) \quad \Delta e(t) := k_c\cdot\left(\Delta x_d(t) - Z_{c_{t\cdot l_f\cdot t_f^{-1}, 3}}\right)$





Error en S.S. Entrada Rampa - Sistema en L.C. de Voltaje - Controlador k_c/s, con $k_a = 1$, y $k_{st} = 1$.

$\Delta e_{ram\_ss} := 0.40$ $\qquad k_c := \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\Delta e_{ram\_ss} \cdot k_a \cdot h_{xe}(0)}\right) \rightarrow 91.390769387808318794$

$A_c := 0 \quad b_c := k_c \quad c_c := 1 \quad d_c := 0$

$h_c(s) := c_c \cdot (s - A_c)^{-1} \cdot b_c \;\Big|\; \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float}, 6 \end{matrix} \rightarrow \dfrac{91.3908}{s} \qquad l(s) := h_{xe}(s) \cdot h_c(s)$

MF

$w_1 := 10$

Given

$\left|l(j \cdot w_1)\right| = 1$

$w_o := \mathrm{Find}(w_1, w_2) \qquad (w_g \;\; w_p) := (w_{o_1} \;\; w_{o_2})$

$MF := 180 + \arg(l(j \cdot w_g)) \cdot \dfrac{180}{\pi} \qquad MF = 62.88$

$l(j \cdot w_g) = -0.456 - 0.89i$

$t_r := \dfrac{\pi + \arg(l(j \cdot w_g))}{w_g} \qquad t_r = 0.405$ Retardo Crítico

MG

$w_2 := 1$

$\arg(l(j \cdot w_2)) = -\pi$

$MG := \dfrac{1}{\left|l(j \cdot w_p)\right|} \qquad MG = 2.036$

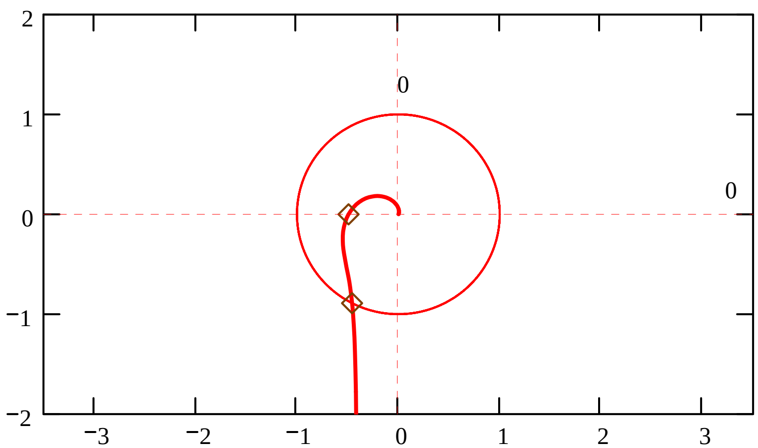
$MG_{dB} := 20 \cdot \log(MG) \quad MG_{dB} = 6.175$

$l(j \cdot w_p) = -0.491 - 3.4i \times 10^{-7}$

Nyquist

Rango para el Nyquist $\qquad pts := 500$

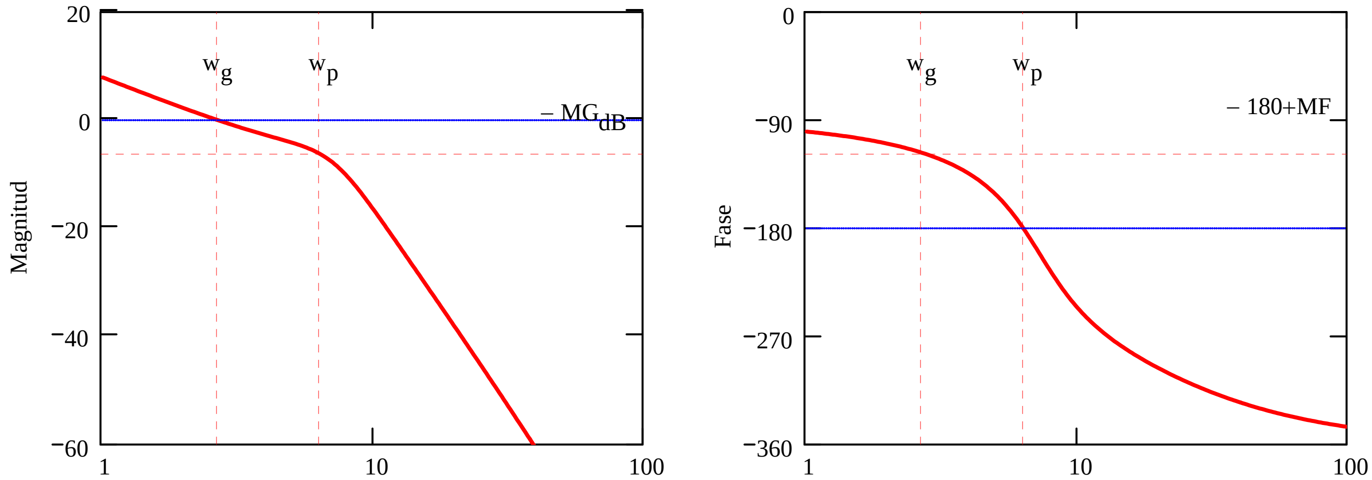
$\theta_o := \dfrac{\pi}{2} \quad \theta_{step} := \dfrac{\theta_o}{pts} \quad r_o := 100 \quad r_{step} := \dfrac{r_o}{pts} \quad k := 1..2 \quad r_a := 0, r_{step}..r_o \quad \theta_a := \theta_o \quad r_b := 1 \quad \theta_b := 0, \theta_{step}..2 \cdot \pi$



Bode

$n_{max} := 250 \qquad n := 1 .. n_{max} \qquad w_{min} := 10^0 \qquad w_{max} := 10^2 \qquad ratio := \log\left(\frac{w_{max}}{w_{min}}\right)\cdot\frac{1}{n_{max}} \qquad w(n) := w_{min}\cdot 10^{n\cdot ratio}$

$M(n) := 20\cdot\log(|l(j\, w(n))|) \qquad P(n) := \frac{180}{\pi}\cdot(\text{if}(\arg(l(j\cdot w(n))) > 0, \arg(l(j\cdot w(n))) - 2\pi, \arg(l(j\cdot w(n)))))$

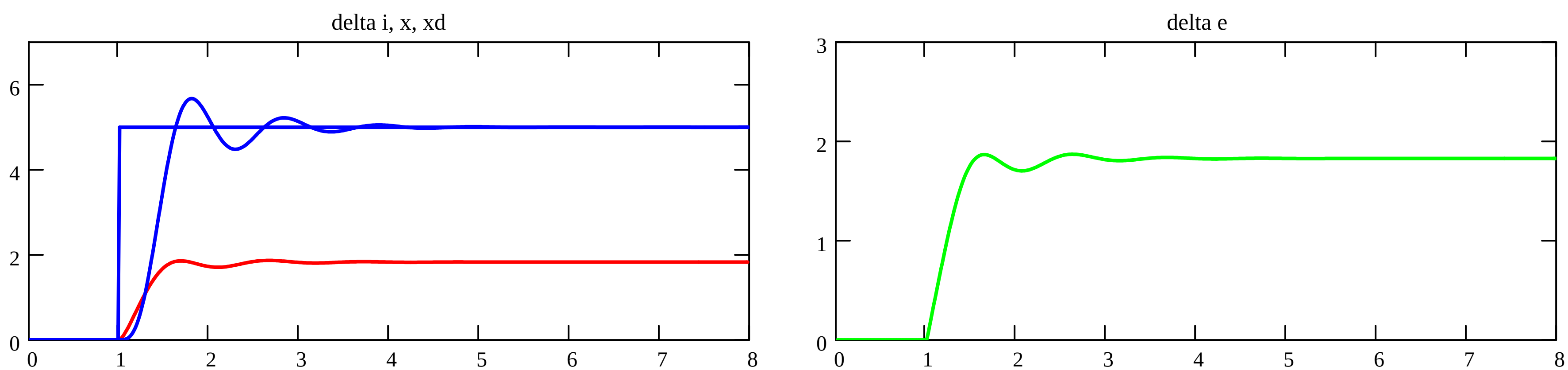


Simulación Sistema en L.C. de Posición - Controlador k_c/s.

$A_r := \text{stack}(\text{augment}(A - b\cdot d_c\cdot c, b\cdot c_c), \text{augment}(A_c - b_c\cdot c, 0)) \qquad b_r := \text{stack}(b\cdot d_c, b_c) \qquad c_r := \text{augment}(c, 0\cdot c_c)$

$\Delta x_d(t) := \Delta x_o\cdot\Phi(t-1)$

$D(t,x) := A_r\cdot(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4)^T + b_r\cdot\Delta x_d(t) \qquad CI := (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)^T \qquad Z_c := \text{rkfixed}(CI, 0, t_f, l_f, D) \qquad \Delta e(t) := c_c\cdot\left(Z_{c_{t\cdot l_f\cdot t_f^{-1}, 5}}\right)$



Criterio de Nyquist para Sistemas Discretos

Problema Ilustrar el Criterio de Nyquist para determinar la estabilidad de sistemas lineales continuos tipo SISO.

Parámetros $pts := 500$ $\theta_{step} := \frac{2\cdot\pi}{pts}$ $T := 1$ $e := \exp(1)$

Solución Se definen los rangos para el controno a transformar

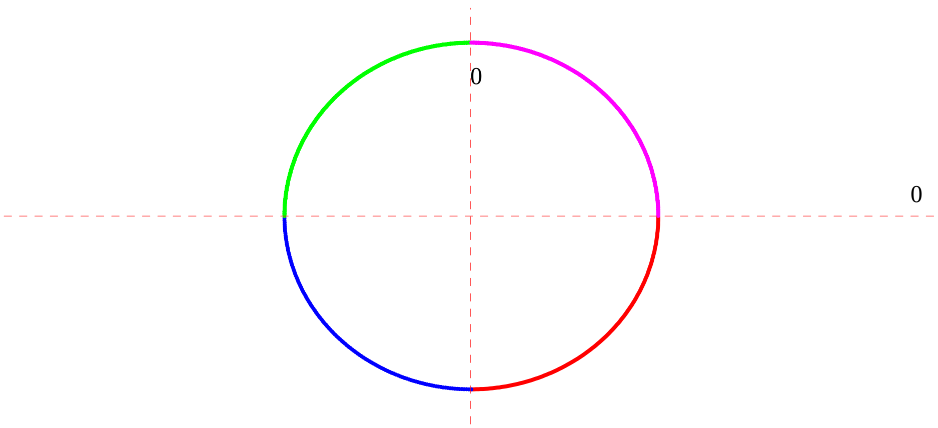
$$\theta_a := 0, \frac{-\theta_{step}}{T} .. \frac{-\pi}{2\cdot T} \qquad \theta_c := \frac{-\pi}{T}, \frac{-\pi}{T} - \frac{\theta_{step}}{T} .. \frac{-3}{2\cdot T}\cdot\pi$$

$$\theta_b := \frac{-\pi}{2\cdot T}, \frac{-\pi}{2\cdot T} - \frac{\theta_{step}}{T} .. \frac{-\pi}{T} \qquad \theta_d := \frac{-3}{2\cdot T}\cdot\pi, \frac{-3}{2\cdot T}\cdot\pi - \frac{\theta_{step}}{T} .. \frac{-2}{T}\cdot\pi$$

El Contorno de Nyquist γ es:

$\gamma(z) := z$

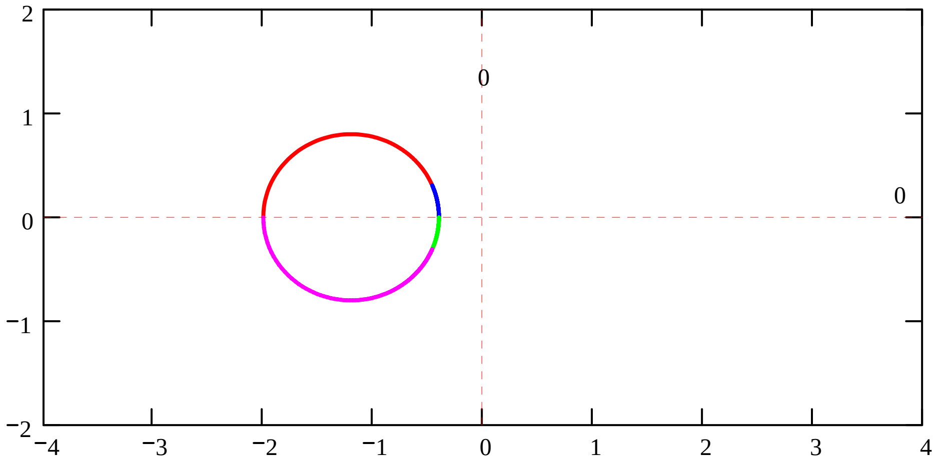
Este contorno encierra porción del plano complejo donde las raíces estables pueden estar.



Nótese que este sistema tiene *n* polos y que 1 + kg(z) tiene a su vez *n* ceros. Si P (Z) son los polos (ceros) fuera del círculo unitario, entonces dentro del círculo hay n - P (n - Z) polos (ceros). Cauchy indica que el contorno transformado en el plano g(z) encierra N = (n - Z) - (n - P) = P - Z al punto (-1/k, 0).

Caso 1

$$g(z) := \frac{1}{z - 1.5}$$

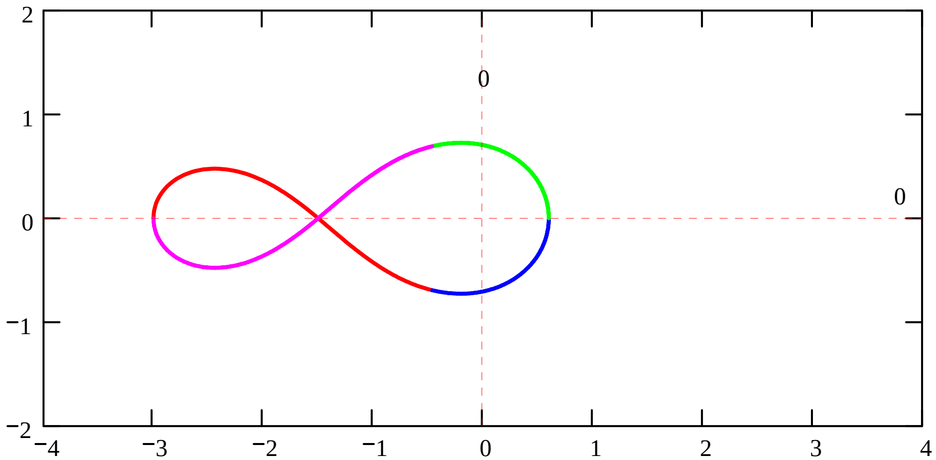


En g**(z)** hay un polo en
z = 1.5

P = 1
N = 1
por lo tanto Z = 0

Caso 2

$$g(z) := \frac{1.5}{z\cdot(z - 1.5)}$$

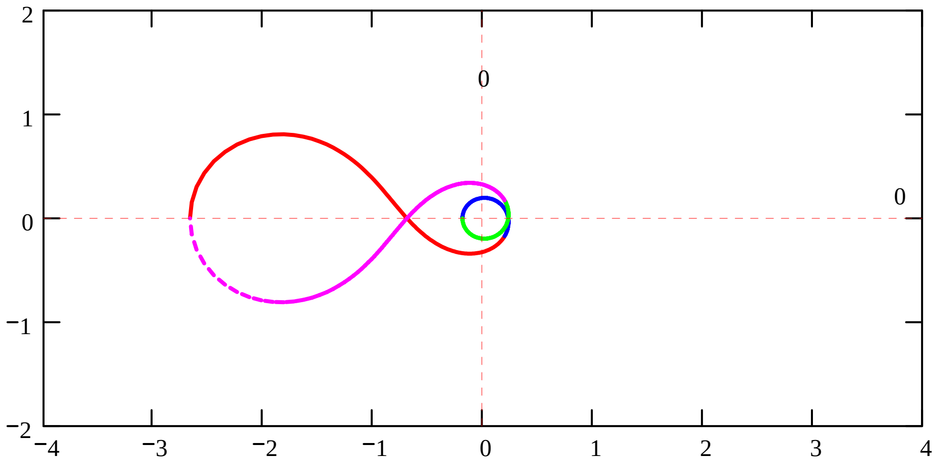


En **g(z)** hay un polo en
z = 0
z = 1.5

P = 1
N = -1
por lo tanto Z = 2

Caso 3

$$g(z) := \frac{0.4}{z^2 \cdot (z - 1.15)}$$

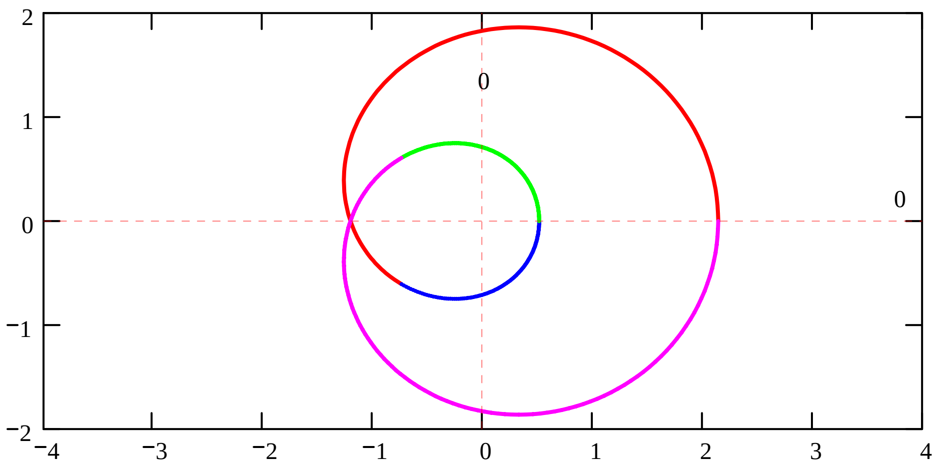


En **g(z)** hay un polo en
z = 1.15
z = 0 doble

P = 1
N = 1
por lo tanto Z = 0

Caso 4

$$g(z) := \frac{z + 0.2}{z \cdot (z - 0.2) \cdot (z - 0.3)}$$



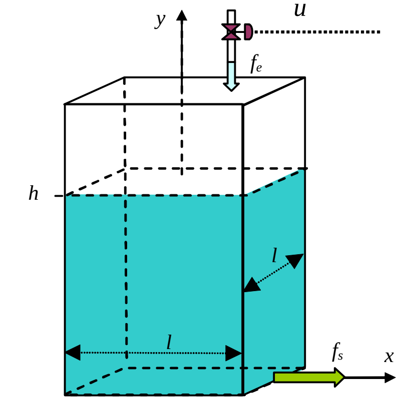
En **g(z)** hay un cero en
z = -0.2, un polo en
z = 0, en z = 0.2 y
en z = 0.3

P = 0
N = -2
por lo tanto Z = 2

Criterio de Nyquist

Un sistema realimentado es estable si y sólo si el contorno en el plano gr(z) encierra el punto (-1/k, 0) en sentido horario un número de veces igual al número de polos inestables de gr(z).

Problema El estanque es controlado con un sistema discreto que tiene sólo una ganancia.



Estanque Parámetros.

$f_{s0} := 0 \qquad A_e := 2.5$

Variable de Estado

$x_1 = h$

Modelo Continuo

$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{A_e}\cdot(v(t) - f_s(t)) \qquad A_t := 0 \qquad b_t := \frac{1}{A_e} \qquad e_t := -\frac{1}{A_e} \qquad c_t := 1$

Modelo Discreto de la Planta

$T := 0.25 \qquad A_k := 1 \qquad b_k := \frac{T}{A_e} \qquad c_k := 1 \qquad e_k := -\frac{T}{A_e}$

Controlador Discreto

$A_{ck} := 0 \qquad b_{ck} := 1 \qquad c_{ck}(k_c) := k_c \qquad d_{ck} := 0$

F. de T. en L.D.

$l(z) := c_k\cdot(z\cdot\text{identity}(1) - A_k)^{-1}\cdot b_k\cdot\left[c_{ck}(4)\cdot(z\cdot\text{identity}(1) - A_{ck})^{-1}\cdot b_{ck} + d_{ck}\right]$

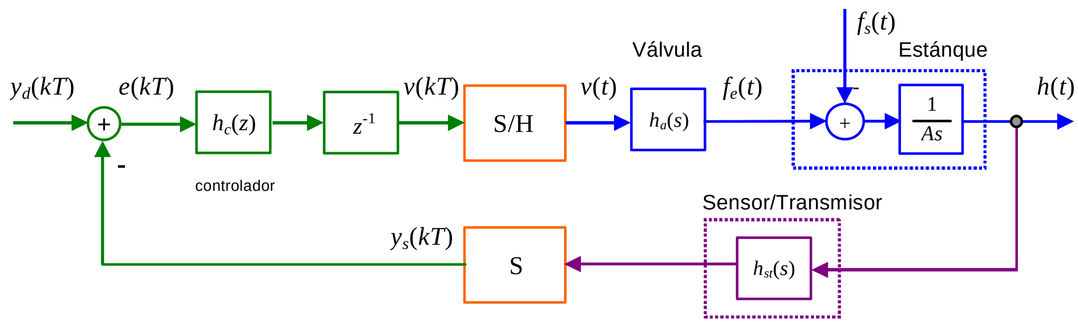
$\theta := 0, \frac{\pi}{50} .. 2\pi$

$x(\theta) := \cos(\theta)$

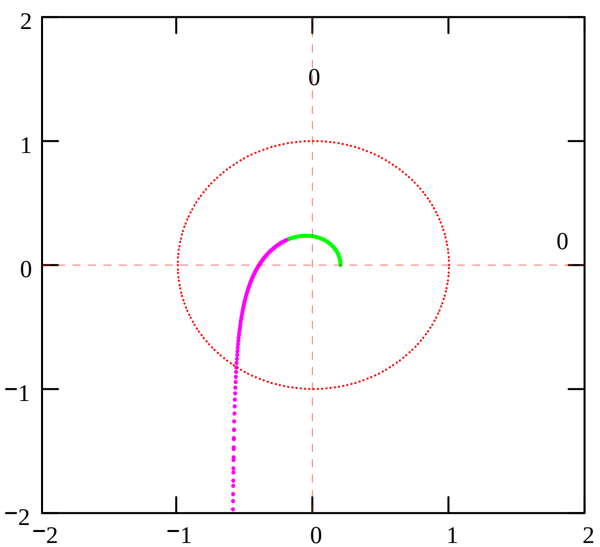
$y(\theta) := \sin(\theta)$

$\theta_c := \frac{-\pi}{T}, \frac{-\pi}{T} - \frac{\theta_{step}}{T} .. \frac{-3}{2\cdot T}\cdot\pi \qquad \theta_d := \frac{-3}{2\cdot T}\cdot\pi, \frac{-3}{2\cdot T}\cdot\pi - \frac{\theta_{step}}{T} .. \frac{-2}{T}\cdot\pi$

Nyquist. Rango para el Nyquist $\quad pts := 500 \qquad \theta_{step} := \frac{2\cdot\pi}{pts}$



El Nyquist es



MG

$\Omega_1 := 1$

Given $\qquad \arg(l(\exp(j\cdot\Omega_1\cdot T))) = -\pi$

$(\Omega_p \;\; \Omega_g) := (\Omega_{o_1} \;\; \Omega_{o_2})$

$MG := \frac{1}{|l(\exp(j\cdot\Omega_p\cdot T))|} \qquad MG = 2.5$

$MG_{dB} := 20\cdot\log(MG) \qquad MG_{dB} = 7.959$

$l(\exp(j\cdot\Omega_p\cdot T)) = -0.4 - 4.504i \times 10^{-7}$

MF

$\Omega_2 := 1$

$|l(\exp(j\cdot\Omega_2\cdot T))| = 1 \qquad \Omega_o := \text{Find}(\Omega_1, \Omega_2)$

$MF := 180 + \arg(l(\exp(j\cdot\Omega_g\cdot T)))\cdot\frac{180}{\pi} \qquad MF = 55.389$

$l(\exp(j\cdot\Omega_g\cdot T)) = -0.568 - 0.823i \qquad \Omega_g = 1.611$

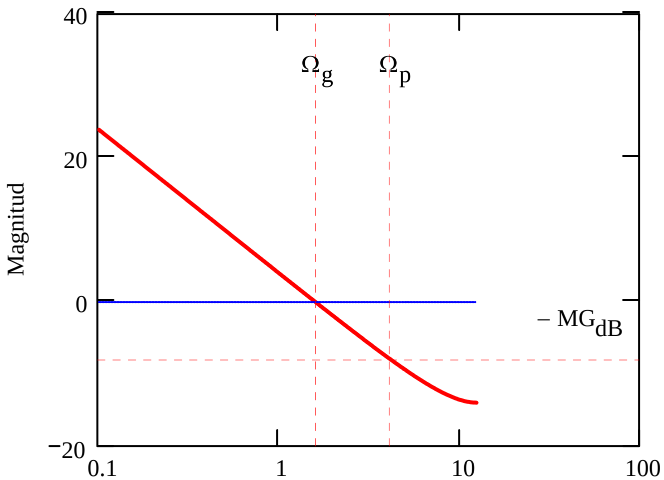
$N_r := \frac{\pi + \arg(l(\exp(j\cdot\Omega_g\cdot T)))}{\Omega_g\cdot T} \qquad N_r = 2.401$

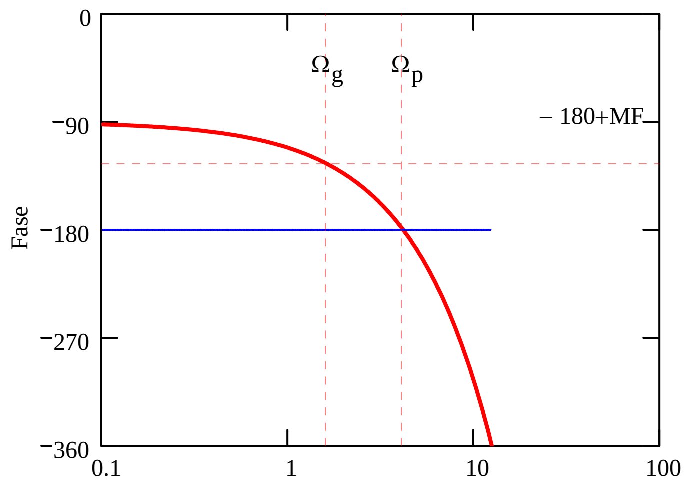
Bode

$n_{max} := 250$ $\quad n := 1 .. n_{max}$ $\quad \Omega_{min} := 10^{-1}$ $\quad \Omega_{max} := \dfrac{\pi}{T}$

$$\text{ratio} := \log\left(\frac{\Omega_{max}}{\Omega_{min}}\right)\cdot\frac{1}{n_{max}} \qquad \Omega(n) := \Omega_{min}\cdot 10^{n\cdot \text{ratio}} \qquad P_0(n) := \arg\left(l\left(\exp\left(j\cdot\Omega(n)\cdot T\right)\right)\right)$$

$$M(n) := 20\cdot\log\left(\left|l\left(\exp\left(j\cdot\Omega(n)\cdot T\right)\right)\right|\right) \qquad P(n) := \frac{180}{\pi}\cdot\text{if}\left(P_0(n) > 0, P_0(n) - 2\pi, P_0(n)\right)$$





Problema El estanque es controlado con un sistema discreto que tiene sólo una ganancia. Ahora la válvula tiene un retardo igual al tiempo de muestreo.

Modelo Discreto de la Planta

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & \frac{T}{A_e} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b_k := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_k := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_k := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

Controlador Discreto

$$A_{ck} := 0 \quad b_{ck} := 1$$

$$c_{ck}(k_c) := k_c \quad d_{ck} := 0$$

F. de T. en L.D.

$$l(z) := \left[c_k \cdot (z \cdot \text{identity}(2) - A_k)^{-1} \cdot b_k \cdot \left[c_{ck}(4) \cdot (z \cdot \text{identity}(1) - A_{ck})^{-1} \cdot b_{ck} + d_{ck}\right]\right]_1$$

$$\theta_c := \frac{-\pi}{T}, \frac{-\pi}{T} - \frac{\theta_{step}}{T} .. \frac{-3}{2 \cdot T} \cdot \pi$$

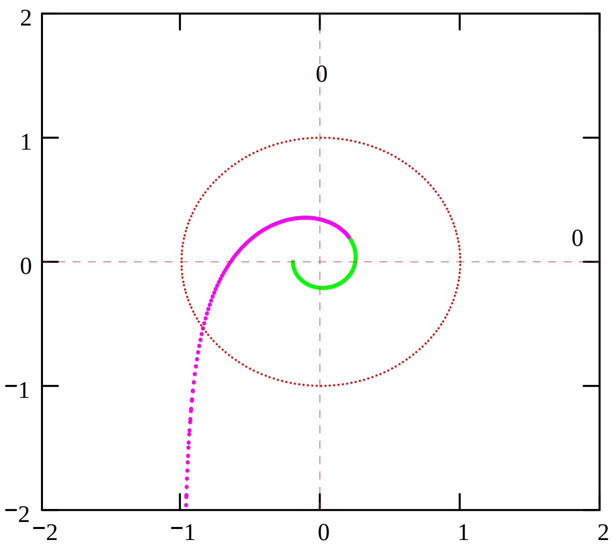
Nyquist. Rango para el Nyquist

$$pts := 500 \quad \theta_{step} := \frac{2 \cdot \pi}{pts}$$

$$\theta_d := \frac{-3}{2 \cdot T} \cdot \pi, \frac{-3}{2 \cdot T} \cdot \pi - \frac{\theta_{step}}{T} .. \frac{-2}{T} \cdot \pi$$

$$\theta := 0, \frac{\pi}{50} .. 2\pi \quad x(\theta) := \cos(\theta) \quad y(\theta) := \sin(\theta)$$

El Nyquist es



MG $\Omega := 1$

Given $\arg(l(\exp(j \cdot \Omega \cdot T))) = -\pi \quad \Omega_p := \text{Find}(\Omega)$

$$MG := \frac{1}{\left|l(\exp(j \cdot \Omega_p \cdot T))\right|} \quad MG = 1.545$$

$$MG_{dB} := 20 \cdot \log(MG) \quad MG_{dB} = 3.779$$

$$l(\exp(j \cdot \Omega_p \cdot T)) = -0.647 - 2.921i \times 10^{-7}$$

MF $\Omega := 1$

Given $\left|l(\exp(j \cdot \Omega \cdot T))\right| = 1 \quad \Omega_g := \text{Find}(\Omega)$

$$MF := 180 + \arg(l(\exp(j \cdot \Omega_g \cdot T))) \cdot \frac{180}{\pi} \quad MF = 32.315$$

$$l(\exp(j \cdot \Omega_g \cdot T)) = -0.845 - 0.535i$$

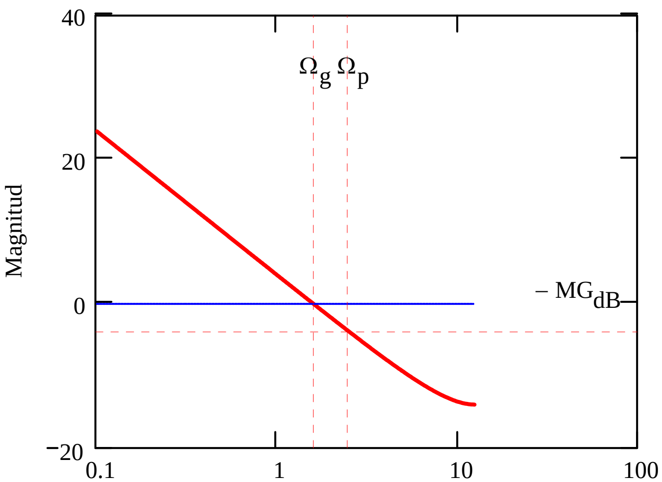
$$N_r := \frac{\pi + \arg(l(\exp(j \cdot \Omega_g \cdot T)))}{\Omega_g \cdot T} \quad N_r = 1.401$$

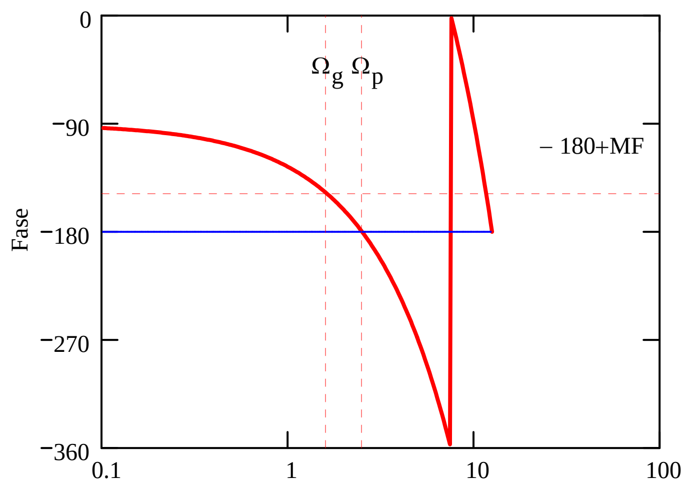
Bode

$n_{max} := 250 \qquad n := 1 .. n_{max} \qquad \Omega_{min} := 10^{-1} \qquad \Omega_{max} := \frac{\pi}{T}$

$ratio := \log\left(\frac{\Omega_{max}}{\Omega_{min}}\right)\cdot\frac{1}{n_{max}} \qquad \Omega(n) := \Omega_{min}\cdot 10^{n\cdot ratio} \qquad P_0(n) := \arg(l(\exp(j\cdot\Omega(n)\cdot T)))$

$M(n) := 20\cdot\log(|l(\exp(j\cdot\Omega(n)\cdot T))|) \qquad P(n) := \frac{180}{\pi}\cdot \mathrm{if}(P_0(n) > 0, P_0(n) - 2\pi, P_0(n))$





Margen de Fase Exacto y Aproximado

Problema Mostrar gráficamente la curva exacta y aproximada de Margen de Fase de un sistema de segundo orden.

Parámetros $pts := 200$ $\qquad r_{step} := \frac{1}{pts}$

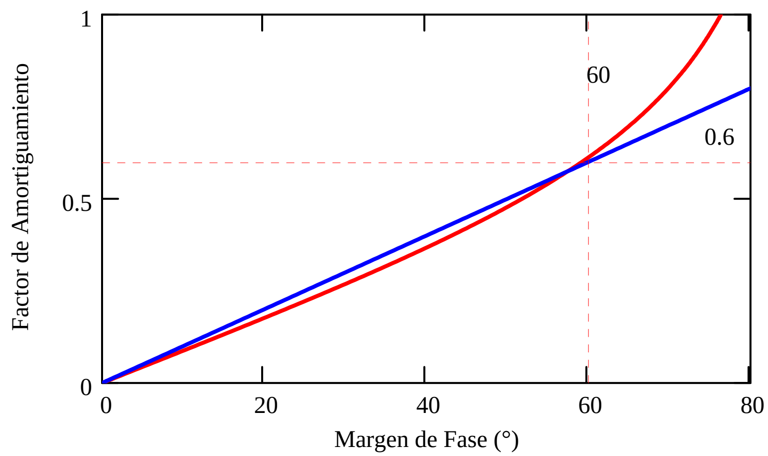
Solución Se definen ambas funciones

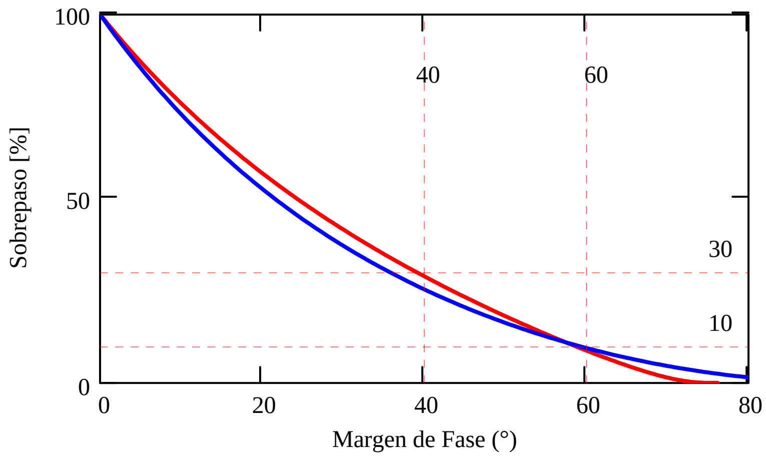
$$\xi := 0, r_{step} .. 1$$

$$MF_{ex}(\xi) := \operatorname{atan}\left(\frac{2\cdot\xi}{\sqrt{\sqrt{4\cdot\xi^4 + 1} - 2\cdot\xi^2}}\right)\cdot\frac{180}{\pi}$$ valor exacto

$$MF_{ap}(\xi) := 100\cdot\xi$$ valor aproximado

$$SP(\xi) := \exp\left(\frac{-\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot 100$$





Nótese que el Sobrepaso [%] más el Margen de Fase [°] suman aprox. 70, para sobrepasos de hasta un 50%.