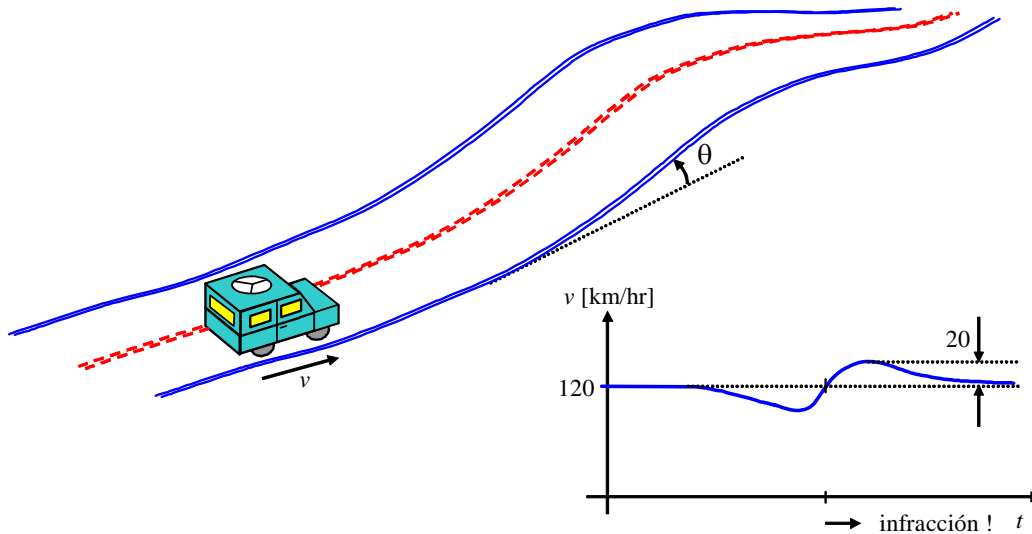


# Principio de la Realimentación

**Problema** Ilustrar que la realimentación es una forma natural de control.

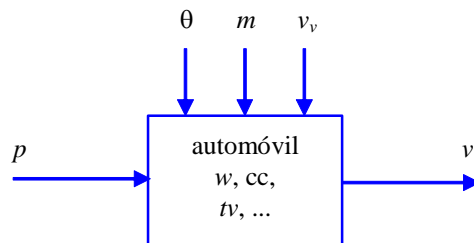
**Automóvil**



- Cantidades**
- posición del acelerador ( $p$ )
  - velocidad del móvil ( $v$ )
  - pendiente del camino ( $\theta$ )
  - peso del móvil ( $m$ )
  - ancho de los neumáticos ( $w$ )
  - velocidad del viento en contra ( $v_v$ )
  - cc del vehículo ( $cc$ )
  - tipo de bencina ( $tv$ )
  - ...

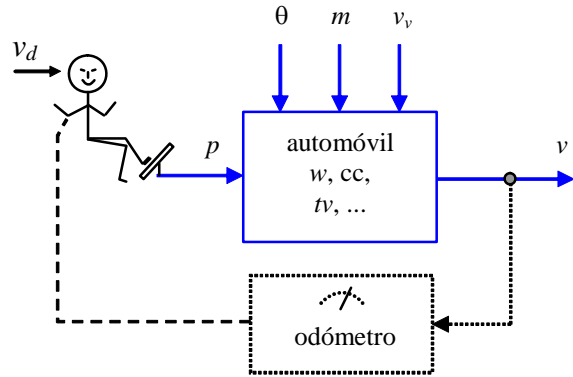
- Cantidades**
- **entrada** (manipulable): posición del acelerador ( $p$ ).
  - **salida** (controlada): velocidad del móvil ( $v$ ).
  - **parámetros** (definen el sistema): ancho de los neumáticos ( $w$ ), cc del vehículo ( $cc$ ), tipo de bencina ( $tv$ ).
  - **perturbaciones** (afectan la salida pero no son manipulables): pendiente del camino ( $\theta$ ), peso del móvil ( $m$ ), velocidad del viento en contra ( $v_v$ ).

**Diagrama**



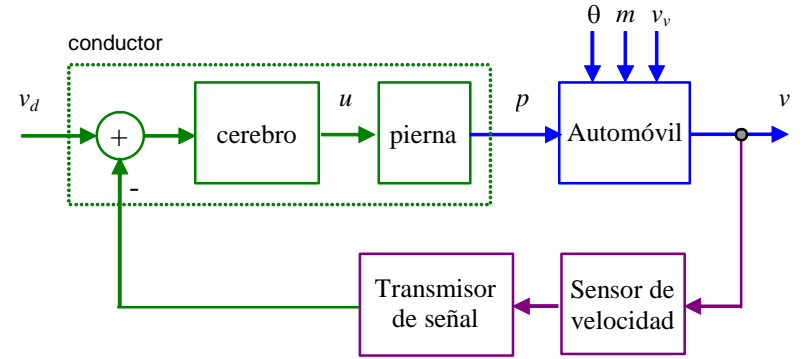
**Diagrama Realimentado**

El conductor se vale de la variable de salida para manipular la entrada de manera de lograr que la velocidad sea la deseada.



**Diagrama en Bloques**

El conductor se vale de la variable de salida para manipular la entrada de manera de lograr que la velocidad sea la deseada.

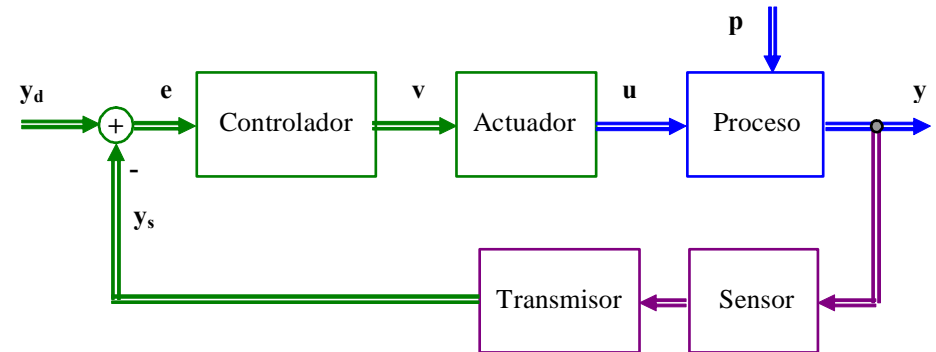


**El Controlador**

El cerebro del conductor reacciona a la diferencia entre lo deseado y lo que se tiene; es decir, al error.

$$u = k_p(v_d - v) + k_d \frac{d(v_d - v)}{dt} + k_i \int (v_d - v) dt$$

**Diagrama en Bloques Generalizado**



**Lo ideal pero no práctico.**

$$y = y_d$$

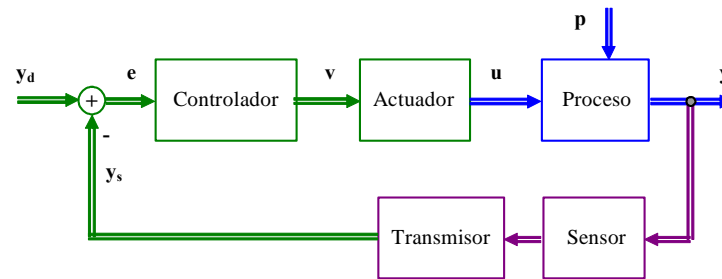
# Representación Matemática

**Problema** Derivar expresiones generalizadas.

**En Variables de Estado**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{e}p(t), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + fp(t)$$

$$\dot{\zeta}(t) = \mathbf{A}_c\zeta(t) + \mathbf{b}_c e(t), \quad v(t) = \mathbf{c}_c\zeta(t) + d_c e(t)$$



$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}k_a v(t) + \mathbf{e}p(t), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + fp(t)$$

$$\dot{\zeta}(t) = \mathbf{A}_c\zeta(t) + \mathbf{b}_c(y_d(t) - y_s(t)), \quad v(t) = \mathbf{c}_c\zeta(t) + d_c(y_d(t) - y_s(t))$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}k_a(\mathbf{c}_c\zeta(t) + d_c(y_d(t) - k_{st}y(t))) + \mathbf{e}p(t), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + fp(t)$$

$$\dot{\zeta}(t) = \mathbf{A}_c\zeta(t) + \mathbf{b}_c(y_d(t) - k_{st}y(t)),$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}k_a d_c k_{st} \mathbf{c})\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}k_a \mathbf{c}_c \zeta(t) + \mathbf{b}k_a d_c y_d(t) + (\mathbf{e} - \mathbf{b}k_a d_c k_{st} f)p(t), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + fp(t)$$

$$\dot{\zeta}(t) = -\mathbf{b}_c k_{st} \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_c \zeta(t) + \mathbf{b}_c y_d(t) - \mathbf{b}_c k_{st} fp(t),$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}k_a d_c k_{st} \mathbf{c} & \mathbf{b}k_a \mathbf{c}_c \\ -\mathbf{b}_c k_{st} \mathbf{c} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}k_a d_c \\ \mathbf{b}_c \end{bmatrix} y_d(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{e} - \mathbf{b}k_a d_c k_{st} f \\ -\mathbf{b}_c k_{st} f \end{bmatrix} p(t)$$

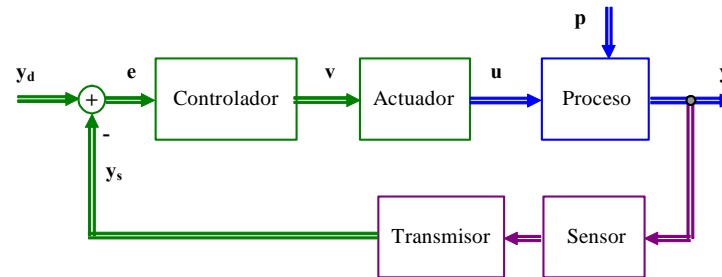
$$y(t) = [\mathbf{c} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} + fp(t)$$

En F. de T.

$$y(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(s) = h_{yu}(s)u(s)$$

$$y(s) = \{\mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{e} + \mathbf{f}\}p(s) = h_{yp}(s)p(s)$$

$$y(s) = h_{yu}(s)u(s) + h_{yp}(s)p(s)$$



$$y(s) = h_{yu}(s)h_a(s)v(s) + h_{yp}(s)p(s)$$

$$= h_{yu}(s)h_a(s)h_c(s)e(s) + h_{yp}(s)p(s)$$

$$= h_{yu}(s)h_a(s)h_c(s)(y_d(s) - y_s(s)) + h_{yp}(s)p(s)$$

$$= h_{yu}(s)h_a(s)h_c(s)(y_d(s) - h_{st}(s)y(s)) + h_{yp}(s)p(s)$$

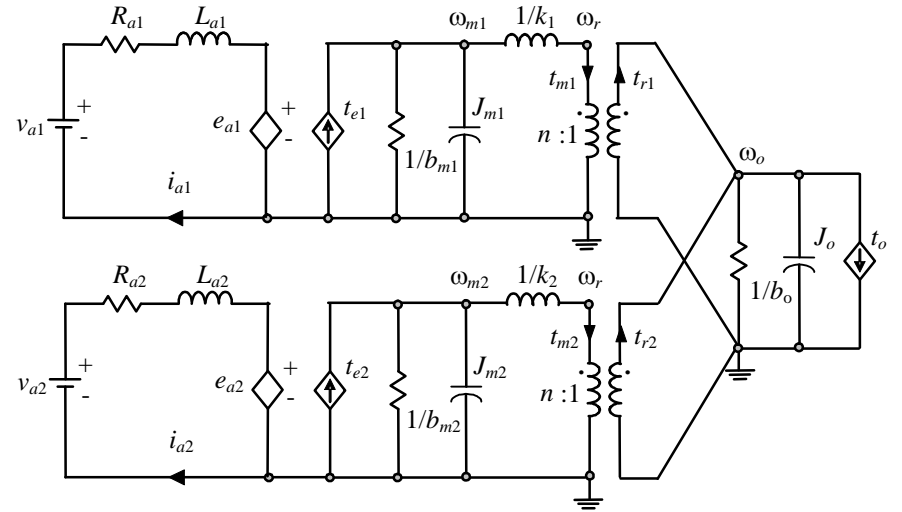
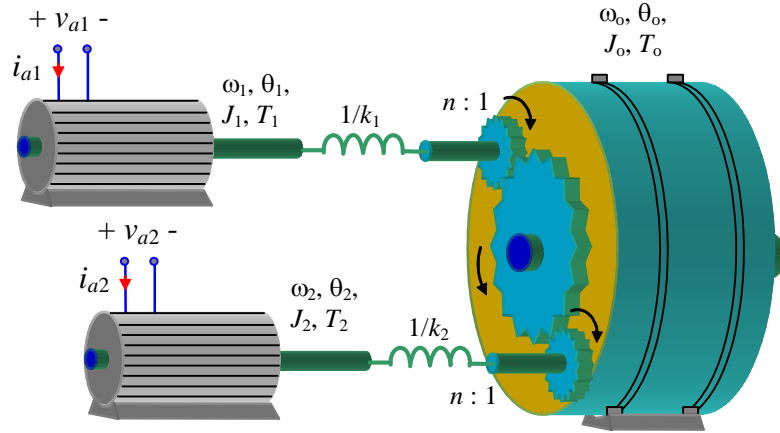
$$= h_{yu}(s)h_a(s)h_c(s)y_d(s) - h_{yu}(s)h_a(s)h_c(s)h_{st}(s)y(s) + h_{yp}(s)p(s)$$

$$y(s) = \frac{h_{yu}(s)h_a(s)h_c(s)}{1 + h_{yu}(s)h_a(s)h_c(s)h_{st}(s)} y_d(s) + \frac{h_{yp}(s)}{1 + h_{yu}(s)h_a(s)h_c(s)h_{st}(s)} p(s)$$

# Otros Tipos de Sistemas

**Problema** Ilustrar con ejemplos la existencia de otros tipos de sistemas.

**Sistema Multi Variable**



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{a1}/L_{a1} & 0 & 0 & -k_{m1}/L_{a1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_{a2}/L_{a2} & 0 & 0 & -k_{m2}/L_{a2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n/J_o & n/J_o & 0 \\ k_{m1}/J_{m1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/J_{m1} & 0 \\ 0 & k_{m2}/J_{m2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/J_{m2} \\ 0 & 0 & -nk_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -nk_2 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} +$$

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7]^T = [i_{a1} \ i_{a2} \ \omega_o \ \omega_{m1} \ \omega_{m2} \ t_{m1} \ t_{m2}]^T$ , a las entradas  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T = [v_{a1} \ v_{a2}]^T$ , la perturbación  $p = t_o$  y a las salidas  $\omega_o$  y a  $i_{a1} - i_{a2}$ .

$$\begin{bmatrix} 1/L_{a1} & 0 \\ 0 & 1/L_{a2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/J_o \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} p$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ep}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} + \mathbf{Fp}$$

**Parámetros**

$$L := 12 \cdot 10^{-3} \quad C := 250 \cdot 10^{-6} \quad R := 10$$

$$d_o := 0.5 \quad e_o := 10$$

$$\Delta d_1 := -0.2 \quad \Delta d_2 := 0.3 \quad \Delta e := -2$$

**Modelo.**

$$e \cdot Sw = L \cdot \frac{di}{dt} + v(1 - Sw) \quad i \cdot (1 - Sw) = C \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$$

**Modelo Promedio.**

$$\frac{d}{dt} v = -\frac{v}{R \cdot C} + \frac{1}{C} \cdot i \cdot (1 - d) \quad \frac{d}{dt} i = \frac{-1}{L} \cdot v \cdot (1 - d) + \frac{1}{L} \cdot e \cdot d$$

**Punto de operación**

$$e_o \cdot d_o = v_o \cdot (1 - d_o) \quad i_o \cdot (1 - d_o) = \frac{v_o}{R}$$

$$v_o := \frac{d_o}{1 - d_o} \cdot e_o \quad i_o := \frac{v_o}{R \cdot (1 - d_o)}$$

**Simulación (sólo para encontrar el punto de operación)**

$$T := 0.002 \quad \text{Dien}(t) := \frac{t}{T} \cdot (\Phi(t) - \Phi(t - T)) \quad \text{Sierra}(t) := \text{Dien}(\text{mod}(t, T))$$

$$e(t) := e_o \quad d(t) := d_o \quad p(t) := e(t) \quad S_w(t) := \text{if}(d(t) > \text{Sierra}(t), 1, 0)$$

$$t_f := 0.1 \quad n_f := 2000 \quad n := 0 .. n_f \quad t := 0, \frac{t_f}{n_f} .. t_f \quad u(t) := S_w(t)$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{x_2}{C} \cdot (1 - u(t)) - \frac{x_1}{R \cdot C} \\ \frac{p(t) \cdot u(t)}{L} - \frac{x_1}{L} \cdot (1 - u(t)) \end{bmatrix} \quad CI := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Z_a := \text{rkfixed}(CI, 0, t_f, n_f, D) \quad CI := \begin{pmatrix} Z_{a_{n_f, 2}} \\ Z_{a_{n_f, 3}} \end{pmatrix}$$

Las condiciones iniciales son las condiciones finales de la simulación anterior.

**Modelo.**

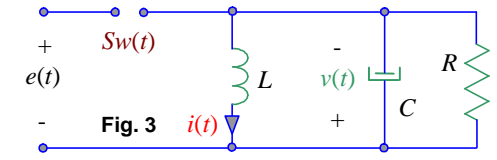
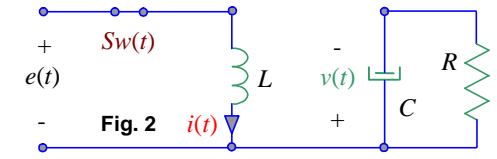
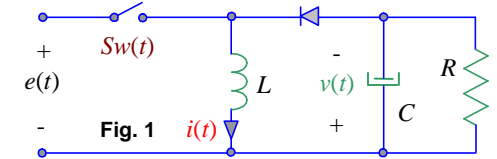
$$e = L \cdot \frac{di}{dt} \quad 0 = C \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \quad Sw = 1$$

$$0 = L \cdot \frac{di}{dt} + v \quad i = C \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \quad Sw = 0$$

**Modelo Ordenado.**

$$\frac{d}{dt} v = -\frac{v}{R \cdot C} + \frac{1}{C} \cdot i \cdot (1 - Sw)$$

$$\frac{d}{dt} i = \frac{-1}{L} \cdot v \cdot (1 - Sw) + \frac{1}{L} \cdot e \cdot Sw$$



**Variables de Estado**

$$x_1 = v \quad x_2 = i$$

**Entrada/Perturbación**

$$u_o := d_o \quad p_o := e_o$$

**Simulación con Sw.**

$$e(t) := e_o + \Delta e \cdot \Phi(t - 0.07) \quad p(t) := e(t)$$

$$d(t) := d_o + \Delta d_1 \cdot \Phi(t - 0.01) + \Delta d_2 \cdot \Phi(t - 0.04)$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{x_2}{C} \cdot (1 - u(t)) - \frac{x_1}{R \cdot C} \\ \frac{p(t) \cdot u(t)}{L} - \frac{x_1}{L} \cdot (1 - u(t)) \end{bmatrix}$$

$$S_w(t) := \text{if}(d(t) > \text{Sierra}(t), 1, 0)$$

$$u(t) := S_w(t)$$

$$Z_a := \text{rkfixed}(CI, 0, t_f, n_f, D)$$

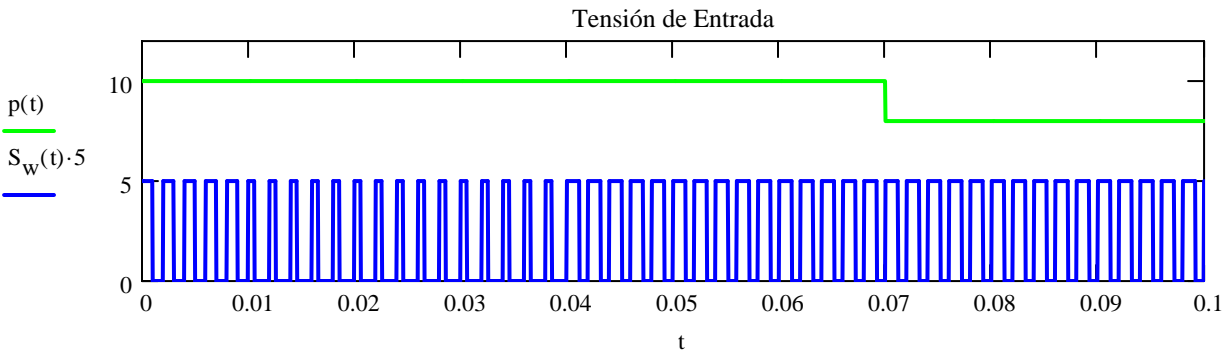
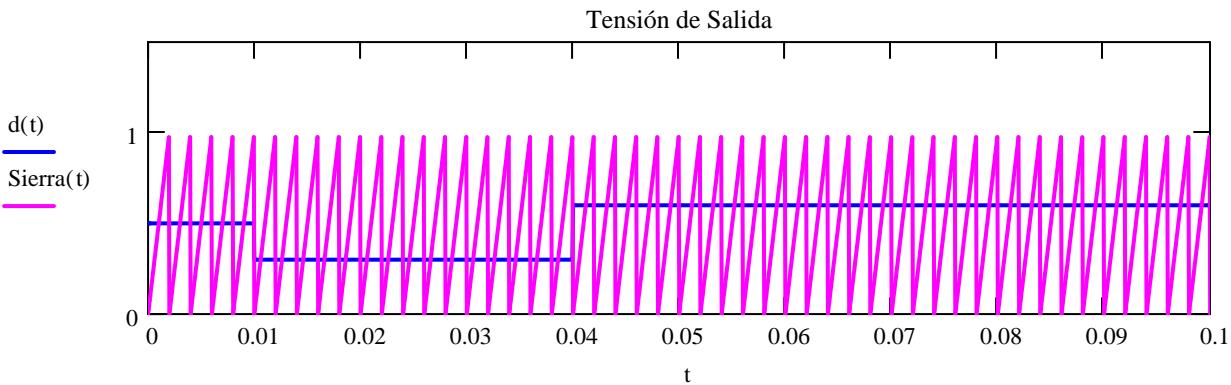
**Simulación con d(t).**

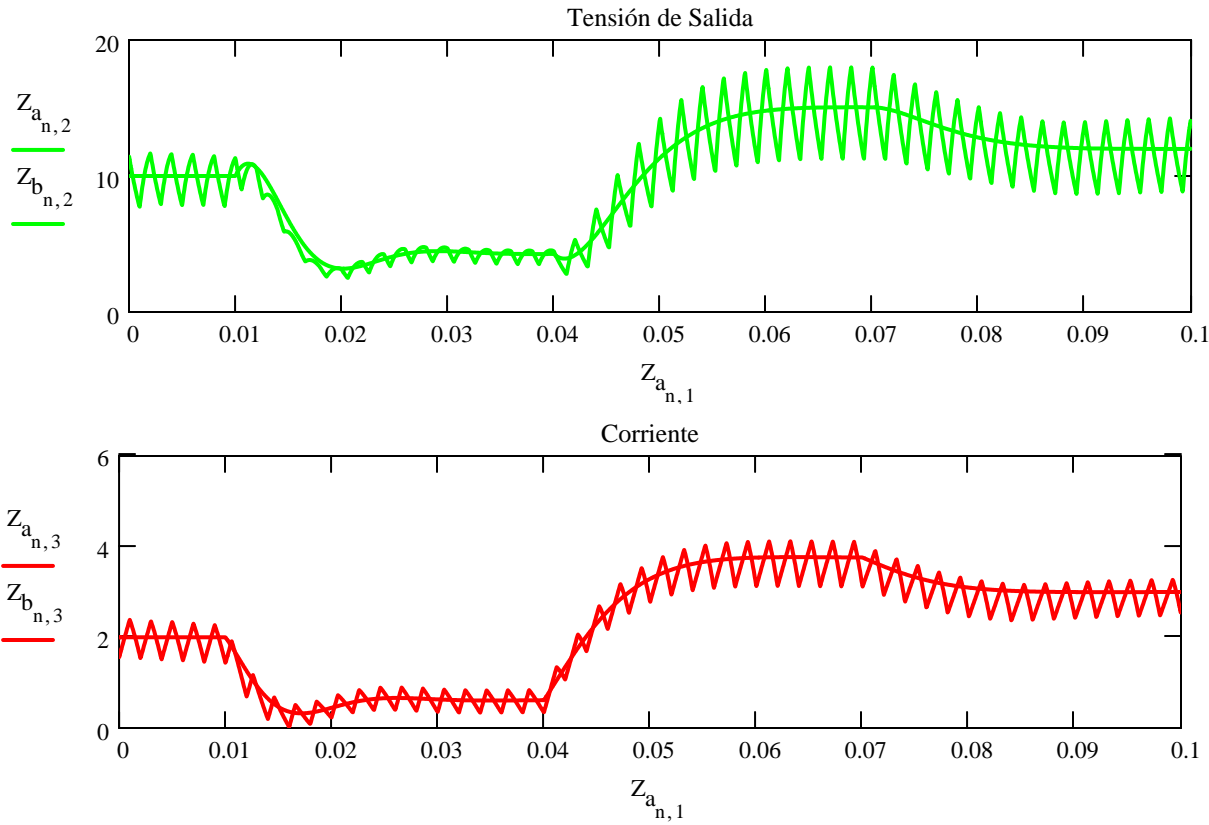
$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{x_2}{C} \cdot (1 - u(t)) - \frac{x_1}{R \cdot C} \\ \frac{p(t) \cdot u(t)}{L} - \frac{x_1}{L} \cdot (1 - u(t)) \end{bmatrix} \quad CI := \begin{pmatrix} v_o \\ i_o \end{pmatrix}$$

$$u(t) := d(t)$$

$$Z_b := \text{rkfixed}(CI, 0, t_f, n_f, D)$$

**Comparación de todos los casos.**





**Modelo Promedio.**

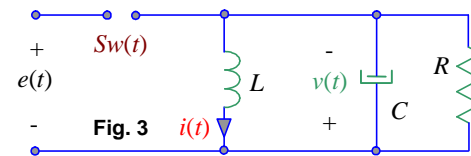
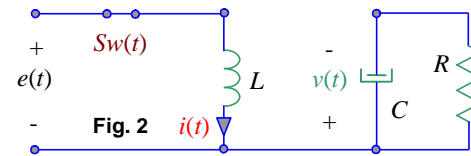
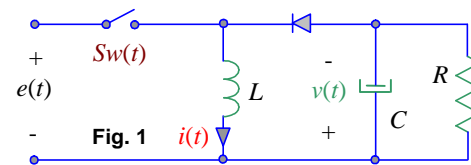
$$\frac{d}{dt}v = -\frac{v}{R \cdot C} + \frac{1}{C} \cdot i \cdot (1 - d)$$

$$\frac{d}{dt}i = \frac{-1}{L} \cdot v \cdot (1 - d) + \frac{1}{L} \cdot e \cdot d$$

**Modelo Promedio Lineal.**

$$\frac{d}{dt}\Delta v = -\frac{\Delta v}{R \cdot C} + \frac{1}{C} \cdot \Delta i \cdot (1 - d_o) + \frac{-1}{C} \cdot i_o \cdot \Delta d$$

$$\frac{d}{dt}\Delta i = \frac{-1}{L} \cdot \Delta v \cdot (1 - d_o) + \frac{v_o + e_o}{L} \cdot \Delta d + \frac{1}{L} \cdot \Delta e \cdot d_o$$



Definición de Variables Normalizadas

$$\frac{\Delta v}{v_o} = \Delta v_n \quad \frac{\Delta d}{d_o} = \Delta d_n$$

$$\frac{\Delta i}{i_o} = \Delta i_n \quad \frac{\Delta e}{e_o} = \Delta e_n$$

### Modelo Promedio Lineal Normalizado.

$$\frac{d}{dt} \Delta v_n = -\frac{\Delta v_n}{R \cdot C} + \frac{1}{C} \cdot \frac{\Delta i}{v_o} \cdot (1 - d_o) + \frac{-1}{C} \cdot \frac{i_o}{v_o} \cdot \Delta d$$

$$\frac{d}{dt} \Delta i_n = \frac{-1}{L} \cdot \frac{\Delta v}{i_o} \cdot (1 - d_o) + \frac{v_o + e_o}{L \cdot i_o} \cdot \Delta d + \frac{1}{L} \cdot \frac{\Delta e}{i_o} \cdot d_o \quad \text{usando,} \quad e_o \cdot d_o = v_o \cdot (1 - d_o) \quad i_o \cdot (1 - d_o) = \frac{v_o}{R}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta v_n = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot \Delta v_n + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \Delta i_n + \frac{-1}{R \cdot C} \cdot \frac{d_o}{1 - d_o} \cdot \Delta d_n$$

$$\frac{d}{dt} \Delta i_n = \frac{-R}{L} \cdot (1 - d_o)^2 \cdot \Delta v_n + \frac{R}{L} \cdot (1 - d_o) \cdot \Delta d_n + \frac{R}{L} \cdot (1 - d_o)^2 \cdot \Delta e_n$$

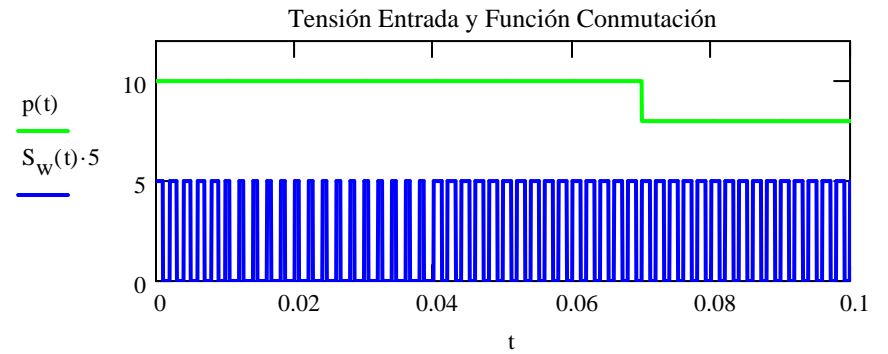
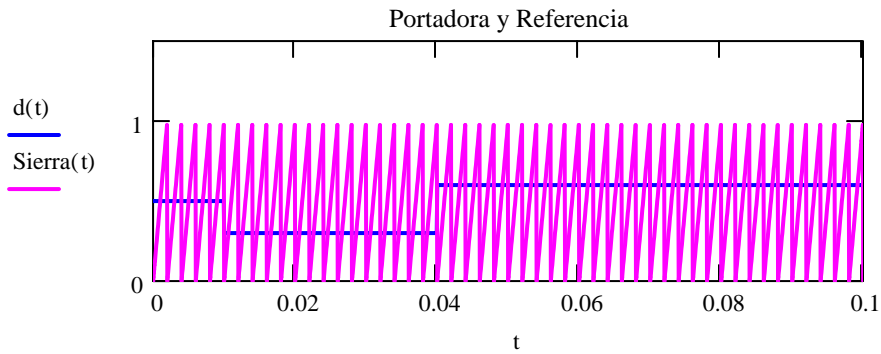
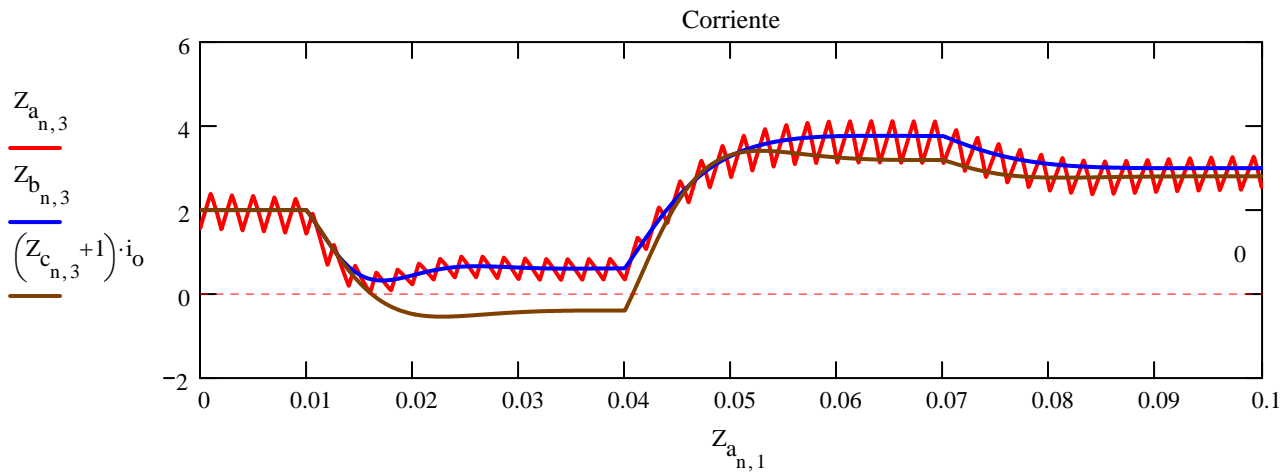
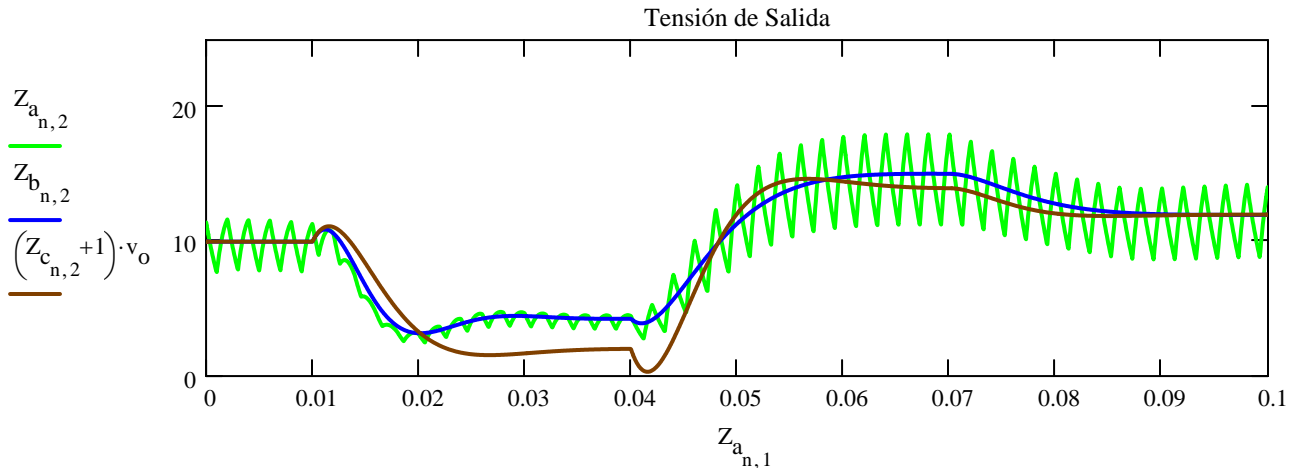
Modelo Normalizado en Ecuaciones de Estado

$$A_n := \begin{bmatrix} \frac{-1}{R \cdot C} & \frac{1}{R \cdot C} \\ \frac{-R}{L} \cdot (1 - d_o)^2 & 0 \end{bmatrix} \quad b_n := \begin{bmatrix} \frac{-1}{R \cdot C} \cdot \frac{d_o}{1 - d_o} \\ \frac{R}{L} \cdot (1 - d_o) \end{bmatrix} \quad e_n := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R}{L} \cdot (1 - d_o)^2 \end{bmatrix} \quad c_n := (1 \ 0)$$

$$\Delta p_n(t) := \frac{p(t) - p_o}{p_o} \quad \Delta u_n(t) := \frac{u(t) - u_o}{u_o}$$

$$D(t, x) := A_n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_n \cdot \Delta u_n(t) + e_n \cdot \Delta p_n(t) \quad CI := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Z_c := \text{rkfixed}(CI, 0, t_f, n_f, D)$$

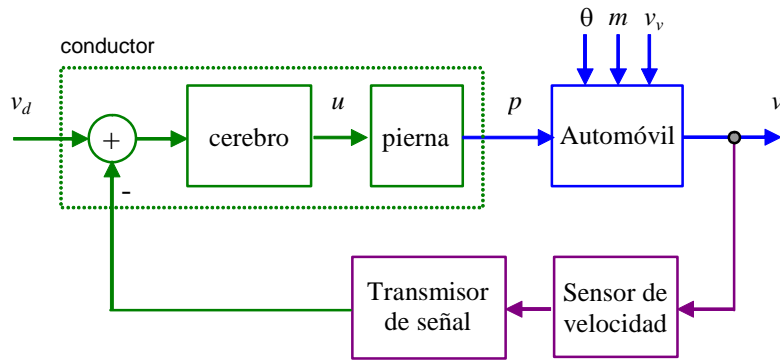
Comparación de todos los casos.



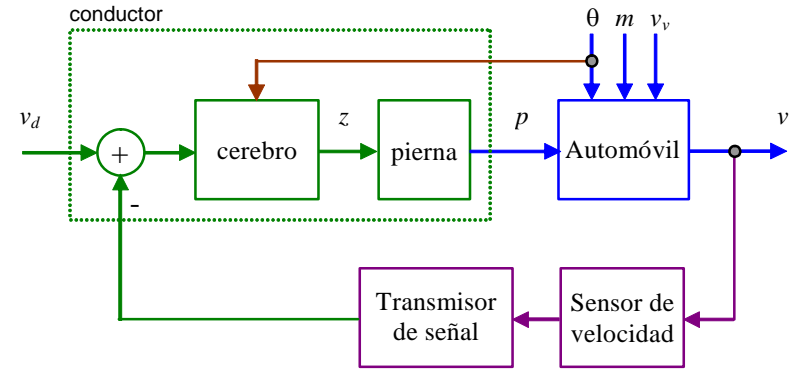
# Control Realimentado y Prealimentado

**Problema** Ilustrar que el control pre-alimentado es también una opción ampliamente utilizada.

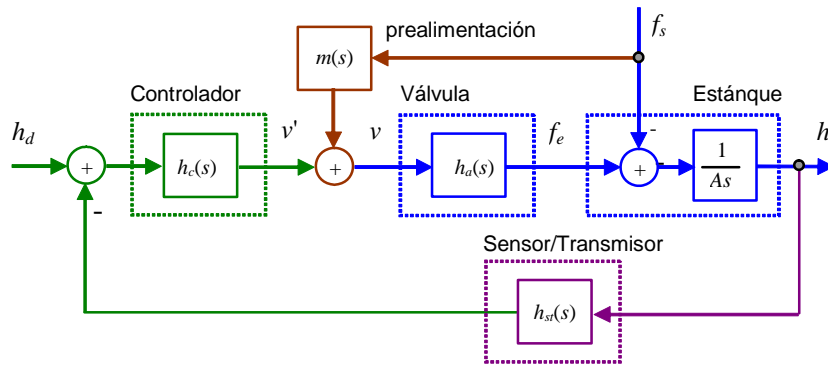
**Ejemplo** Conducción de un automóvil.



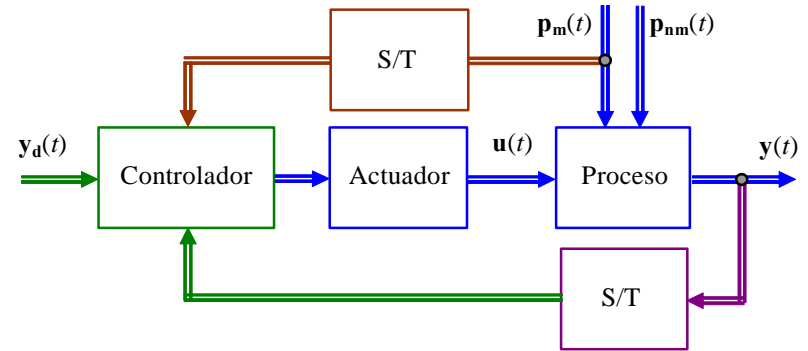
Control realimentado.



La información de la pendiente es utilizada en paralelo a la velocidad para mantener la velocidad.



En general, se sostiene que esta información adicional modifica la variable manipulada.



No todas las perturbaciones son medibles o están disponibles para ser utilizadas en un esquema pre-alimentado.

# Control Realimentado y Prealimentado

**Problema** Ilustrar la eficacia del control realimentado.

**Estanque**

Modelo

$$\frac{d}{dt}h = \frac{1}{A_e} \cdot (f_e - f_s)$$

Parámetros.

$$f_{s0} := 0 \quad h_a(s) = 1 \quad A_e := 2.5 \quad h_d := 2$$

$$a := 0 \quad b := \frac{1}{A_e} \quad e := -\frac{1}{A_e}$$

Variable de Estado

$$x_1 = h$$

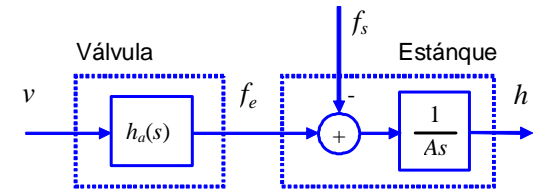
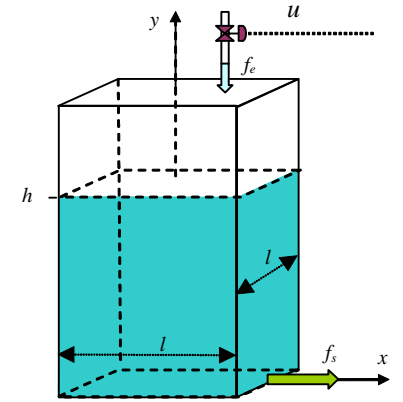
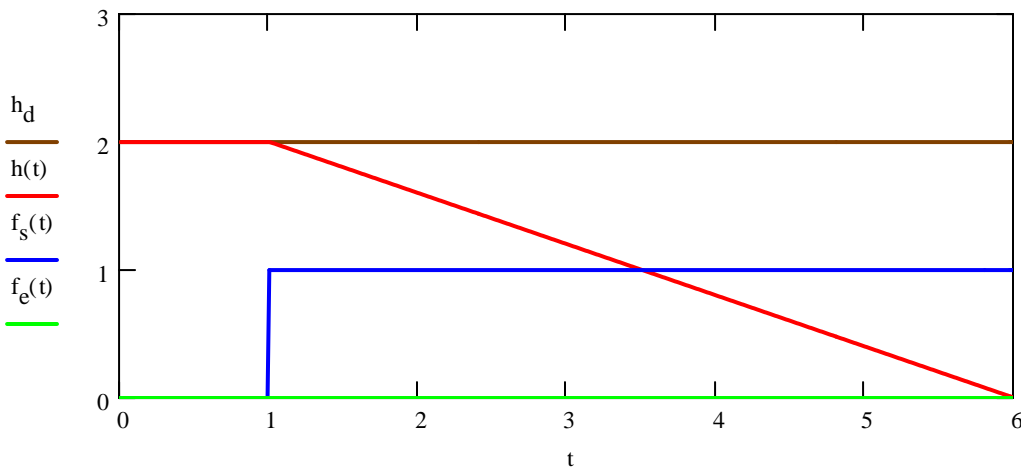
Entrada y perturbación.

$$f_e(t) := 0 \quad f_s(t) := f_{s0} + 1 \cdot \Phi(t - 1)$$

Simulación.

$$t_f := 6 \quad n_f := 500 \quad m := 0..n_f \quad h_0 := 2 \quad t := 0, \frac{t_f}{n_f} .. t_f$$

$$D(t, x) := a \cdot x_1 + b \cdot f_e(t) + e \cdot f_s(t) \quad Z_a := \text{rkfixed}(h_0, 0, t_f, n_f, D) \quad h(t) := Z_a \cdot \frac{n_f}{t_f}, 2$$



**Simulación en L.C. Caso 1**

Controlador.	$h_c(s) = k_p \cdot \frac{1}{\tau \cdot s + 1}$	$h_{st}(s) = 1$		
Modelo.	$\frac{d}{dt}h = \frac{1}{A_e} \cdot (f_e - f_s)$	$\frac{d}{dt}f_e = \frac{1}{\tau} \cdot [k_p \cdot (h_d - h) - f_e]$		
Variables de Estado.	$x_1 = h$	$x_2 = f_e$		
Parámetros y c.i.	$k_p := 4$ $\tau := 0.1$	$h_0 := 2$ $f_{e0} := 0$	$f_{s0} := 0$ $h_d := 2$	$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A_e} \\ -\frac{k_p}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$ $b := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_p}{\tau} \end{pmatrix}$ $e := \begin{pmatrix} -1 \\ A_e \\ 0 \end{pmatrix}$

Perturbación.

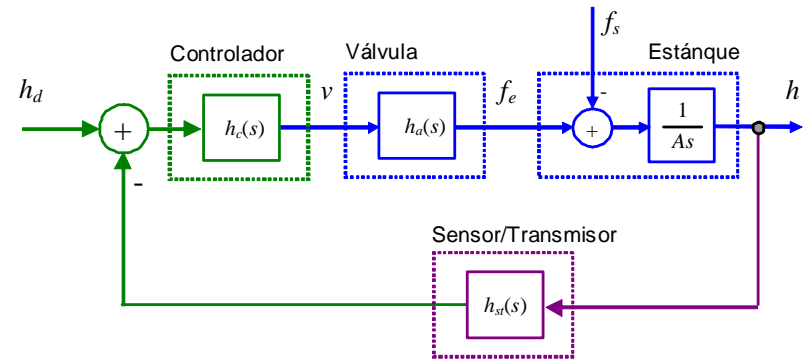
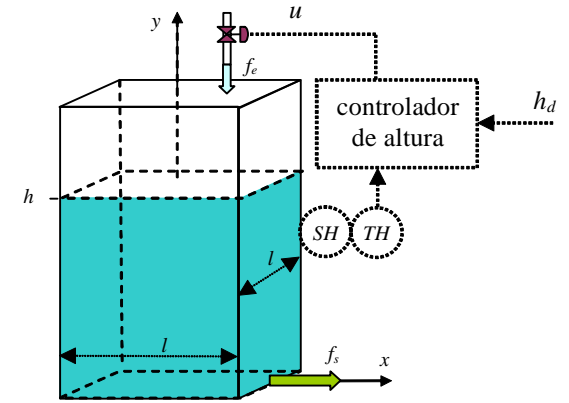
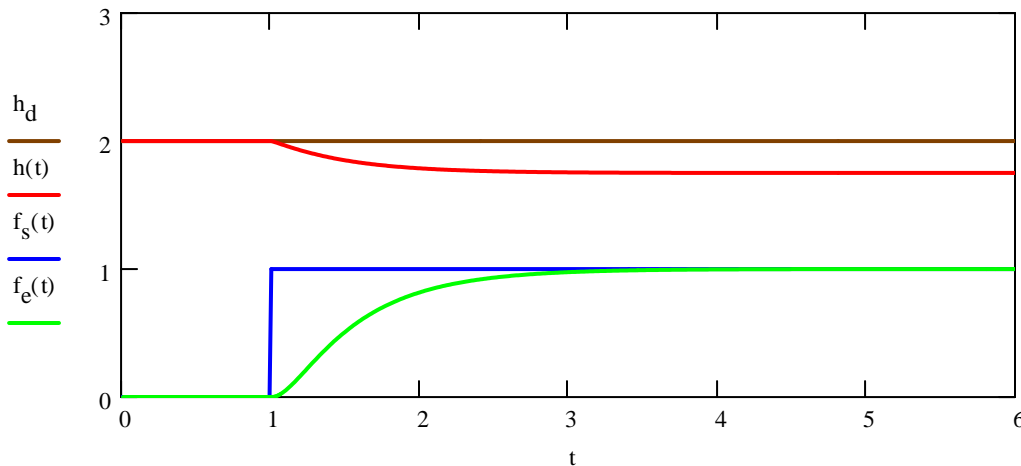
$$f_s(t) := f_{s0} + 1 \cdot \Phi(t - 1)$$

Simulación.

$$t_f := 6 \quad n_f := 500 \quad m := 0..n_f \quad t := 0, \frac{t_f}{n_f} .. t_f$$

$$D(t, x) := A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \cdot h_d + e \cdot f_s(t) \quad Z_a := \text{rkfixed} \left[ \begin{pmatrix} h_0 \\ f_{e0} \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$

$$h(t) := Z_a \begin{matrix} n_f \\ t \cdot \frac{n_f}{t_f}, 2 \end{matrix} \quad f_e(t) := Z_a \begin{matrix} n_f \\ t \cdot \frac{n_f}{t_f}, 3 \end{matrix}$$



**Simulación en L.C. Caso 2**

Controlador.

$$h_c(s) = k_p \cdot \frac{\tau \cdot s + 1}{s} \quad h_{st}(s) = 1$$

Modelo.

$$\frac{d}{dt}h = \frac{1}{A_e} \cdot (f_e - f_s) \quad f_e = k_p \cdot \tau \cdot (h_d - h) + k_p \cdot \frac{(h_d - h)}{s}$$

Variables de Estado.

$$x_1 = h \quad x_2 = \frac{h_d - h}{s}$$

Modelo. en variables de estado.

$$\frac{d}{dt}x_1 = \frac{1}{A_e} \cdot [k_p \cdot \tau \cdot (h_d - x_1) + k_p \cdot x_2 - f_s]$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = h_d - x_1$$

Parámetros y c.i.

$$k_p := 15 \quad h_0 := 2 \quad f_{s0} := 0$$

$$\tau := 0.5 \quad f_{e,0} := 0 \quad h_d := 2$$

$$A := \begin{pmatrix} \frac{-k_p \cdot \tau}{A_e} & \frac{k_p}{A_e} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} \frac{k_p \cdot \tau}{A_e} \\ 1 \end{pmatrix} \quad e := \begin{pmatrix} \frac{-1}{A_e} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Perturbación.

$$f_s(t) := f_{s0} + 1 \cdot \Phi(t - 1)$$

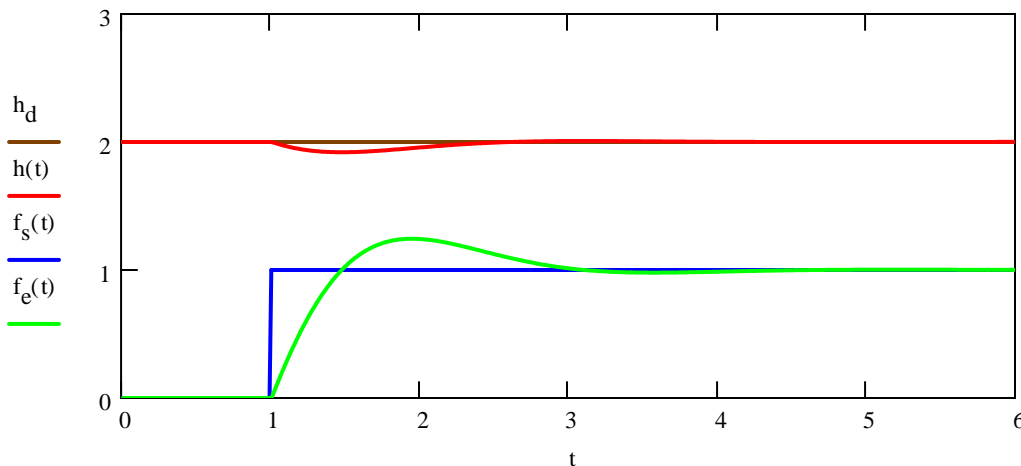
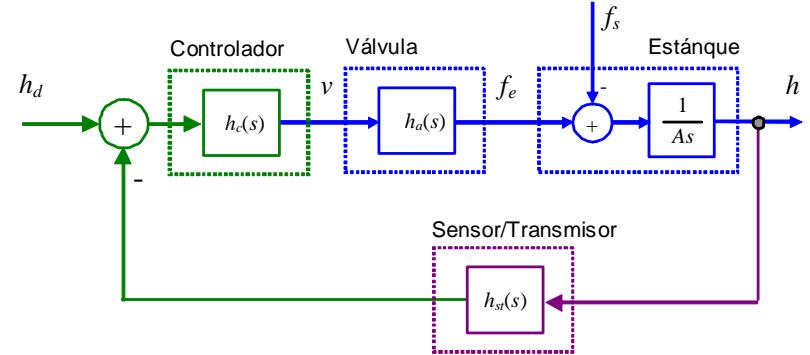
Simulación.

$$n_f := 500 \quad m := 0 \dots n_f \quad t := 0, \frac{t_f}{n_f} \dots t_f$$

$$D(t, x) := A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \cdot h_d + e \cdot f_s(t) \quad Z_a := \text{rkfixed} \left[ \begin{pmatrix} h_0 \\ f_{e0} \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$

$$h(t) := Z_a \cdot \begin{pmatrix} n_f \\ t - \frac{n_f}{t_f}, 2 \end{pmatrix}$$

$$f_e(t) := k_p \cdot \tau \cdot (h_d - h(t)) + k_p \cdot Z_a \cdot \begin{pmatrix} n_f \\ t - \frac{n_f}{t_f}, 3 \end{pmatrix}$$



**Simulación en L.C. y con Prealimentación Caso 3**

Controlador.  $h_c(s) = k_p \cdot \frac{\tau \cdot s + 1}{s}$   $h_{st}(s) = 1$   $m(s) = 1$

Modelo.  $\frac{d}{dt}h = \frac{1}{A_e} \cdot (f_e - f_s)$   $f_e = k_p \cdot \tau \cdot (h_d - h) + k_p \cdot \frac{(h_d - h)}{s} + f_s$

Variables de Estado.  $x_1 = h$   $x_2 = \frac{h_d - h}{s}$

Modelo en var. de estado.  $\frac{d}{dt}x_1 = \frac{1}{A_e} \cdot [k_p \cdot \tau \cdot (h_d - x_1) + k_p \cdot x_2]$   $\frac{d}{dt}x_2 = h_d - x_1$

Parámetros y c.i.  $k_p := 15$   $\tau := 0.5$   $h_0 := 2$   $f_{e0} := 0$   
 $f_{s0} := 0$   $h_d(t) := 2 + 0.2\Phi(t - 3)$

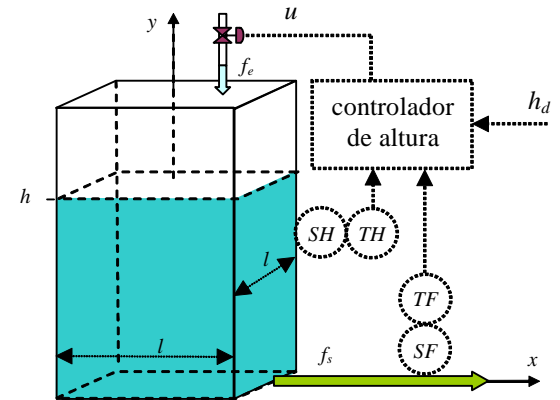
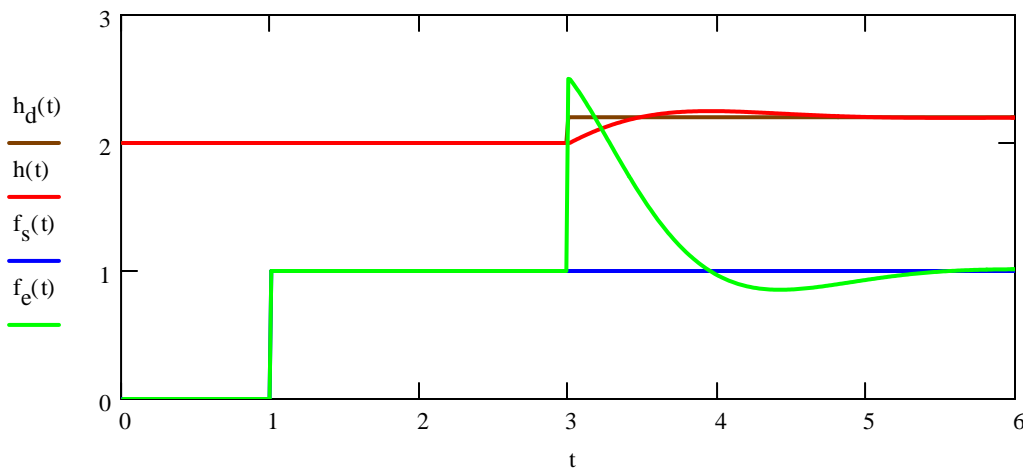
Perturbación.

$f_s(t) := f_{s0} + 1 \cdot \Phi(t - 1)$

Simulación.

$t_f := 6$   $n_f := 500$   $m := 0 \dots n_f$   $t := 0, \frac{t_f}{n_f} \dots t_f$

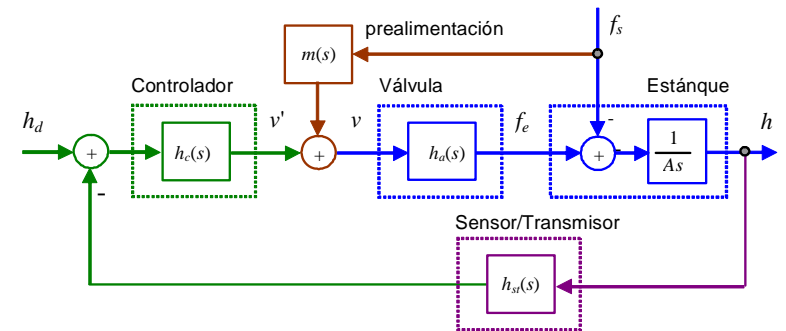
$D(t, x) := A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b \cdot h_d(t) + e \cdot f_s(t)$   $Z_a := \text{rkfixed} \left[ \begin{pmatrix} h_0 \\ f_{e0} \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$



$A := \begin{pmatrix} -\frac{k_p \cdot \tau}{A_e} & \frac{k_p}{A_e} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$b := \begin{pmatrix} \frac{k_p \cdot \tau}{A_e} \\ 1 \end{pmatrix}$   $e := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h(t) := Z_a \cdot \begin{matrix} n_f \\ t - \frac{\quad}{t_f}, 2 \end{matrix}$   $f_e(t) := k_p \cdot \tau \cdot (h_d(t) - h(t)) + k_p \cdot Z_a \cdot \begin{matrix} n_f \\ t - \frac{\quad}{t_f}, 3 \end{matrix} + f_s(t)$



# Control en Cascada de una Máquina de C.C. con Eje Flexible

**Problema** Ilustrar las bondades del control en cascada.

**Parámetros**  $d := 0.08$      $R_a := 1.2$      $J := 0.135$      $k_m := 0.6$      $L_a := 50 \cdot 10^{-3}$      $t_l := 60$

Ecuaciones:

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a$$

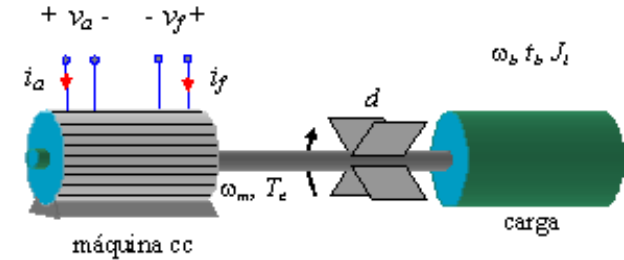
$$t_e = J \frac{d\omega_m}{dt} + d\omega_m + t_l \quad \text{rr} := \frac{60}{2 \cdot \pi}$$

**Variables de Estado**

**Modelo.**

$$x_1 = i_a \quad x_2 = \omega$$

$$A := \begin{pmatrix} \frac{-R_a}{L_a} & \frac{-k_m}{L_a} \\ \frac{k_m}{J} & \frac{-d}{J} \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{pmatrix} \quad e := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ J \end{pmatrix} \quad c := (0 \ 1)$$



**Simulación en L.A. con  $v_a$  para tener 3000 y luego 1500 rpm en la carga.**

$$V_a := \left[ \frac{3000}{\text{rr}} - t_l \cdot c \cdot (-A)^{-1} \cdot e \right] \cdot \frac{1}{c \cdot (-A)^{-1} \cdot b} \quad t_d := 3 \quad v_a(t) := V_a \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \Phi(t - t_d) \right)$$

$$t_f := 6 \quad n_f := 500 \quad m := 0..n_f \quad u(t) := v_a(t) \quad p(t) := t_l$$

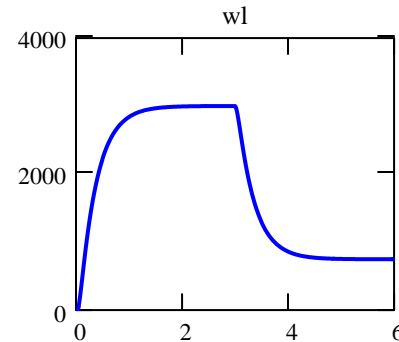
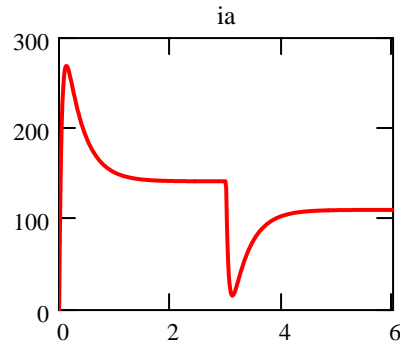
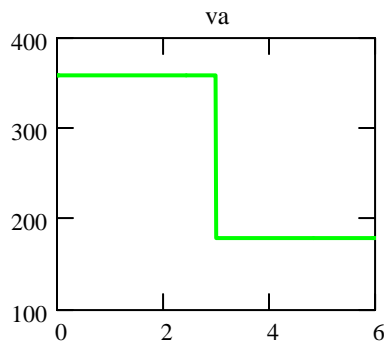
$$D(t, x) := A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T + b \cdot u(t) + e \cdot p(t) \quad Z_a := \text{rkfixed} \left( (0 \ 0)^T, 0, t_f, n_f, D \right)$$

donde las cantidades están relacionadas como sigue:

$$e_a = k_m \cdot \omega_m.$$

$$t_e = k_m \cdot i_a$$

$$J = J_l + J_m$$



Simulación en L.C. con un controlador  $k_c$ . La referencia de velocidad de la carga se dispone en 3000 y luego en 1500 rpm.

$$h_p(s) := c \cdot (s \cdot \text{identity}(2) - A)^{-1} \cdot b \quad k_a := 100$$

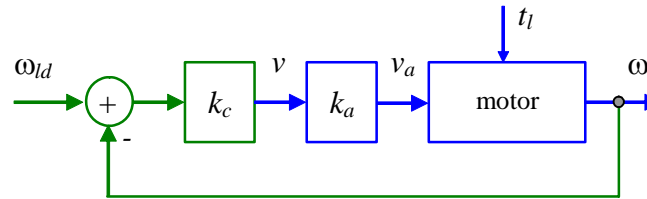
$$\Omega_{ld} := 3000$$

$$\omega_{ld}(t) := \Omega_{ld} \cdot (1 - 0.5 \cdot \Phi(t - 1)) \cdot \frac{1}{rr}$$

$$t_f := 2 \quad n_f := 200 \quad m := 0 .. n_f$$

$$D(t, x) := A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T + b \cdot k_c \cdot k_a \cdot (\omega_{ld}(t) - x_2) + e \cdot p(t)$$

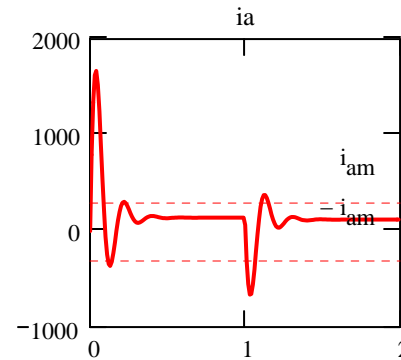
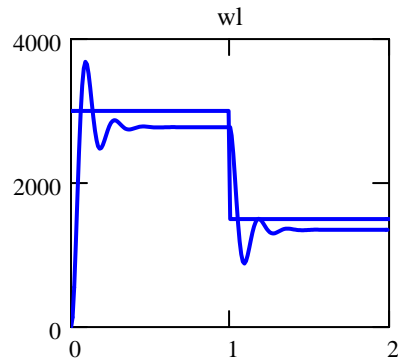
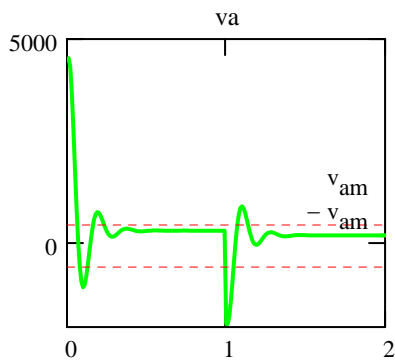
$$Z_a := \text{rkfixed} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T, 0, t_f, n_f, D \right)$$



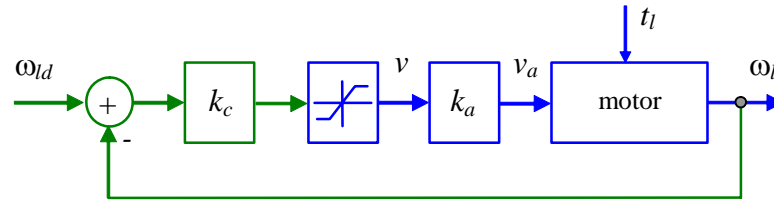
$$k_c := \frac{0.95}{h_p(0) \cdot (1 - 0.95) \cdot k_a} \quad k_c = 0.144$$

$$v_{am} := 500 \quad i_{am} := 300$$

$$v_a(m) := k_c \cdot k_a \cdot \left( \omega_{ld} \left( m \cdot \frac{t_f}{n_f} \right) - Z_{a,m,3} \right)$$



Para evitar el excesivo voltaje de armadura, se utiliza un limitador en  $\pm 500$  V. Simulación en L.C. con un controlador  $k_c$ . La referencia de velocidad en la carga se dispone en 3000 y luego en 1500 rpm.

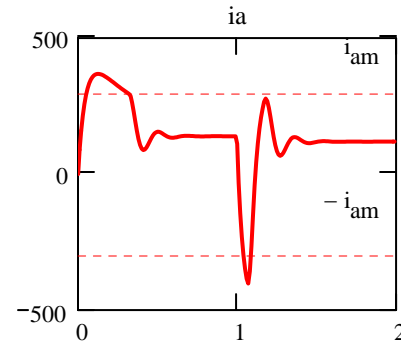
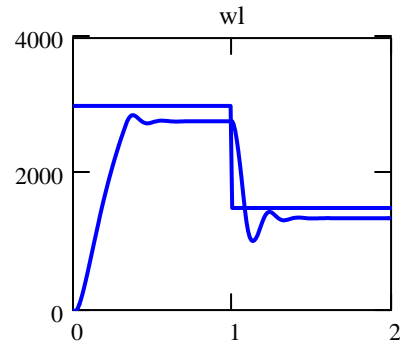
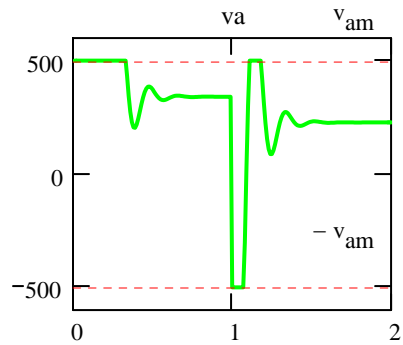


$$up_m := v_{am} \cdot k_a^{-1}$$

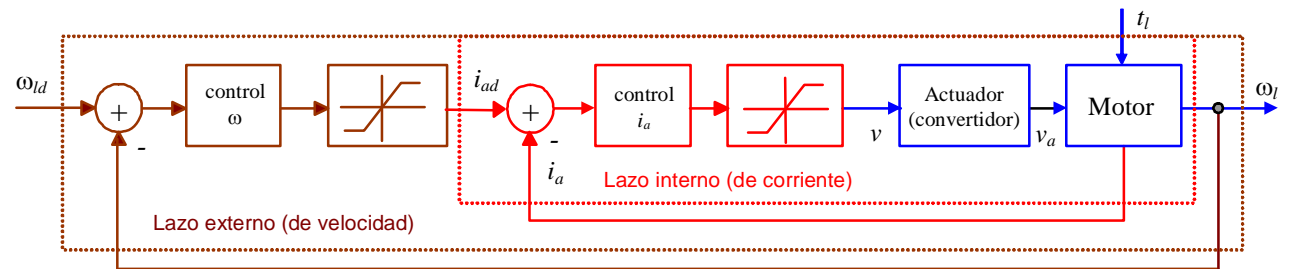
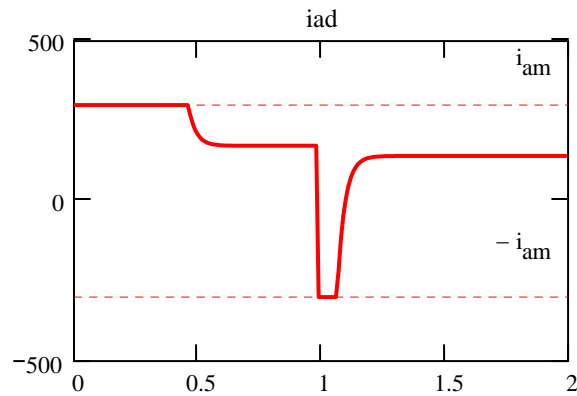
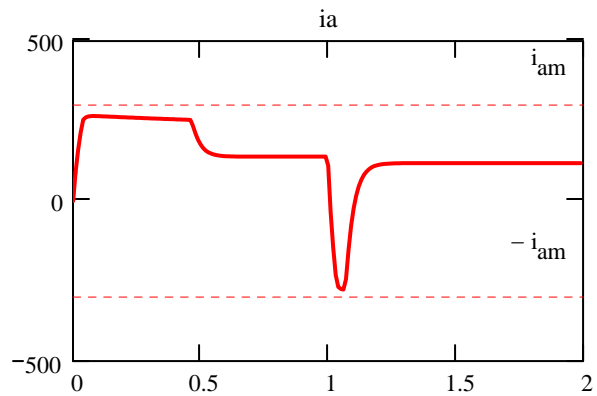
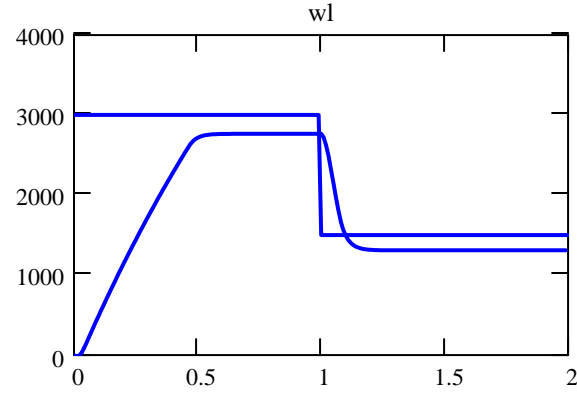
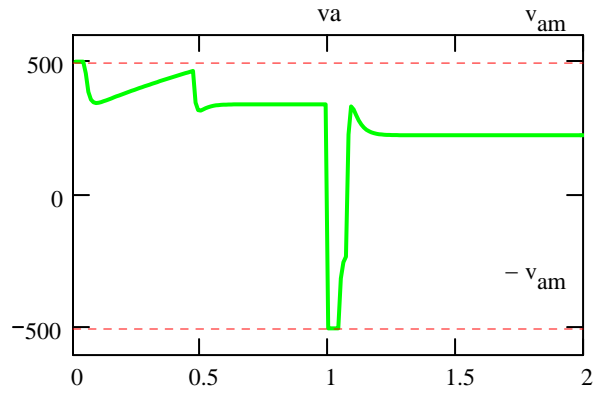
$$D(t, x) := A \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T \dots + b \cdot k_a \cdot \text{if} \left[ k_c \cdot (\omega_{ld}(t) - x_2) > up_m, up_m, \text{if} \left[ k_c \cdot (\omega_{ld}(t) - x_2) < -up_m, -up_m, k_c \cdot (\omega_{ld}(t) - x_2) \right] \right] + e \cdot p(t)$$

$$Z_a := \text{rkfixed} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T, 0, t_f, n_f, D \right)$$

$$v_a(m) := k_a \cdot \text{if} \left[ k_c \cdot \begin{pmatrix} \omega_{ld} \left( m \cdot \frac{t_f}{n_f} \right) \dots \\ + -Z_{a,m,3} \end{pmatrix} > up_m, up_m, \text{if} \left[ k_c \cdot \begin{pmatrix} \omega_{ld} \left( m \cdot \frac{t_f}{n_f} \right) \dots \\ + -Z_{a,m,3} \end{pmatrix} < -up_m, -up_m, k_c \cdot \begin{pmatrix} \omega_{ld} \left( m \cdot \frac{t_f}{n_f} \right) \dots \\ + -Z_{a,m,3} \end{pmatrix} \right] \right]$$







# Control Híbrido

**Problema** Presentar el controlador discreto en un sistema continuo.

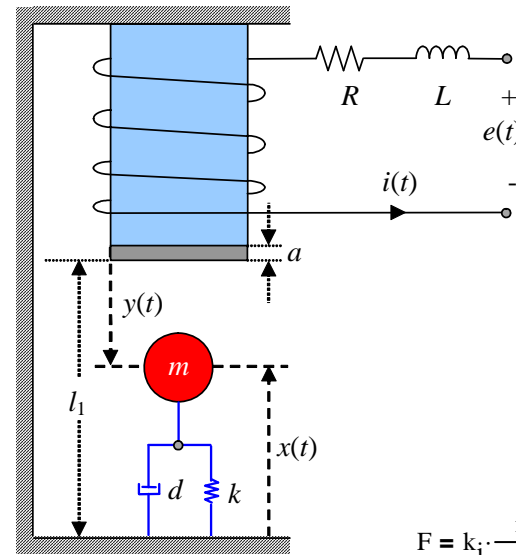
**Levitador** **Variables de Estado**

$$x_1 = i \quad x_2 = x \quad x_3 = \frac{d}{dt}x = v$$

**Modelo.**

$$e = L \cdot \frac{d}{dt}i + R \cdot i \quad m \cdot \frac{d}{dt} \frac{d}{dt}x = -m \cdot g + F + k \cdot (l_0 - x) - d \cdot \frac{d}{dt}x$$

$$m \cdot \frac{d}{dt} \frac{d}{dt}x = -m \cdot g + k_i \cdot \frac{i^2}{l_1 - x + a} + k \cdot (l_0 - x) - d \cdot \frac{d}{dt}x$$



$$F = k_i \cdot \frac{i^2}{y + a}$$

**Modelo Lineal**

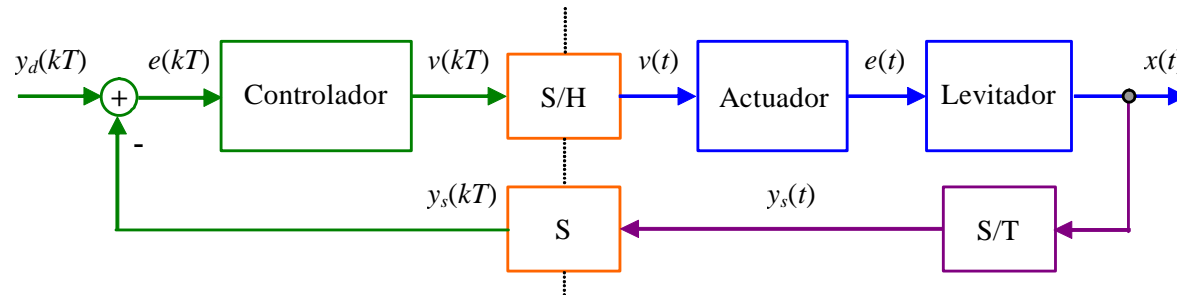
$$A := \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 \cdot \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i_0}{l_1 - x_0 + a} & \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i_0^2}{(l_1 - x_0 + a)^2} & -\frac{K}{m} \frac{-d}{m} \end{bmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c := (0 \ 1 \ 0)$$

**Punto de Operación.**

$$e_0 = R \cdot i_0$$

$$m \cdot g = k_i \cdot \frac{i_0^2}{l_1 - x_0 + a} + k \cdot (l_0 - x_0)$$

**Planta Continua con Control Discreto**



**Controladores Discretos**

$$v(kT) = k \cdot c(kT)$$

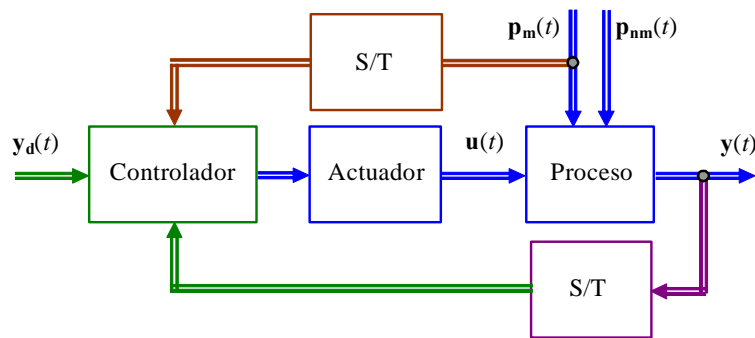
$$\begin{bmatrix} \zeta_1(kT + T) \\ \zeta_2(kT + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1(kT) \\ \zeta_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix} e(kT), \quad v(kT) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \zeta_1(kT) \\ \zeta_2(kT) \end{bmatrix} + e(kT)$$

$$h_c(z) = \frac{v(z)}{e(z)} = \frac{z^2 + 0.2}{z(z^2 + 0.5z)}$$

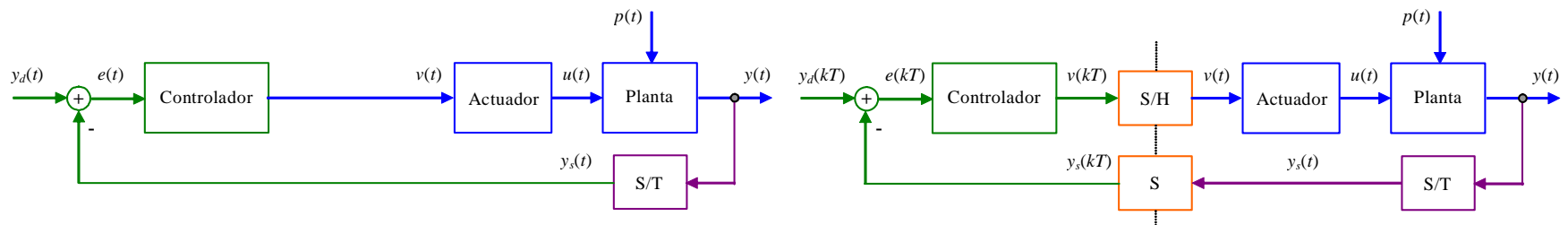
## Control Automático

- En este curso se estudiarán sistemas (plantas) **lineales, invariantes, continuas, SISO, concentradas y determinísticas**. No obstante, también se estudiarán **sistemas físicos no-lineales que admitan linealización en torno a un punto de operación**. Para controlarlos se estudiarán controladores esencialmente **realimentados** y prealimentados del tipo **tiempo continuo y tiempo discreto**. Esta última alternativa dará origen a sistemas resultante **lineales de tipo híbrido** por lo que el uso de la Transformada de Laplace, la Transformada Z y las propiedades de éstas será intensivo.
- Especial énfasis se dará a los **controladores en adelanto, atraso y el P.I.D.** (proporcional, integral, derivativo). Lo mínimo que se exigirá al diseño será **estabilidad** y lo óptimo será de acuerdo al diseño en particular.
- Se debe considerar que el control se realiza por dos razones:
  - Mantener un proceso en un punto de operación (**regulación**).
  - Llevar el proceso de un punto de operación a otro (**seguimiento**).
- Las herramientas a utilizar son esencialmente el **L.G.R.**, el **Diagrama de Bode** y el **Criterio de Nyquist**.

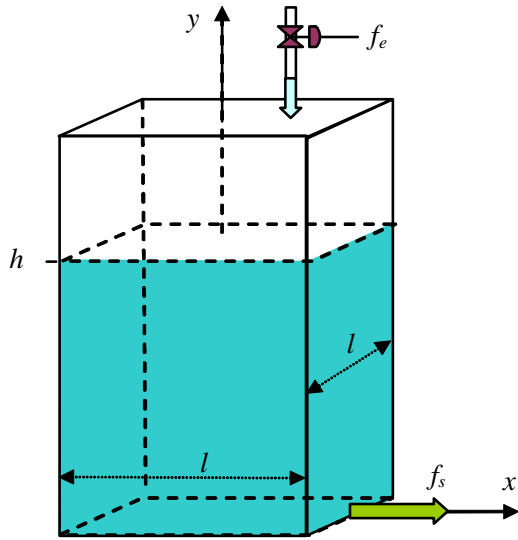
## Estructura General



## en Control Automático

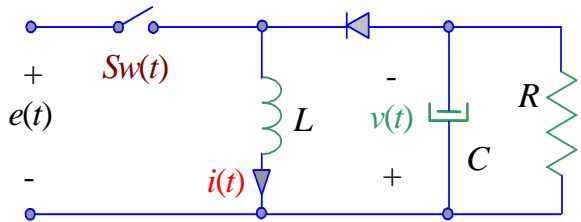


Sistemas en estudio



altura

$$\frac{d}{dt}h = \frac{1}{A_e} \cdot (f_e - f_s)$$



voltaje de salida

$$e \cdot S_w = L \cdot \frac{d}{dt}i + v \cdot (1 - S_w)$$

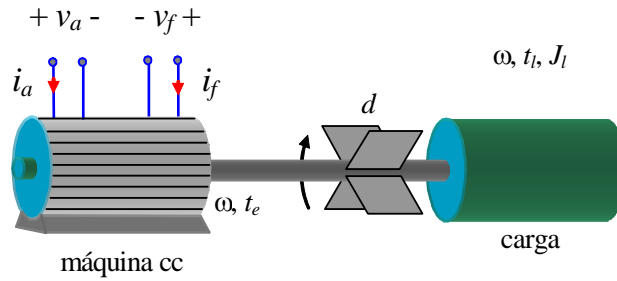
$$i \cdot (1 - S_w) = C \cdot \frac{d}{dt}v + \frac{v}{R}$$

$$A_n := \begin{bmatrix} \frac{-1}{R \cdot C} & \frac{1}{R \cdot C} \\ \frac{-R}{L} \cdot (1 - d_o)^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_n := \begin{bmatrix} \frac{-d_o}{R \cdot C \cdot (1 - d_o)} \\ \frac{R}{L} \cdot (1 - d_o) \end{bmatrix}$$

$$e_n := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R}{L} \cdot (1 - d_o)^2 \end{bmatrix}$$

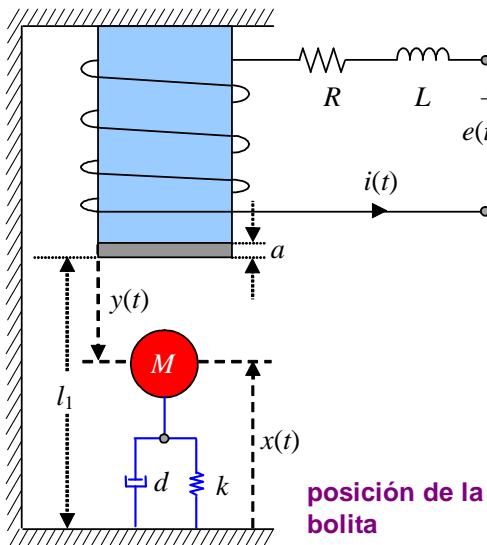
$$c_n := (1 \ 0)$$



velocidad, posición

$$v_a = R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{d}{dt}i_a + k_m \cdot \omega_m$$

$$k_m \cdot i_a = (J_l + J_m) \cdot \frac{d}{dt}\omega_m + d \cdot \omega_m + t_l$$



posición de la bolita

$$\frac{d}{dt}i = \frac{e}{L} - \frac{R}{L} \cdot i \quad \frac{d}{dt}x = v$$

$$\frac{d}{dt}v = -g + \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i^2}{l_1 - x + a} + \frac{K}{m} \cdot (l_0 - x) - \frac{d}{m} \cdot v$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 \cdot \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i_0}{l_1 - x_0 + a} & \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i_0^2}{(l_1 - x_0 + a)^2} & -\frac{K}{m} & \frac{-d}{m} \end{bmatrix}$$

$$b := \left( \frac{1}{L} \ 0 \ 0 \right)^T \quad c := (0 \ 1 \ 0)$$