MODELOS DE ACUMULACIÓN ESTOCÁSTICA CON ESFUERZO ENDÓGENO: GENERALIZACIÓN DE ALGUNOS RESULTADOS CLÁSICOS, PARA UNA FAMILIA DE MODELOS CON RESTRICCIONES DE NO NEGATIVIDAD[1]

MARIO VERA DELGADO[2].

RESUMEN

La contribución de este artículo es ofrecer demostraciones de un número de resultados clásicos, desarrollados para modelos de acumulación estocástica con restricciones de no-negatividad y horizonte finito por Schechtman, Schechtman y Escudero, y Paz, generalizando en este artículo para un modelo que incluye oferta elástica del producto.

Palabras Claves: ahorro, oferta elástica, restricciones de liquidez, horizonte finito.

ABSTRACT

This paper offer proofs of a number of classic results developed for stochastic accumulation models with non-negativity constraints and finite horizons by Schechtman, Schechtman and Escudero, and Paz, herein generalizing for a model that includes a responsive supply.

Key words: savings, responsive supply, liquidity constraints, finite horizon

I. INTRODUCCIÓN

En este Artículo se estudia un modelo de acumulación estocástica con restricciones de no-negatividad en la acumulación de stocks, para el que se analizan algunas propiedades cualitativas de las soluciones óptimas. El problema se plantea en términos de maximizar la esperanza de la utilidad acumulada en $T<+\infty$ periodos, en el que la cantidad acumulada o ahorrada es no negativa y se puede apreciar (o depreciar), y la utilidad marginal puede ser no acotada. La oferta es sensible al precio, y los shocks se suponen independiente e idénticamente distribuidos

La clase de modelos que se discuten en este trabajo están en la tradición

1 Agradezco los valiosos comentarios de Eugenio S. A. Bobenrieth H y Juan R. A. Bobenrieth H. Se reconocen los comentarios de dos árbitros. Los errores que pudiesen persistir son de exclusiva responsabilidad del autor.

2 Analista, Departamento de Investigación, División de Estudios, Superintendencia de AFP, E-mail: mvera@safp.cl.

de Gustafson. Algunas de las contribuciones en esta literatura son Samuelson, Gardner, Wright y Williams y, Scheinkman y Schechtman, Williams y Wright, Bobenrieth, Bobenrieth y Wright y. Wright y Williams y, Scheinkman y Schechtman, Bobenrieth, Bobenrieth y Wright y ofrecen una cantidad de resultados relacionados con el modelo de almacenamiento de commodities, sujeto a restricciones de no negatividad, con particular orientación a los problemas de horizonte infinito.

También está el Modelo de la Teoría de Ahorro con restricciones de liquidez, este problema está bien estudiado en los trabajos de Schechtman y Escudero, Deaton, Yaari, Schechtman, Paz. El artículo de Zeldes señala que las restricciones de liquidez afectan las decisiones de consumo. Los modelos de ahorro en general suponen que los consumidores pueden acceder a créditos a cuenta de su riqueza futura sin costo, lo que implica que el consumo sea independiente del momento en el que se perciben los ingresos. Pero, si a los individuos se les impide el acceso al crédito, la conexión entre presente y futuro no es inmediata, el ingreso presente y la riqueza acumulada condicionan en nivel de consumo presente. El efecto más importante de las restricciones de liquidez es aumentar la propensión marginal a consumir de la economía, tanto desde un punto de vista agregado como individual. Deaton en un modelo en el que las familias no pueden pedir prestado, muestra que las decisiones de consumo y ahorro de los hogares son sensibles, en presencia de incertidumbre y restricciones de liquidez, a la forma en que interpretan las realizaciones de los procesos estocásticos que generan su renta laboral.

La contribución de este Artículo es ofrecer con detalle las demostraciones de generalizaciones de un número de resultados clásicos, desarrollado para horizonte finito por Schechtman, Schechtman y Escudero, y Paz, generalizando en este artículo para un modelo que incluye oferta elástica del producto. Aunque muchos de estos resultados son conocidos para el modelo de horizonte infinito (por ejemplo, ver Scheinkman y Schechtman), sin embargo no han sido escritos con este grado de generalidad para horizonte finito, en mi conocimiento. Las propiedades que aquí se establecen son de interés para la construcción de demostraciones en el trabajo teórico en este tipo de modelos.

En lo que sigue, en la sección II se presenta el modelo y algunas propiedades. Posteriormente, en la sección III se introducen algunos conceptos y se demuestra que la política competitiva es optimal, se obtienen las condiciones de optimalidad, se muestra que la política optimal es competitiva y se estudian las propiedades de los precios. Finalmente, en la sección IV se comparan precios y políticas de consumo óptimo

II. EL MODELO

El Modelo supone tiempo discreto. En el periodo t el almacenamiento (o ahorro) $x^{(t)} \geq 0$ es una inversión con horizonte de planificación de un sólo periodo de tiempo.

El Costo de almacenar está dado por una función $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ con $\phi(0)=0$, y $\phi'(x) \geq 0$, $\phi''(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$.

La producción está sujeta a un shock, exógeno, multiplicativo, i.i.d. $\omega \geq 0$, con esperanza finita, y con soporte $\sigma(\omega)$ (posiblemente no acotado). El shock tiene una distribución discreta-continua, más precisamente, la distribución de ω es de la forma $\alpha L_d + (1-\alpha) L_c$, donde $\alpha \in [0,1]$, L_d es una distribución discreta, y L_c es una distribución absolutamente continua, con derivada continua, m, cuando se restringe a su soporte.

Existe una demora de un periodo de tiempo entre la decisión de esfuerzo de producción y la realización del producto: Dada la decisión de esfuerzo $\lambda^{(t)}$ para el periodo t, la realización del producto (o ingreso) para el periodo $t+1$ es $\lambda^{(t)}\omega^{(t+1)}$, donde $\omega^{(t+1)}$ representa la realización del shock en el periodo $t+1$. El costo del esfuerzo está dado por la función $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, con $g(0)=0$, $g'(0)=0$, $g'(\lambda) > 0$ y $g''(\lambda) > 0$, para todo $\lambda > 0$. Dado el almacenamiento $x^{(t)} \geq 0$ y el esfuerzo $\lambda^{(t)} \geq 0$, la cantidad total de stocks disponibles en el próximo periodo es $z^{(t+1)} \equiv Rx^{(t)} + \omega^{(t+1)}\lambda^{(t)}$, donde $R > 0$ es un factor de depreciación o apreciación que se asume conocido con certidumbre. El factor de descuento es δ, $0 < \delta < 1$. Se asume $\delta R \leq 1$.

La función de utilidad del consumidor representativo, $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, continuamente derivable, estrictamente creciente y estrictamente cóncava. Se asumirá que U tiene una cota superior finita, $\lim_{c \to \infty} U(c) = B < +\infty$. U' no necesita ser acotada. El consumo es el argumento de la función de utilidad.

Formalmente el problema es

$$\max \mathrm{E}\left[\sum \delta^t [\mathrm{U}(z^{(t)} - \mathrm{x}^{(t)}) - \phi(\mathrm{x}^{(t)}) - \mathrm{g}(\lambda^{(t)})]\right]$$

sujeto a las restricciones

$$
\begin{aligned}
z^{(t+1)} &= Rx^{(t)} + \omega^{(t+1)}\lambda^{(t)}, \quad 0 \le t < T, \\
0 \le x^{(t)} \le z^{(t)} &\quad , \quad \lambda^{(t)} \ge 0, \quad 0 \le t < T, \\
x^{(T)} &= \lambda^{(T)} = 0,
\end{aligned}
$$

$z^{(0)} \ge 0$ es la disponibilidad total inicial, donde $E[.]$ representa la esperanza con respecto a la variable aleatoria ω. $T < +\infty$.

Si $V_t(z)$ es la utilidad máxima esperada que podemos obtener cuando z es la disponibilidad total y tenemos t periodos por delante, entonces la formulación de programación dinámica usual nos conduce a las ecuaciones funcionales:

$$
\begin{aligned}
V_t(z) &= \max_{\substack{0\ x\ z\\ \lambda\ 0}} \{U(z-x) - \phi(x) - g(\lambda) + \delta E V_{t-1}(Rx + \omega\lambda)\}, \forall t \quad \{2,...,T+1\} \\
V_1(z) &= \max_{\substack{0\ x\ z\\ \lambda\ 0}} \{U(z-x) - \phi(x) - g(\lambda)\}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

La siguiente proposición se establece sin demostración. Para la demostración ver Vera.

Proposición 2.1

1. $U(0)[\frac{1-\delta^t}{1-\delta}] \quad V_t(z) \quad B[\frac{1-\delta^t}{1-\delta}], \forall t \quad \{1,...,T+1\}, \forall z \ge 0.$

2. Existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+$, $\bar{\lambda}$ independiente de z, tal que:
$$V_t(z) = \max_{\substack{0\le x\le z\\ 0\le\lambda\le\bar{\lambda}}} \{U(z-x) - \phi(x) - g(\lambda) + \delta E V_{t-1}(Rx + \omega\lambda)\}.$$

3. V_t es continua $\forall t \in \{1,...,T+1\}$. Además $(x_t(z), \lambda_t(z))$ son funciones (univaluadas) y continuas, y $c_t(z) \equiv z - x_t(z)$.

4. V_t es estrictamente creciente, $\forall t \in \{1,...,T+1\}$.

5. V_t es cóncava, $\forall t \in \{1,...,T+1\}$.

6. $\forall t \in \{1,...,T+1\}$ y $\forall z > 0$ se cumple que: $c_t(z) > 0$, V_t es continuamente diferenciable en $]0,+\infty[$, y $V_t'(z) = U'(c_t(z))$. Para la demostración se utiliza la hipótesis

$\delta R \leq 1$.

7. $V_t \in C^1([0,\infty[)$. En otras palabras, las funciones $p_t(z) \equiv V_t'(z)$ ("precios") son continuas en $[0,\infty[$.

III. RELACIÓN ENTRE POLÍTICA COMPETITIVA Y POLÍTICA OPTIMAL

Definición 3.1 Una política de periodo T es una sucesión de funciones medibles Borel $\{(x_t(z),c_t(z),\lambda_t(z))\}_{t=1,\ldots,T+1}$, tal que

$$x_t(z)+c_t(z)=z,\ \ z\geq 0$$
$$x_t(z)\geq 0, c_t(z)\geq 0, \lambda_t(z)\geq 0,\quad t=1,\ldots,T+1,\quad z\geq 0.$$

Definición 3.2 Una política de periodo T, $\{(x_t(z),c_t(z),\lambda_t(z))\}_{t=1,\ldots,T+1}$ es optimal si $(x_t(z),c_t(z),\lambda_t(z))$ es solución de

$$V_t(z)=\max_{\substack{0\leq x\leq z\\ \lambda\geq 0}}\{U(z-x)-\phi(x)-g(\lambda)+\delta EV_{t-1}(Rx+\omega\lambda)\}\quad \forall t\in\{1,\ldots,T+1\}, \forall z\geq 0.$$

Definición 3.3 Una política de periodo $T\,\{(x_t(z),c_t(z)),\lambda_t(z)\}_{t=1,\ldots,T+1}$ es competitiva si existe una sucesión de funciones no negativas $\{p_t(z)\}_{t=1,\ldots,T+1}$ tal que:

$$c_t(z)\quad \textit{maximiza a}\quad U(c)-p_t(z)c\quad \textit{sujeto a}\quad c\geq 0 \tag{2}$$

$$\begin{array}{l}(x_t(z),\lambda_t(z))\quad \textit{maximiza a}\\ -\phi(x)-g(\lambda)+\delta E[p_{t-1}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z))(Rx+\omega\lambda)]-p_t(z)x\\ \textit{sujeto a}\quad 0\leq x\leq z, \lambda\geq 0\end{array} \tag{3}$$

$$p_0(z)\equiv 0. \tag{4}$$

Proposición 2.1 Si una política de periodo T $\{(x_t(z),c_t(z),\lambda_t(z))\}_{t=1,\ldots,T+1}$ es competitiva entonces es optimal y además z maximiza

$$V_t(y)-p_t(z)y\quad \textit{sujeto a}\quad y\geq 0. \tag{5}$$

Demostración

La demostración se hará por inducción.

- Para $t=1$ se tiene,

$$V_1(z) \quad = \quad \max_{\substack{0 \le x \le z \\ \lambda \ge 0}} \{U(c) - \phi(x) - g(\lambda)\}$$

Se considera un factible (x, c, λ) tal que $c = z - x$, $x \ge 0$, $c \ge 0$, $\lambda \ge 0$. Como $c_1(z)$ satisface la condición (2) se tiene que

$$U(c) - p_1(z)c \le U(c_1(z)) - p_1(z)c_1(z) \quad \forall c \ge 0.$$

Luego, como $c_1(z) - c = (z - x_1(z)) - (z - x) = x - x_1(z)$, se tiene

$$\begin{aligned} U(c_1(z)) - U(c) \quad &\ge \quad p_1(z)(c_1(z) - c) \\ &= \quad p_1(z)(x - x_1(z)). \end{aligned} \tag{6}$$

De (3), resulta

$$\begin{aligned} &-\phi(x_1(z)) - g(\lambda_1(z)) + \delta E p_0(Rx_1(y) + \omega\lambda_1(z))(Rx + \omega\lambda_1(z)) - p_1(z)x_1(z) \ge \\ &-\phi(x) - g(\lambda) + \delta E p_0(Rx_1(y) + \omega\lambda_1(z))(Rx + \omega\lambda_1(z)) - p_1(z)x \end{aligned}$$

y como $p_0(z) = 0$ nos queda

$$p_1(z)(x - x_1(z)) \ge \phi(x_1(z)) - \phi(x) + g(\lambda_1(z)) - g(\lambda). \tag{7}$$

Luego, de (6) y (7), se sigue que

$$U(c_1(z)) - U(c) \quad p_1(z)(x - x_1(z)) \quad \phi(x_1(z)) - \phi(x) + g(\lambda_1(z)) - g(\lambda). \tag{8}$$

Por lo tanto,

$$U(c_1(z)) - g(\lambda_1(z)) - \phi(x_1(z)) \ge U(c) - g(\lambda) - \phi(x).$$

Así, $(x_1(z), c_1(z), \lambda_1(z))$ es optimal.

Para probar que z maximiza

$$V_1(y) - p_1(z)y \qquad \textit{sujeto a} \qquad y \ge 0,$$

consideremos la solución optimal $(x_1(y), c_1(y), \lambda_1(y))$ de

$$V_1(y) \quad = \quad \max_{\substack{0 \le x \le y \\ \lambda \ge 0}} \{U(c) - \phi(x) - g(\lambda)\}$$

Ahora, al reemplazar c por $c_1(y)$, x por $x_1(y)$ y λ por $\lambda_1(y)$ en las ecuaciones (6) y (7) se obtiene

$$U(c_1(z)) - U(c_1(y)) \quad \ge \quad p_1(z)(c_1(z) - c_1(y)), \tag{9}$$

$$p_1(z)(x_1(y) - x_1(z)) \ge \phi(x_1(z)) - \phi(x_1(y)) + g(\lambda_1(z)) - g(\lambda_1(y)). \tag{10}$$

Al sumar las ecuaciones (9) y (10), se tiene

$$U(c_1(z)) - g(\lambda_1(z)) - \phi(x_1(z)) - p_1(z)z \geq$$
$$U(c_1(y)) - g(\lambda_1(y)) - \phi(x_1(y)) - p_1(z)y \quad \forall y \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$V_1(z) - p_1(z)z \geq V_1(y) - p_1(z)y \quad \forall y \geq 0.$$

• (Hipótesis de Inducción) Se asume que la afirmación es válida para $T = t-1$ y que la variable z maximiza

$$V_{t-1}(y) - p_{t-1}(z)y \qquad \textit{sujeto a} \quad y \geq 0,$$

• (Tesis de Inducción) Se debe probar que una política competitiva es optimal para el periodo t y que maximiza

$$V_t(y) - p_t(z)y \qquad \textit{sujeto a} \quad y \geq 0,$$

En efecto, para:

$$V_t(z) = \max_{\substack{0 \leq x \leq z \\ \lambda \geq 0}} \{U(c) - \phi(x) - g(\lambda) + \delta E V_{t-1}(Rx + \omega\lambda)\}$$

Se considera un factible (x, c, λ), tal que $c = z - x$ $c \geq 0$, $x \geq 0$ y $\lambda \geq 0$. Como $c_t(z)$ satisface la condición (2) se tiene que

$$U(c) - p_t(z)c \leq U(c_t(z)) - p_t(z)c_t(z) \quad \forall c \geq 0.$$

Luego, como $c_t(z) - c = (z - x_t(z)) - (z - x) = x - x_t(z)$ se tiene

$$\begin{aligned} U(c_t(z)) - U(c) &\geq p_t(z)(c_t(z) - c) \\ &= p_t(z)(x - x_t(z)). \end{aligned} \tag{11}$$

De (3) resulta

$$-\phi(x_t(z)) - g(\lambda_t(z)) + \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))] - p_t(z)x_t(z) \geq$$
$$-\phi(x) - g(\lambda) + \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx + \omega\lambda)] - p_t(z)x.$$

Luego,

$$\begin{aligned} p_t(z)[x - x_t(z)] \geq\; & -\phi(x) + \phi(x_t(z)) - g(\lambda) + g(\lambda_t(z)) \\ & - \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))] \\ & + \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx + \omega\lambda)]. \end{aligned} \tag{12}$$

De la Hipótesis de Inducción se sabe que z maximiza $V_{t-1}(y) - p_{t-1}(z)y \quad \textit{sujeto a} \quad y \geq 0$. Luego,

$$V_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) - p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) \geq$$
$$V_{t-1}(Rx + \omega\lambda) - p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx + \omega\lambda).$$

Ahora al tomar esperanza, reordenar y multiplicar por δ resulta

$$\begin{aligned} & \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx + \omega\lambda)] - \\ & \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))] \geq \\ & \delta E V_{t-1}(Rx + \omega\lambda) - \delta E V_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) \end{aligned} \tag{13}$$

De las desigualdades (11), (12) y (13) se obtiene

$$\begin{aligned} U(c_t(z)) - U(c) \quad &\geq \quad -\phi(x) + \phi(x_t(z)) - g(\lambda) + g(\lambda_t(z)) \\ &+ EV_{t-1}(Rx + \omega\lambda) - \delta EV_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} &U(c) - \phi(x) - g(\lambda) + EV_{t-1}(Rx + \omega\lambda) \leq \\ &U(c_t(z)) - \phi(x_t(z)) - g(\lambda_t(z)) + \delta EV_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x_t(z), c_t(z), \lambda_t(z))$ es optimal.

Para probar que z maximiza $V_t(y) - p_t(z)y$ sujeto a $y \geq 0$, se considera la solución optimal $(x_t(y), c_t(y), \lambda_t(y))$ de

$$V_t(y) = \max_{\substack{0 \leq x \leq y \\ \lambda \geq 0}} \{U(c) - \phi(x) - g(\lambda) + \delta EV_{t-1}(Rx + \omega\lambda)\}$$

De (11) reemplazando c por $c_t(y)$ se tiene

$$U(c_t(z)) - U(c_t(y)) \quad \geq \quad p_t(z)(c_t(z) - c_t(y)). \tag{14}$$

Ahora, de (12) reemplanzando x por $x_t(y)$ y λ por $\lambda_t(y)$

$$\begin{aligned} p_t(z)[x_t(y) - x_t(z)] \quad &\geq \quad -\phi(x_t(y)) + \phi(x_t(z)) \\ &- g(\lambda_t(y)) + g(\lambda_t(z)) \\ &- \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))] \\ &+ \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx_t(y) + \omega\lambda_t(y))] \end{aligned} \tag{15}$$

En (13) se reemplaza x por $x_t(y)$ y λ por $\lambda_t(y)$

$$\begin{aligned} &\delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx_t(y) + \omega\lambda_t(y))] - \\ &\delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))] \geq \\ &\delta EV_{t-1}(Rx_t(y) + \omega\lambda_t(y)) - \delta EV_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)). \end{aligned} \tag{16}$$

De (15) y (16) se obtiene

$$\begin{aligned} p_t(z)[x_t(y) - x_t(z)] \quad &\geq \quad -\phi(x_t(y)) + \phi(x_t(z)) - \\ &g(\lambda_t(y)) + g(\lambda_t(z)) \\ &+ \delta EV_{t-1}(Rx_t(y) + \omega\lambda_t(y)) - \\ &\delta EV_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)). \end{aligned} \tag{17}$$

Sumando (14) y (17) :

$$\begin{aligned} U(c_t(z)) - U(c_t(y)) + p_t(z)[x_t(y) - x_t(z)] \quad &\geq \quad -\phi(x_t(y)) + \phi(x_t(z)) \\ &- g(\lambda_t(y)) + g(\lambda_t(z)) \\ &+ \delta EV_{t-1}(Rx_t(y) + \omega\lambda_t(y)) \\ &- \delta EV_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) \\ &+ p_t(z)(c_t(z) - c_t(y)). \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$U(c_t(z))-\phi(x_t(z))-g(\lambda_t(z))+\delta EV_{t-1}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z))-p_t(z)z \geq$$
$$U(c_t(y))-\phi(x_t(y))-g(\lambda_t(y))\delta EV_{t-1}(Rx_t(y)+\omega\lambda_t(y))-p_t(z)y.$$

Por lo tanto,

$$V_t(z)-p_t(z)z \geq V_t(y)-p_t(z)y, \quad \forall z \geq 0$$

■

Definición 3.4 Un problema se dice admisible si el nivel de disponibilidad total z es siempre positivo para la política optimal, o bien las funciones V_t son diferenciables en $z=0$.

Proposición 3.2 Si un problema es admisible la política optimal $\{(x_t(z),c_t(z),\lambda_t(z))\}_{t=1,\ldots,T+1}$ es competitiva. Además $(x_t(z),c_t(z),\lambda_t(z))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$p_t(z) \geq U\ (c_t(z)) \qquad \textit{con igualdad si} \quad c_t(z)>0, \tag{18}$$

$$p_t(z) \geq \delta REp_{t-1}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z))-\phi\ (x_t(z)) \qquad \textit{con igualdad si} \quad x_t(z)>0, \tag{19}$$

y

$$g\ (\lambda_t(z)) \geq \delta E[\omega p_{t-1}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z))] \qquad \textit{con igualdad si} \quad \lambda_t(z)>0, \tag{20}$$

Demostración

Sea $z>0$ cualquiera pero fijo. Como V_t es cóncava y diferenciable, entonces

$$V_t(z')-V_t(z)\leq p_t(z)(z'-z), \forall z'\geq 0$$

Ahora se toma cualquier $c',x',\lambda'\geq 0$ y sea $z'=c'+x'$. Entonces

$$V_t(z')\geq U(c')-\phi(x')-g(\lambda')+\delta EV_{t-1}(Rx'+\omega\lambda'), \tag{21}$$

luego

$$U(c')-\phi(x')-g(\lambda')+\delta EV_{t-1}(Rx'+\omega\lambda')-p_t(z)z'\leq V_t(z)-p_t(z)z, \tag{22}$$

lo que es equivalente a:

$$U(c')-\phi(x')-g(\lambda')+\delta EV_{t-1}(Rx'+\omega\lambda')-p_t(z)(c'+x')\leq$$
$$U(c_t(z))-\phi(x_t(z))-g(\lambda_t(z))+\delta EV_{t-1}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z))-p_t(z)(c_t(z)+x_t(z))$$

es decir

$$\begin{aligned}&U(c')-p_t(z)c'-\phi(x')-g(\lambda')+\delta EV_{t-1}(Rx'+\omega\lambda')-p_t(z)x' \leq\\ &U(c_t(z))-p_t(z)c_t(z)-\phi(x_t(z))-g(\lambda_t(z))\\ &+\delta EV_{t-1}(Rx_t(y)+\omega\lambda_t(z))-p_t(z)x_t(z), \quad \forall c',x',\lambda'\geq 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Reemplazando x' por $x_t(z)$ en (23):

$$U(c') - p_t(z)c' \leq U(c_t(z)) - p_t(z)c_t(z), \forall c' \geq 0.$$

Así, la condición competitiva (2) se cumple.

Por otro lado, si se toma $c' = c_t(z)$ en (23) resulta

$$\begin{aligned} &-\phi(x') - g(\lambda') + \delta EV_{t-1}(Rx' + \omega\lambda') - p_t(z)x' \leq \\ &-\phi(x_t(z)) - g(\lambda_t(z)) + \delta EV_{t-1}(Rx_t(y) + \omega\lambda_t(z)) - p_t(z)x_t(z). \end{aligned} \tag{24}$$

De aquí se osberva que

$$(x_t(z), \lambda_t(z)) \quad \textit{maximiza a}$$

$$-\phi(x) - g(\lambda) + \delta EV_{t-1}(Rx + \omega\lambda) - p_t(z)x \quad \textit{sujeto a} \quad 0 \leq x \leq z, \lambda \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$p_t(z) \geq \delta REp_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) - \phi'(x_t(z)) \quad \textit{con igualdad si} \quad x_t(z) > 0, \tag{25}$$

(para justificar la diferenciación en la esperanza, Ver Vera [14], Apéndice), así se tiene que la ecuación (19) es válida.

Y además,

$$g'(\lambda_t(z)) \geq \delta E[\omega p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))] \quad \textit{con igualdad si} \quad \lambda_t(z) > 0, \tag{26}$$

(para justificar la diferenciación en la esperanza, Ver Vera [14], Apéndice), esto implica que la (20) también es válida.

En la ecuación (25) al multiplicar por $x - x_t(z)$ se tiene que:

$$p_t(z)x - p_t(z)x_t(z) + \phi'(x_t(z))(x - x_t(z)) \geq \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))R(x - x_t(z))]$$

Considerando que $\phi(x) - \phi(x_t(z)) \geq \phi'(x_t(z))(x - x_t(z))$, ya que ϕ es una función convexa.

$$p_t(z)x - p_t(z)x_t(z) + \phi(x) - \phi(x_t(z)) \geq \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))R(x - x_t(z))].$$

Ordenando términos se llega a que,

$$\begin{aligned} &\delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))Rx_t(z)] - \phi(x_t(z)) - p_t(z)x_t(z) \geq \\ &\delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))Rx] - \phi(x) - p_t(z)x. \end{aligned} \tag{27}$$

Ahora, de la ecuación (26) al multiplicar por $\lambda - \lambda_t(z)$ se tiene que:

$$g'(\lambda_t(z))(\lambda - \lambda_t(z)) \geq \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))\omega(\lambda - \lambda_t(z))]$$

Como $g(\lambda) - g(\lambda_t(z)) \geq g'(\lambda_t(z))(\lambda - \lambda_t(z))$ ya que g es convexa se llega a que

$$g(\lambda) - g(\lambda_t(z)) \geq \delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))\omega(\lambda - \lambda_t(z))].$$

Reordenando términos resulta

$$\begin{aligned} &\delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))\omega\lambda_t(z))] - g(\lambda_t(z)) \geq \\ &\delta E[p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))\omega\lambda] - g(\lambda). \end{aligned} \tag{28}$$

Al sumar (27) y (28) se obtiene

$$\begin{aligned}&\delta E[p_{t-1}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z))(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z))]-\\&\phi(x_t(z))-g(\lambda_t(z))-p_t(z)x_t(z)\ \geq\\&\delta E[p_{t-1}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z))(Rx+\omega\lambda)]-\phi(x)-g(\lambda)-p_t(z)x.\end{aligned} \tag{29}$$

Esto es, la condición competitiva (3) es verdadera.

■

De ahora en adelante se asumirá que todos los problemas son admisibles.
En la siguiente proposición se establecerá sin demostración algunas propiedades de $\{x_t(z), c_t(z), \lambda_t(z)\}$ y $p_t(z)$ (para la demostración ver Vera [14]).

Proposición 3.3

1. p_t es no creciente y estrictamente positiva.
2. c_t es una función no decreciente en z .
3. x_t es una función no decreciente en z .
4. λ_t es una función no creciente en z .

IV. COTAS DETERMINÍSTICAS

Notación

Si $\omega \equiv v$ (constante) entonces los correspondientes precios y políticas serán denotados por $p_t^{(v)}(z)$ y $(x_t^{(v)}(z), c_t^{(v)}(z), \lambda_t^{(v)}(z))$.

Ahora se establecerá un teorema que permitirá comparar $p_t(z)$ y por consiguiente $c_t(z)$ con:

$p_t^{(a)}(z)(c_t^{(a)}(z))$, donde $a \equiv \inf \sigma(\omega)$.

$p_t^{(A)}(z)(c_t^{(A)}(z))$, donde $A \equiv \sup \sigma(\omega)$, suponiendo que $A < +\infty$.

Las condiciones de optimalidad para $v = a$ y A están dadas por

$$p_t^{(v)}(z) \geq U'(c_t^{(v)}(z)), \tag{30}$$

$$p_t^{(v)}(z) \geq \delta R p_{t-1}^{(v)}(Rx_t^{(v)}(z) + v\lambda_t^{(v)}(z)) + \phi'(x_t^{(v)}(z)), \tag{31}$$

$$g'(\lambda_t^{(v)}(z)) \geq \delta E[\omega[p_{t-1}^{(v)}(Rx_t^{(v)}(z) + v\lambda_t^{(v)}(z))]], \tag{32}$$

Proposición 4.1

(i) $p_t(z) \leq p_t^{(a)}(z)$, y $c_t(z) \geq c_t^{(a)}(z), \forall t \in \{1, \dots, T+1\}, \forall z \geq 0$.

(ii) $p_t(z) \geq p_t^{(A)}(z)$, y $c_t(z) \leq c_t^{(A)}(z), \forall t \in \{1,...,T+1\}, \forall z \geq 0$

Demostración (i)

Para $z > 0$ la demostración se hará por inducción.

• Para $t = 1$, se tiene

$$p_1(z) = p_1^{(a)}(z) = U'(z).$$

• (Hipótesis de Inducción) Se asume que $p_{t-1}(z) \leq p_{t-1}^{(a)}(z)$.

• (Tesis de Inducción) Se debe probar que $p_t(z) \leq p_t^{(a)}(z)$. Se considerarán dos casos que dependen del valor que asuma $x_t(z)$.

Caso 1

$x_t(z) = 0$. Entonces, $c_t(z) = z$ y $p_t(z) = U'(c_t(z)) = U'(z)$, como $c_t^{(a)}(z) \leq z$ y U' es una función estrictamente decreciente, resulta

$$p_t^{(a)}(z) = U'(c_t^{(a)}(z)) \geq U'(z) = p_t(z)$$

por lo tanto, $p_t(z) \leq p_t^{(a)}(z)$.

Caso 2

$x_t(z) > 0$.

Por contradicción se asume que $p_t(z) > p_t^{(a)}(z)$. Por Proposición 3.7, $c_t(z) > 0$. Por las condiciones de optimalidad (18) y (30) se tiene

$$U'(c_t^{(a)}(z)) = p_t^{(a)}(z) < p_t(z) = U'(c_t(z)).$$

La primera igualdad se debe a que $z > 0$ y por lo tanto, $c_t^a(z) > 0$. La segunda igualdad se debe a que $z > 0$ y por lo tanto, $c_t(z) > 0$ (por Proposición 3.7). Así, $U'(c_t^{(a)}(z)) < U'(c_t(z))$, como U' es una función estrictamente decreciente, $c_t^{(a)}(z) > c_t(z)$ y por consiguiente $x_t(z) > x_t^{(a)}(z) \geq 0$. Ahora de las condiciones de optimalidad (19) y (31) se obtiene

$$\begin{aligned} &\delta R p_{t-1}^{(a)}(R x_t^{(a)}(z) + a\lambda_t^{(a)}(z)) \leq p_t^{(a)}(z) + \phi'(x_t^{(a)}(z)) < \\ &p_t(z) + \phi'(x_t(z)) = \delta R E p_{t-1}(R x_t(z) + \omega \lambda_t(z)) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$p_{t-1}^{(a)}(R x_t^{(a)}(z) + a\lambda_t^{(a)}(z)) < E p_{t-1}(R x_t(z) + \omega \lambda_t(z)). \tag{33}$$

Así

$$a p_{t-1}^{(a)}(R x_t^{(a)}(z) + a\lambda_t^{(a)}(z)) < E[\omega p_{t-1}(R x_t(z) + \omega \lambda_t(z))].$$

Debido a que $\omega \geq a$. Ahora, utilizando la hipótesis de inducción en el lado derecho de (33) se llega a que:

$$\begin{aligned} p_{t-1}^{(a)}(Rx_t^{(a)}(z)+a\lambda_t^{(a)}(z)) &< Ep_{t-1}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z)) \\ &\leq Ep_{t-1}^{(a)}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z)) \\ &\leq p_{t-1}^{(a)}(Rx_t(z)^{(a)}+a\lambda_t(z)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p_{t-1}^{(a)}(Rx_t^{(a)}(z)+a\lambda_t^{(a)}(z)) < p_{t-1}^{(a)}(Rx_t(z)^{(a)}+a\lambda_t(z))$$

Lo que implica que $\lambda_t(z) < \lambda_t^{(a)}(z)$. Las condiciones de optimalidad (20) y (32) implican que:

$$\delta E[\omega p_{t-1}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z))] \leq g'(\lambda_t(z)) < g'(\lambda_t^{(a)}(z)) = \delta a p_{t-1}^{(a)}(Rx_t(z)^{(a)}+a\lambda_t^{(a)}(z))$$

Así se tiene

$$E[\omega p_{t-1}(Rx_t(z)+\omega\lambda_t(z))] < a p_{t-1}^{(a)}(Rx_t(z)^{(a)}+a\lambda_t^{(a)}(z)).$$

Lo que es una contradicción.

Si $z=0$, se tiene por restricción que $c_t(z)=c_t^a(z)=0$ y como $p_t(z)=V_t'(z)$, se tiene que $V_t'(z) \leq (V_t^a)'(z), \forall z>0$, lo que se cumple en $z=0$ por continuidad de $V_t'(z)$ y $(V_t^a)'(z)$.

■

Demostración (ii)

Para $z>0$ la demostración se hará por inducción.

- Para $t=1$, se tiene: $p_1(z) = p_1^{(A)}(z) = U'(z)$.
- (Hipótesis de Inducción) Se asume que $p_{t-1}(z) \geq p_{t-1}^{(A)}(z)$.
- (Tesis de Inducción) Se debe probar que $p_t(z) \geq p_t^{(A)}(z)$, y para ello se consideran dos casos que dependen del valor que asuma $x_t^{(A)}(z)$. Se demostrará para el caso $z>0$, y luego $z=0$ resulta por continuidad.

Caso 1:

$x_t^{(A)}(z)=0$. Entonces $c_t^{(A)}(z)=z$ y $p_t^{(A)}(z)=U'(c_t^{(A)}(z))=U'(z)$. De las condiciones de optimalidad se sabe que $p_t(z)=U'(c_t(z))$ y además por restricción $c_t(z)\leq z$, también se tiene que U' es una función estrictamente decreciente, luego,

$$p_t(z) = U'(c_t(z)) \leq U'(c_t^{(A)}(z)) = p_t^{(A)}(z)$$

por lo tanto, $p_t(z) \leq p_t^{(A)}(z)$.

Caso 2:

$x_t^{(A)}(z) > 0$.

Por contradicción se asume que $p_t(z) < p_t^{(A)}(z)$, de las condiciones de optimalidad y se tiene

$$U\ (c_t(z)) = p_t(z) < p_t^{(A)}(z) = U\ (c_t^{(A)}(z)),$$

por lo tanto, $U'(c_t(z)) < U'(c_t^{(A)}(z))$, como U' es una función estrictamente decreciente resulta $c_t^{(A)}(z) < c_t(z)$, y por consiguiente, $x_t^{(A)}(z) > x_t(z) \geq 0$ ahora de las condiciones de optimalidad (19) y (31) se tiene

$$\begin{aligned}&\delta REp_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) \leq p_t(z) + \phi\ (x_t(z)) < \\ &p_t^{(A)}(z) + \phi\ (x_t^{(A)}(z)) = \delta Rp_{t-1}^{(A)}(Rx_t^{(A)}(z) + A\lambda_t^{(A)}(z)).\end{aligned}$$

Así se tiene

$$p_{t-1}^{(A)}(Rx_t^{(A)}(z) + A\lambda_t^{(A)}(z)) > Ep_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) \tag{34}$$

como $A \geq \omega$, se tiene que

$$Ap_{t-1}^{(A)}(Rx_t^{(A)}(z) + A\lambda_t^{(A)}(z)) > E[\omega p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))].$$

De (34) se tiene

$$\begin{aligned}p_{t-1}^{(A)}(Rx_t^{(A)}(z) + A\lambda_t^{(A)}(z)) \quad &> \quad Ep_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) \\ &\geq \quad Ep_{t-1}^{(A)}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z)) \\ &\geq \quad p_{t-1}^{(A)}(Rx_t^{(A)}(z) + A\lambda_t(z))\end{aligned}$$

En la segunda desigualdad se utiliza la Hipótesis de Inducción y la tercera desigualdad se debe a que p_{t-1}^{A} es decreciente. Así

$$p_{t-1}^{(A)}(Rx_t^{(A)}(z) + A\lambda_t^{(A)}(z)) > p_{t-1}^{(A)}(Rx_t^{(A)}(z) + A\lambda_t(z))$$

lo que implica que $\lambda_t(z) > \lambda_t^{(A)}(z)$, por las condiciones de optimalidad y se tiene

$$\begin{aligned}&\delta E[\omega p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))] = g\ (\lambda_t(z)) > \\ &g\ (\lambda_t^{(A)}) = \delta Ap_{t-1}^{(A)}(Rx_t^{(A)}(z) + A\lambda_t^{(A)}(z)).\end{aligned}$$

Así se obtiene

$$E[\omega p_{t-1}(Rx_t(z) + \omega\lambda_t(z))] > Ap_{t-1}^{(A)}(Rx_t^{(A)}(z) + A\lambda_t^{(A)}(z)).$$

Lo que es una contradicción.

Si $z = 0$, se tiene por restricción que $c_t(z) = c_t^{A}(z) = 0$ y como $p_t(z) = V_t'(z)$, se tiene que $V_t'(z) \geq (V_t^{A})'(z), \forall z > 0$, lo que se cumple en $z = 0$ por continuidad de $V_t'(z)$ y $(V_t^{A})'(z)$.

■

REFERENCIAS

BOBENRIETH H., E.S.A. 2004. Precio de Productos Almacenables: Implicaciones empíricas al Modelo de Inventarios. Estudios de Economía 31, N°1, 67-78.

BOBENRIETH H., E.S.A.; BOBENRIETH, J.R.A. y WRIGHT, B.D. 2006. (mimeo). Strict concavity of the value function for a family of dynamic accumulation models.

BOBENRIETH, E.S.A.; BOBENRIETH, J.R.A. y WRIGHT, B.D. 2002. A Commodity Price Process With a Unique Continuous Invariant Distribution Having Infinite Mean. Econometrica 70, 1213-1219.

BOBENRIETH, E.S.A., BOBENRIETH, J.R.A. y WRIGHT, B.D. 2004. A Model of Supply of Storage. Economic Developmente and Cultural Change 52, 605-616.

DEATON, A. 1991. Saving and liquidity Constraints. Econometrica 59, 1221-1248.

DEATON, A and G. LAROQUE. 1992. On the Behaviour of the Commodity Prices. Review of Economic Studies, 59, 1-23.

GARDNER, B.G. 1979. Optimal Stockpiling of Grain. Lexington, MA: Lexington Books.

GUSTAFSON, R.L. 1958. Carryover Levels for Grains: A Method for Determining Amounts that are Optimal Under Specified Conditions. Technical Bulletin 1178, Washington, DC: United States Department of Agriculture.

PAZ, C. 2005. Una Aplicación a la Economía de la Programación Dinámica Estocástica. Monografía. Departamento de Matemáticas, Universidad del Bío-Bío.

SAMUELSON, P.A. 1971. Stochastic Speculative Price. Proceedings of the National Academy of Sciences 68, 335-337.

SCHECHTMAN, J. 1973. Some Applications of Competitive Prices to Problems of Dynamics Programming under Uncertainty. Dissertation, University of California, Berkeley.

SCHECHTMAN, J., and V.L.S. ESCUDERO. 1977. Some Results on ``An Income Fluctuation Problem''. Journal of Economic Theory 16, 151-166.

SHEINKMAN, J.A. y J. SCHECHTMAN. 1983. A Simple Competitive Model with Production and Storage. Review of Economic Studies 50, 427-441.

VERA, M.A. 2007. Modelos de Acumulación Estocástica con Esfuerzo Endógeno: Generalización de algunos resultados clásicos, para una familia de modelos con restricciones de no negatividad. Magíster en Economía de Recuersos Naturales y del Medio Ambiente. Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas. Universidad de Concepción. 33 p.

YAARI, M.E. 1971. A Law of Large Numbers in the theory of consumer's choice under uncertainty, Working Paper No. CP. 330, Center of Research in Management Science, University of California, Berkeley.

WILLIAMS, J.C. y B.D. WRIGHT. 1991. Storage and Commodity Markets. Cambridge University Press, Cambridge.

WRIGHT, B.D. y J.C. WILLIAMS. 1982. The Economic Role of Commodity Storage. Economic Journal 92, 596-614.

WRIGHT, B.D. y J.C. WILLIAMS. 1984. The Welfare Effects of the Introduction of Storage. Quarterly Journal of Economics 99, 169-182.

ZELDES, S.P. 1989. Consumption and Liquidity Constraints: An Empirical Investigation". Journal of Political Economy 97, 305-346.