

# **Modelo de ahusamiento para *Eucalyptus nitens*, en suelos de cenizas volcánicas de la región de La Araucanía (Chile)**

## **Taper model for *Eucalyptus nitens*, in volcanic ash soils of the region of The Araucanía (Chile)**

Andrés Rodríguez-Toro <sup>1</sup>, Rafael Rubilar-Pons <sup>1,2</sup>, Fernando Muñoz-Sáez <sup>1</sup>, Eduardo Cártes-Rodríguez <sup>1</sup>, Eduardo Acuña-Carmona <sup>1</sup>, Jorge Cancino-Cancino <sup>1</sup>

Originales: *Recepción*: 24/06/2015 - *Aceptación*: 29/09/2015

### **RESUMEN**

Se presenta un modelo de ahusamiento para *Eucalyptus nitens* (Deane & Maiden) Maiden. Este es un modelo no lineal que fue ajustado con datos de 60 árboles con edades entre los 16 y 21 años, diámetros normales entre 11,5 y 52,0 cm, y con alturas totales entre 12,27 y 47,49 m. Cosechados en 6 rodales localizados en 3 comunas de la región de La Araucanía (Chile); en suelos de cenizas volcánicas. El modelo se contrastó con los existentes en la literatura, obteniendo la mejor precisión, el menor sesgo en cada fracción de altura, y la mayor eficiencia predictiva con un comportamiento gráfico flexible y estable en toda la longitud del fuste. La función de volumen obtenida de la integración numérica del modelo de ahusamiento, predice más de 99% del volumen del fuste sin corteza estimado mediante la fórmula de Smalian.

### **Palabras clave**

volumen • biomasa • perfil del fuste • gestión forestal • optimización de la madera

---

1 Universidad de Concepción, Fac. de Cs. Forestales. Victoria 631. Concepción, Chile. jrodriguez@udec.cl

2 Cooperativa de Productividad Forestal. Universidad de Concepción, Chile.

## ABSTRACT

Generalized taper model is presented for *Eucalyptus nitens* (Deane & Maiden) Maiden. A non-linear model was fitted to data from 60 trees aged between 16 and 21 years, normal diameters between 11.5 and 52.0 cm, and with total heights between 47.49 and 12.27 m. Harvested in 6 stands located in 3 communes of The Araucanía region (Chile), in volcanic ash soils. The model contrast with existing models in the literature, obtaining better accuracy, the least bias in each fraction high, and the higher predictive efficiency with a flexible graphical behavior and stable over the entire length of the stem. The volume function obtained from the numerical integration of the taper model predicts over 99% of the variation in stem volume without bark estimated by formula Smalian.

### Keywords

volume • biomass • taper profile • forest management • wood optimization

## INTRODUCCIÓN

El mercado de las maderas presenta una amplia variedad de productos forestales: madera para aserrío, pulpa, energía, entre otros (42).

En Chile en las décadas recientes se han establecido plantaciones de *Eucalyptus nitens* (Deane & Maiden) Maiden (30), que dada la adaptación a un amplio rango de condiciones ambientales, rápido crecimiento y alta productividad de la especie (32), permiten cubrir la demanda en el sector forestal de nuevos productos de la madera, como a su vez, mayores retornos económicos que lo obtenido en otras especies de *Eucalyptus* (24).

Las prácticas intensivas de manejo silvícola y la mayor diversidad del uso de la madera actuales (26), requieren de funciones de alta consistencia y versatilidad para la estimación de volúmenes comerciales (33), que permitan un mejor apoyo a la toma de decisiones en la gestión forestal (11, 23, 34).

Las deficiencias más frecuentes en la cubicación se relacionan con el uso de funciones de volumen de razón (10), como se presenta en el caso del *E. nitens* (12).

En ese escenario, los modelos de ahusamiento continúan siendo una herramienta indispensable y de gran utilidad, tanto para efecto de la estimación puntual del volumen entre cualquier par de alturas (10, 45), como también en los procesos de simulación para la optimización de la madera en aserrío (15, 37).

La tasa de disminución del diámetro del fuste varía a medida que se avanza en altura en el árbol (14).

El fuste adquiere diferentes formas según la especie, pero en general se trata de un neiloide en la región basal, formas cilíndricas o troncos de paraboloides en la zona de mayor aprovechamiento comercial y termina en formas cónicas o parabólicas en el extremo superior del árbol (27, 43). Así, la mayor dificultad está en la obtención de estimaciones confiables del diámetro en la zona basal del fuste y en el extremo superior del mismo.

Además de la especie, el perfil del fuste podría ser determinado por la productividad del sitio (22), la posición sociológica del individuo dentro del rodal y por actividades de manejo silvicultural (20).

A lo largo del tiempo, numerosos autores han tratado de representar el perfil del fuste mediante diversos modelos matemáticos, basados ya sea en fundamentos biológicos o de origen netamente empírico.

La literatura actual incluye modelos de ahusamiento lineales (2, 3, 17, 18, 35, 36), no lineales (6, 7, 40, 41), segmentados (4, 21, 29, 48) y trigonométricos (44). Esa gama incluye desde modelos diferenciables e integrables de manera indeterminada, hasta modelos que requieren de métodos numéricos para la obtención del volumen del fuste.

La gran variedad de funciones de ahusamiento en la actualidad, es evidencia de las deficiencias en los modelos propuestos y presenta la idealización del perfil del fuste como un desafío que aún permanece en pie (13).

Un modelo de ahusamiento debiera tener los atributos siguientes: i) ser diferenciable en toda la longitud del fuste, ii) no generar oscilaciones alrededor de la línea de tendencia central, iii) que estime de manera adecuada no solo el diámetro de la sección comercial del fuste, sino también el diámetro del tocón para predecir el diámetro normal y el volumen del árbol para la reconstrucción de las variables de estado del rodal en un escenario postcosecha (9, 19, 28) y el diámetro del fuste por encima del límite de utilización comercial para aserrío (7, 45) y, iv) la capacidad del modelo de ahusamiento para predecir la altura del fuste, a la que se halla un diámetro límite de utilización para fines comerciales (45). De esta manera el objetivo de éste artículo es desarrollar un modelo de ahusamiento para *E. nitens*, que satisfaga los criterios mencionados.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Área de estudio

El estudio se realizó en la región macro climática Central de Chile, región que posee una precipitación media anual que varía entre 654 y 1949 mm, con una temperatura mínima en invierno de hasta 1,21°C y máxima en verano de 27,49°C (5); posee suficiente pluviometría para permitir el desarrollo forestal continuo, con un período estival de 3 a 7 meses dependiendo de la localidad (39).

La muestra de árboles se recopiló en rodales de *E. nitens*, localizados en 3 comunas de la región de La Araucanía, sobre suelos de cenizas volcánicas. Los rodales muestreados en este tipo de suelo estaban localizados en las comunas de Collipulli, Ercilla y Victoria.

Los suelos de cenizas volcánicas se formaron a partir de deposiciones recientes de material de origen volcánico, sobre sustratos fluvioglaciales o materiales fluviales, difícilmente detectables por la profundidad en la que se encuentran.

Son suelos poco evolucionados, profundos a muy profundos, de buen drenaje, textura media franca o franca limosa superficialmente y franco limosa en el perfil, de buena estructura y arraigamiento, con porosidad y sin gravas los primeros 160 cm, permeabilidad moderada y escurrimiento superficial moderado en pendientes de hasta un 3%.

Pertenecen a la serie de suelos denominada localmente como Santa Bárbara, con topografía de lomas y cerros, con ocurrencia menos frecuente de suelos ligeramente ondulados con 2 a 5% de pendiente.

### Selección de la muestra de rodales

En el estudio se consideró un total de 6 predios. De cada predio se seleccionó un rodal de *E. nitens* en edad de cosecha;

cuyos rodales fueron seleccionados en función del volumen acumulado (tabla 1). Se obtuvo una muestra de 10 árboles en cada rodal, abarcando todo el espectro diamétrico registrado en los inventarios pre-cosecha. En total, la muestra quedó constituida por 60 árboles.

### Muestreo destructivo de árboles

A cada árbol en pie, se le midió y marcó el diámetro normal a la altura del pecho (*dap*).

Una vez volteado el árbol se midió la altura total (*ht*) y se marcó el fuste a partir de la altura del *dap* hasta alcanzar el diámetro límite de utilización (*dlu*) para aserrío y pulpa de 8 cm, de ahí en adelante se marcó el fuste cada metro.

Luego se extrajo una rodaja de la base del árbol (tocón), otra a la altura del *dap* y posteriormente cada 2,44 m (para facilitar el aprovechamiento comercial de las trozas resultantes), hasta alcanzar

la altura del *dlu*; a partir de esta altura, se continuó extrayendo rodajas cada metro hasta un diámetro de 2,54 cm.

En laboratorio a cada rodaja se le determinó su diámetro promedio sin corteza (*d*) y, a partir de este, se calculó el volumen sin corteza de cada sección del fuste, definida entre cada par de rodajas sucesivas, utilizando la fórmula de Smalian.

$$V = L \cdot \frac{A_s + A_i}{2}$$

donde:

*V* = es el volumen sin corteza de cada sección del fuste (m<sup>3</sup>)

*L* = es la longitud de la sección (m)

*A<sub>s</sub>*, *A<sub>i</sub>* = áreas superior e inferior de cada sección (m<sup>2</sup>).

**Tabla 1.** Caracterización dasométrica de los rodales y de los árboles muestreados, en suelos de cenizas volcánicas.

**Table 1.** Dasometric characterization of stands and trees sampled, in volcanic ash soils.

Predio	Edad	N	G	Diámetro normal (cm)		
	años	Arb ha <sup>-1</sup>	m <sup>2</sup> ha <sup>-1</sup>	Min.	Max.	CV %
La Aurora	19	870	57,30	14,0	48,0	31,63
Aguas Buenas	21	1028	62,60	12,0	44,0	30,09
Chile Nuevo	19	1173	69,77	11,5	44,5	31,31
Tranquenanco	16	1171	66,00	13,0	47,5	31,57
Río Colo	19	1150	71,70	13,5	41,0	30,17
Sara Malleco	20	1317	75,90	11,5	52,0	36,65

Predio	Altura total (m)			IS	V	N° de muestras		
	Min.	Max.	CV %			Dom.	m	m <sup>3</sup> ha <sup>-1</sup>
La Aurora	24,40	46,51	14,49	45,50	27,73	786,2	155	37
Aguas Buenas	12,27	46,12	21,49	45,89	25,68	866,6	145	38
Chile Nuevo	19,43	44,35	19,74	43,46	26,12	939,9	139	36
Tranquenanco	24,36	46,93	16,28	42,74	29,69	936,9	144	37
Río Colo	23,94	40,37	13,29	39,14	22,86	1002,3	140	35
Sara Malleco	17,18	47,49	21,09	46,11	26,99	1080,2	140	33
<b>TOTAL</b>							863	216

Donde: *N*, es la densidad de plantación (arb ha<sup>-1</sup>); *G*, es el área basal (m<sup>2</sup> ha<sup>-1</sup>); *CV*, es el coeficiente de variación; *IS*, índice de sitio a una edad de referencia de 10 años (31); *V*, es el volumen (m<sup>3</sup> ha<sup>-1</sup>).

Where: *N*, is the density of planting (arb ha<sup>-1</sup>); *G*, is the basal area (m<sup>2</sup> ha<sup>-1</sup>); *CV*, is the coefficient of variation; *IS*, is the site index reference age 10 years (31); *V*, is the volume (m<sup>3</sup> ha<sup>-1</sup>).

El volumen total de cada árbol para el proceso posterior de validación, se determinó a partir de la sumatoria de los volúmenes de las secciones respectivas de un mismo individuo; considerando para ello la cubicación por encima del *dlu* para aserrío y pulpa, para una correcta determinación del volumen total.

### Modelación del perfil del fuste

En primer término, se elaboró modelos empíricos en función de medidas referentes al árbol. Se buscó que el modelo elegido presentase continuidad a lo largo del fuste y que pudiese reflejar las dimensiones del diámetro en toda su extensión (incluida la sección basal y el extremo superior del fuste). El ajuste del modelo, se realizó por medio del procedimiento NLIN (38).

$$Y = \frac{X}{b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + b_3 \cdot X^3} \quad (I)$$

$$\text{Con } Y = \frac{d^2}{dap^2}; X = \frac{h_t - h}{h_t - 1,3}$$

donde

$d$  = diámetro sin corteza (cm), de la rodaja obtenida a la altura  $h$ , (m)

$dap$  = diámetro normal a la altura del pecho (cm)

$h_t$  = altura total del árbol (m)

$b_0, b_1, b_2, b_3$  = parámetros del modelo.

A partir de la expresión lineal del modelo de ahusamiento propuesto y, representado luego de manera algebraica de la misma forma que la ecuación de Tartaglia-Cardano (16), se puede obtener cualquier altura en función de su respectivo diámetro a través de la siguiente transformación de variables:

$$\text{Con } P = -\frac{1}{3} \cdot b_2^2 + (b_1 - \frac{dap^2}{d^2}) \cdot b_3 \wedge Q = b_0 \cdot b_3^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{dap^2}{d^2} - b_1 \right) \cdot b_2 \cdot b_3 + \frac{2}{27} b_2^3$$

$$h = h_t - \left( \frac{1}{b_3} \cdot \left[ \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} \right] - \frac{b_2}{3 \cdot b_3} \right) \cdot (h_t - 1,3)$$

donde

$h$  = altura (m) en el fuste correspondiente a la rodaja de diámetro  $d$  (cm) sin corteza

$dap$  = diámetro normal (cm) a 1,30 m

$ht$  = altura total del árbol (m)

$b_0, b_1, b_2, b_3$  = parámetros obtenidos del ajuste del modelo I

$P$  y  $Q$  = transformaciones de la representación lineal del modelo I, para hacer uso de la ecuación de Tartaglia-Cardano (16).

## Comparación entre modelos de ahusamiento

Para comparar el modelo de ahusamiento I, con los diversos modelos existentes en la literatura que presentasen la misma variable respuesta

$$Y = \frac{d^2}{dap^2}$$

pero con diferente número de parámetros (tabla 2, pág. XXX-XXX), se empleó el criterio de información de Akaike (AIC) (1).

Para la evaluación de la precisión del ajuste del modelo de ahusamiento, se utilizó la raíz del error cuadrático medio (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{SSE}{n-p}}$$

Y también, un indicador de la eficiencia predictiva del modelo (Eficiencia):

$$Eficiencia = \left[ 1 - \frac{\sum_1^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_1^n (y_i - \bar{y}_i)^2} \right] \cdot 100\%$$

donde

$SSE$  = suma de los cuadrados del error

$n$  = número de observaciones

$p$  = número de parámetros en el modelo

$y_i$  = valor observado

$\hat{y}_i$  = valor estimado por el modelo de ahusamiento

$\bar{y}_i$  = media de los valores observados.

Se preseleccionaron para análisis comparativo en el presente estudio, solo aquellos modelos de ahusamiento que presentasen la mejor precisión, el menor sesgo, la convergencia de la totalidad de los parámetros y el mejor comportamiento gráfico del modelo.

A excepción del modelo de ahusamiento de Bruce *et al.* (3) (tabla 2, pág. XXX-XXX; modelo XI), el cual se incorporó para efecto comparativo con el modelo propuesto, debido al uso para la idealización del perfil del fuste, en plantaciones de *E. nitens* en Chile (12).

Se comparó las diferencias significativas entre los modelos de ahusamiento por medio del error absoluto medio (MAE) estimado a diferentes fracciones de altura en el fuste; a través de una prueba de rangos múltiples Tukey LSD (95% nivel de confianza).

$$MAE = \frac{\sum_1^n |y_i - \hat{y}_i|}{n}$$

donde

$y_i$  = valor observado

$\hat{y}_i$  = valor estimado por el modelo de ahusamiento

$n$  = número de observaciones

## Cuantificación del volumen a partir del modelo de ahusamiento

El modelo de ahusamiento I se integró para la estimación del volumen a través de métodos numéricos utilizando el procedimiento IML (38). Para la cuantificación del volumen solo se consideró el modelo de ahusamiento I desarrollado en el presente escrito.

El volumen estimado se contrastó con el volumen determinado por la fórmula de Smalian, a través de una validación cruzada entre el valor estimado y observado, haciendo uso de una regresión lineal simple. Previamente se había seleccionado un 75% de las muestras para el ajuste y, un 25% de las muestras para la validación; para garantizar la independencia de los mismos (8).

**Tabla 2.** Modelos de ahusamiento: lineales, no lineales, segmentados, y trigonométricos.

**Table 2.** Models taper: linear, nonlinear, segmented, and trigonometric.

Modelo	Autor	Nº
$Y = b_1.(T - 1) + b_2.(T^2 - 1)$	Kozak <i>et al.</i> (17)	[ II ]
$Y = b_1.Z^{(b_2)}$	Demaerschalk (7)	[ III ]
$Y = b_1.X + b_2.X^2 + b_3.X^3 + b_4.X^4 + b_5.X^5$	Lowell (18)	[ IV ]
$Y = b_0.\left(\frac{h}{1,3}\right)^{2-(b_1+b_2.T+b_3.T^2)}.X$	Sharma y Zhang (41)	[ V ]
$Y = b_1.(T - 1) + b_2.(T^2 - 1) + (b_3 - b_2).(\alpha_2 - T)^2.I$ $T \leq \alpha \rightarrow I = 1; T > \alpha \rightarrow I = 0$	Max y Burkhart (21)	[ VI ]
$Y = b_1.(T - 1) + b_2.(T^2 - 1) + b_3.(\alpha_1 - T)^2.I_1 - b_2(\alpha_2 - T)^2.I_2$ $T \leq \alpha_1 \rightarrow I_1 = 1; T > \alpha_1 \rightarrow I_1 = 0$ $T \leq \alpha_2 \rightarrow I_2 = 1; T > \alpha_2 \rightarrow I_2 = 0$	Max y Burkhart (21)	[ VII ]
$Y = b_1.Z + b_2.Z^2 + b_3.(Z - \alpha_1).I_1 + b_4.(Z - \alpha_2).I_2$ $Z < \alpha_1 \rightarrow I_1 = 0; Z \geq \alpha_1 \rightarrow I_1 = 1$ $Z < \alpha_2 \rightarrow I_2 = 0; Z \geq \alpha_2 \rightarrow I_2 = 1$	Valenti y Cao (48)	[ VIII ]
$Y = Z.(b_1.Z + b_2.Z^2) + (Z - \alpha)^2.(b_3 + b_4.(Z - \alpha_2)).I$ $Z \leq \alpha \rightarrow I = 0; Z > \alpha \rightarrow I = 1$	Parresol <i>et al.</i> (29)	[ IX ]
$Y = b_1.(T - 1) + b_2.\sin(2\pi.T) + b_3.\cot\left(\frac{\pi}{2}.T\right)$	Thomas y Parresol (44)	[ X ]
$Y = b_0.X^2 + b_1.(X^{1.5} - X^3).dap + b_2.(X^{1.5} - X^3).h_t$ $+ b_3.(X^{1.5} - X^{32}).h_t.dap + b_4.(X^{1.5} - X^{32}).h_t^{1.5} + b_5.(X^{1.5} - X^{40}).h_t^2$	Bruce <i>et al.</i> (4)	[ XI ]

Con

$$Y = \frac{d^2}{dap^2}; T = \frac{h}{h_t}; X = \frac{h_t - h}{h_t - 1,3}; Z = \frac{h_t - h}{h_t}$$

donde

$d$  = diámetro sin corteza (cm) de la rodaja obtenida a la altura  $h$  (m).

$dap$  = diámetro normal a la altura del pecho (cm).

$h_t$  = altura total del árbol (m).

$b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \alpha, \alpha_1, \alpha_2$  = parámetros del modelo.

$ln$  = logaritmo natural.

$e$  = número de Euler (2,71828).

With

$$Y = \frac{d^2}{dap^2}; T = \frac{h}{h_t}; X = \frac{h_t - h}{h_t - 1,3}; Z = \frac{h_t - h}{h_t}$$

where

$d$  = diámetro under bark (cm) of the shield obtained height  $h$  (m).

$dap$  = normal diameter at breast height (cm).

$ht$  = total tree height (m).

$b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \alpha, \alpha_1, \alpha_2$  = model parameters.

$ln$  = natural logarithm.

$e$  = Euler number (2.71828).

**RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

**Comparación entre modelos de ahusamiento**

Los modelos de ahusamiento convergieron en la totalidad de sus parámetros de manera significativa ( $P < 0,05$ ) (tabla 3), a excepción del parámetro  $b_3$  del modelo de Bruce *et al.* (3) modelo XI.

**Tabla 3.** Parámetros de los modelos de ahusamiento, sobre suelos de cenizas volcánicas.

**Table 3.** Parameters taper models, on volcanic ash soils.

Mod.	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
I	5,3807*	-16,7702*	23,9813*	-11,4723*					
II		-1,5978*	0,6579*						
III		0,9301*	1,5919*						
IV		0,5064*	-2,9276*	14,5524*	-21,3451*	10,1142*			
V	0,8436*	-0,125*	0,3269*	-0,5951*					
VI		-1,3136*	0,4584*	149,6*			0,0458*		
VII		-2,092*	0,9411*	107,6*				0,0578*	0,6101*
VIII		-0,1465*	2,7303*	-1,2882*	-1,5197*			0,2793*	0,5631*
IX		1,8533*	-1,111*	-1112,8*	412*		0,9003*		
X		-0,7014*	0,053*	0,00344*					
XI	0,8409*	-0,0181*	0,0204*	n,s,	-0,00444*	-0,00007*			

donde:  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \alpha, \alpha_1, \alpha_2$ : parámetros del modelo; \* $P < 0,05$ ; n.s.: no significativo.

where:  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \alpha, \alpha_1, \alpha_2$ : model parameters; \* $P < 0,05$ ; n.s.: not significant.

La precisión del ajuste de los modelos de ahusamiento evaluado a través de la raíz del error cuadrático medio (RMSE), fluctuó entre 0,07778 y 0,09539 (tabla 4), y el error absoluto medio (MAE) entre 0,0046 en la zona del ápice y 0,1472 en la zona basal del fuste (tabla 5, pág. XXX). De donde los modelos con mayor eficiencia predictiva, fueron el modelo XI de Bruce *et al.* (3) y el modelo I, con eficiencias de 93,83 y 93,26 %, respectivamente, siendo a la vez quienes presentaron el menor AIC y la menor RMSE.

**Tabla 4.** Estadígrafos de los modelos de ahusamiento, sobre suelos de cenizas volcánicas.

**Table 4.** Statisticians taper models, on volcanic ash soils.

Mod.	Método de Convergencia	n	AIC	RMSE	Eficiencia
					%
I	Marquardt	863	-4329	0,08124	93,26
II	Newton	863	-4070	0,09450	90,86
III	Newton	863	-4054	0,09539	90,69
IV	Newton	863	-4307	0,08222	93,10
V	Newton	863	-4326	0,08136	93,24
VI	Newton	863	-4254	0,08479	92,65
VII	Marquardt	863	-4264	0,08426	92,75
VIII	Marquardt	863	-4137	0,09072	91,62
IX	Newton	863	-4249	0,08503	92,63
X	Newton	863	-4073	0,09429	90,92
XI	Newton	863	-4402	0,07778	93,83

donde:  $n$ : número de muestras; AIC: criterio de información de Akaike; RMSE: raíz del error cuadrático medio; \* $P < 0,05$ ; n.s.: no significativo.

where:  $n$ : number of samples; AIC: Akaike information criterion; RMSE: root mean square error; \* $P < 0,05$ ; n.s.: not significant.



**Tabla 5.** Comparación del error absoluto medio (MAE) a diferentes fracciones de altura (Prueba Tukey LSD, 95% nivel de confianza).

**Table 5.** Comparison of the mean absolute error (MAE) at different fractions height (Tukey test LSD, 95% confidence level).

Modelo	0 - 10%	10 - 20%	20 - 30%	30 - 40%	40 - 50%
I	0,1131 a	0,0860 a	0,0677 a	0,0598 a	0,0482 a
II	0,1459 a	0,0922 a	0,0684 a	0,0597 a	0,0491 a
III	0,1472 b	0,0937 a	0,0708 a	0,0586 a	0,0483 a
IV	0,1161 a	0,0879 a	0,0679 a	0,0590 a	0,0489 a
V	0,1072 a	0,0844 a	0,0639 a	0,0598 a	0,0486 a
VI	0,1116 a	0,0856 a	0,0643 a	0,0623 a	0,0482 a
VII	0,1110 a	0,0867 a	0,0651 a	0,0589 a	0,0478 a
VIII	0,1373 a	0,0859 a	0,0679 a	0,0633 a	0,0495 a
IX	0,1122 a	0,0875 a	0,0662 a	0,0588 a	0,0480 a
X	0,1326 a	0,0881 a	0,0708 a	0,0640 a	0,0553 a
XI	0,1003 a	0,0836 a	0,0620 a	0,0575 a	0,0459 a

Modelo	50 - 60%	60 - 70%	70 - 80%	80 - 90%	90 - 100%
I	0,0370 a	0,0328 a	0,0253 a	0,0150 a	0,0071 a
II	0,0425 a	0,0350 a	0,0246 a	0,0178 a	0,0118 a
III	0,0423 a	0,0365 a	0,0278 a	0,0150 a	0,0056 a
IV	0,0371 a	0,0331 a	0,0263 a	0,0167 a	0,0143 a
V	0,0384 a	0,0326 a	0,0227 a	0,0159 a	0,0088 a
VI	0,0383 a	0,0331 a	0,0236 a	0,0262 a	0,0185 a
VII	0,0369 a	0,0331 a	0,0244 a	0,0162 a	0,0089 a
VIII	0,0398 a	0,0341 a	0,0270 a	0,0152 a	0,0081 a
IX	0,0381 a	0,0347 a	0,0300 a	0,0154 a	0,0046 a
X	0,0400 a	0,0345 a	0,0235 a	0,0214 a	0,0154 a
XI	0,0360 a	0,0306 a	0,0226 a	0,0178 a	0,0078 a

En la zona basal por debajo del 10% de la altura total, solo se presentaron diferencias significativas entre sí, entre los modelos III de Demaerschalk (6) [0,1472] y, el modelo XI de Bruce *et al.* (3) [0,1003]. Entre el 10 y el 80% de la altura total, no se presentaron diferencias significativas entre los diferentes modelos de ahusamiento; considerando que en el caso del modelo segmentado VIII de Valenti y Cao (48), es continuo pero no diferenciable en los puntos de unión, lo que aumenta la variabilidad en la predicción del diámetro en las alturas cercanas a esos puntos. Entre el 80 y el 90% de la altura total, el mayor sesgo lo presentó el modelo segmentado VI de Max y Burkhart (21) [0,0262], diferenciándose del resto; aun cuando este no se diferencia de manera significativa del modelo trigonométrico X de Thomas y Parresol (44) [0,0214].

En la zona apical por encima del 90% de la altura del fuste, se registró la mayor variabilidad del sesgo entre los diferentes modelos. Presentándose el mayor MAE de 0,0185 en el modelo segmentado VI de Max y Burkhart (21); el menor sesgo se evidenció en los modelos de ahusamiento, modelo segmentado IX de Parresol *et al.* (29) [0,0046], modelo III de Demaerschalk (6) [0,0056] y, en el modelo I [0,0071]; los modelos II de Kozak *et al.* (17), IV de Lowell (18), V de Sharma y Zhang (41), VI y VII de Max y Burkhart (21), y X de Thomas y Parresol (44), sobreestimaron el diámetro en la zona apical del fuste, lo cual llevaría a sobrevaloraciones de la oferta de biomasa residual del fuste para fines energéticos.

Sin embargo, los únicos modelos de ahusamiento con el menor MAE en todas las fracciones de altura, son el modelo I y, el modelo IX de Parresol *et al.* (29).

Al evaluar gráficamente solamente aquellos modelos de ahusamiento con

mejor eficiencia predictiva, mayor precisión y menor sesgo (tabla 4, pág. XXX y tabla 5, pág. XXX), modelos I, IX de Parresol *et al.* (29) y XI de Bruce *et al.* (3).

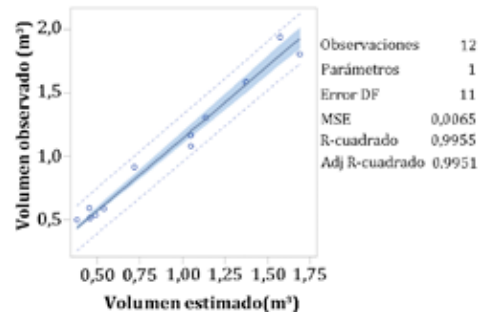
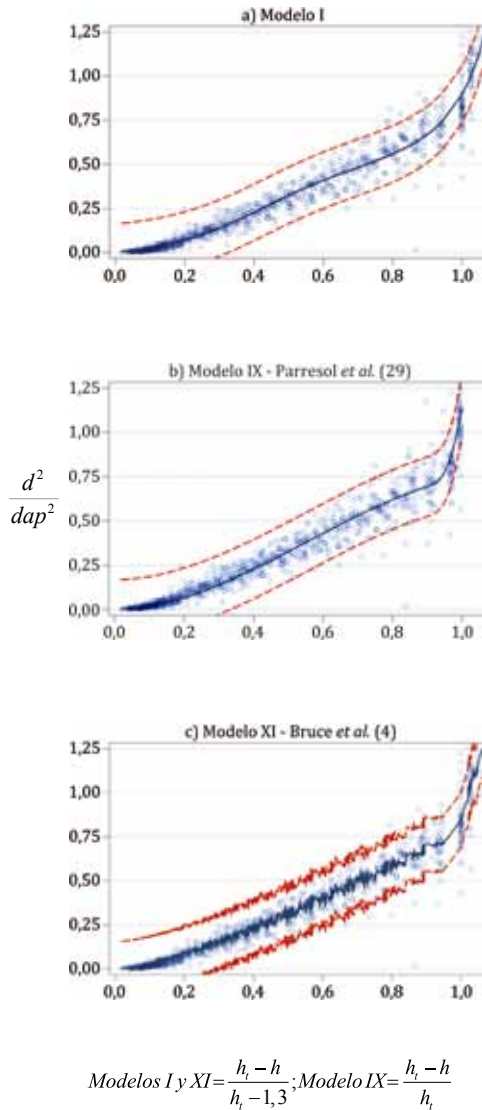
Se observa que el modelo XI de Bruce *et al.* (3), posee una alta sensibilidad que se manifiesta en oscilaciones alrededor de la línea de estimación (figura 1c, pág. XXX), algo común en los polinomios de alto grado (46, 47).

El modelo I y el modelo IX de Parresol *et al.* (29), presentan una alta flexibilidad en la representación gráfica del perfil del fuste, permitiendo estimar adecuadamente tanto los diámetros de la zona basal del fuste, como aquellos en la parte superior del mismo (figura 1a y 1b, pág. XXX); usualmente dichos sectores del fuste no representan un uso comercial para fines de aserríos y pulpa, sin embargo, en los últimos años ha cobrado suma importancia la cuantificación de la biomasa residual para fines energéticos (25).

### **Validación del volumen del fuste sin corteza**

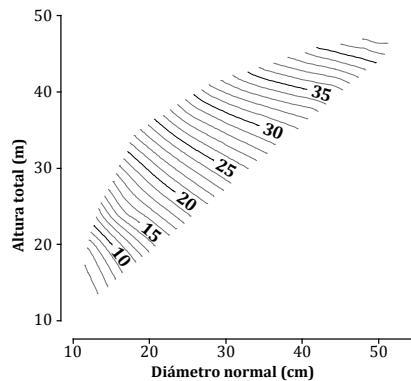
El volumen del fuste sin corteza estimado a partir de la integración por métodos numéricos del modelo de ahusamiento I, al ser validado de manera cruzada con registros de árboles que no participaron en el ajuste para la obtención de parámetros, alcanza una eficacia de predicción de 99,55% (figura 2, pág. XXX).

Para la representación gráfica de la altura derivada del modelo de ahusamiento I (figura 3, pág. XXX), haciendo uso de la ecuación de Tartaglia-Cardano (16), se consideró un diámetro límite de utilización sin corteza de 8 cm con base a los requerimientos comerciales de punta delgada de madera para fines de aserrío y pulpa en Chile.



**Figura 2.** Volumen observado y estimado sin corteza para *E. nitens*, en suelos de cenizas volcánicas.

**Figure 2.** Observed and estimated volume under bark for *E. nitens*, on soils of volcanic ash.



**Figura 1 (a, b, c).** Modelos de ahusamiento, con límites de confianza al 95%.

**Figure 1 (a, b, c).** Taper models, with confidence intervals 95%.

**Figura 3.** Diagrama de altura comercial (m) *dlu*, 8 cm; en función del diámetro normal y la altura total.

**Figure 3.** Diagram commercial height (m) *dlu*, 8 cm; depending on the normal diameter and total height.

## CONCLUSIONES

El modelo de ahusamiento I es continuo y diferenciable en la totalidad del perfil del fuste. Los estadísticos de bondad de ajuste y predictivos del modelo de ahusamiento propuesto, mostraron la eficiencia del mismo para estimar el diámetro y el volumen del fuste sin corteza; sobre cualquier fracción de altura.

El modelo de ahusamiento I permite a su vez predecir de manera acertada y de forma directa, cualquier altura comercial del fuste en función de cualquier diámetro límite de utilización, por medio de la expresión

algebraica obtenida haciendo uso de la ecuación de Tartaglia-Cardano (16).

El modelo de ahusamiento I desarrollado en el presente artículo, enseña una mayor eficiencia para la estimación del perfil del fuste que el modelo segmentado de Parresol *et al.* (29) modelo IX y, una mayor estabilidad gráfica que el modelo de Bruce *et al.* (3) modelo XI; con base a lo cual se recomienda su aplicación para la cubicación del fuste de *E. nitens*, sobre suelos de cenizas volcánicas.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Akaike, H. 1974. A new look at the statistical model identification. *Automatic Control, IEEE Transactions on.* 19(6): 716-723.
2. Allen, P. 1991. Polynomial taper equation for *Pinus caribaea*. *New Zealand Journal of Forestry Science.* 21(2/3): 194-205.
3. Bruce, D.; Curtis, R.; Vancoevering, C. 1968. Development of a system of taper and volume tables for red alder. *Forest Science.* 14(3): 339-350.
4. Cao, Q.; Burkhart, H.; Max, T. 1980. Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *Forest Science.* 26(1): 71-80.
5. CR 2, Centro de Ciencia del Clima y la Resiliencia. 2015. Datos de Precipitación 1940- 2013. Disponible en: <http://www.cr2.cl/recursos-y-publicaciones/bases-de-datos/datos-de-precipitacion/>
6. Demaerschalk, J. 1972. Converting volume equations to compatible taper equations. *Forest Science.* 18(3): 241-245.
7. Demaerschalk, J. 1973. Integrated systems for the estimation of tree taper and volume. *Canadian Journal of Forest Research.* 3(1): 90-94.
8. De Miguel, S.; Mehtatalo, L.; Shater, Z.; Kraid, B.; Pukkala, T. 2012. Evaluating marginal and conditional predictions of taper models in the absence of calibration data. *Canadian Journal of Forest Research.* 42(7): 1383-1394.
9. Diéguez, U.; Barrio, M.; Castedo, F.; Balboa, M. 2003. Estimación del diámetro normal y del volumen del tronco a partir de las dimensiones del tocón para seis especies forestales comerciales de Galicia. *Invest. Agrar.: Sist. Recur. For.* 12(2): 131-139.
10. Diéguez, U.; Rojo, A.; Castedo, F.; Álvarez, J.; Barrio, M.; Crecente, F.; González, J.; Pérez, C. 2009. Herramientas selvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia C. d. M. R. Dirección Xeral de Montes, Xunta de Galicia (Ed.). p. 272.
11. Di Leo, N. C.; Bonel, B. A.; Montico, S.; Vilche, M. S.; Denoia, J. A. 2007. Balance energético en unidades de tierra de una cuenca rural basado en un sistema de información geográfica. *Revista de la Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza. Argentina.* 39(1): 41-57.
12. Gilbert, H.; Paci, C. 2010. An assessment of volume-ratio functions for *Eucalyptus globulus* and *E. nitens* in Chile. *Ciencia e Investigación Agraria.* 37(1): 5-15.

13. Gomat, H.; Deleporte, P.; Moukini, R.; Mialounguila, G.; Ognouabi, N.; Saya, A.; Vigneron, P.; Saint, L. 2011. What factors influence the stem taper of *Eucalyptus*: growth, environmental conditions, or genetics? *Annals of Forest Science*, 68(1): 109-120.
14. Hjelm, B. 2013. Stem taper equations for poplars growing on farmland in Sweden. *Journal of Forestry Research*. 24(1): 15-22.
15. Honorato, J. 2011. Modelos volumétricos fustales para *Acrocarpus fraxinifolius* Wight & Arn. en plantaciones agroforestales de la Sierra Norte de Puebla. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*. 2(6): 55-71.
16. Kichenassamy, S. 2015. Continued proportions and Tartaglia's solution of cubic equations. *Historia Mathematica*.
17. Kozak, A.; Munro, D.; Smith, J. 1969. Taper functions and their application in forest inventory. *The Forestry Chronicle*. 45(4): 278-283.
18. Lowell, K. 1986. A flexible polynomial taper equation and its suitability for estimating stem profiles and volumes of fertilized and unfertilized radiata pine trees. *Australian Forest Research*. 16(2): 165-174.
19. Martínez, J.; Acosta, A. 2014. Estimación del diámetro, altura y volumen a partir del diámetro del tocón para *Quercus laurina*, en Ixtlán, Oaxaca, México. *Madera y bosques*. 20(1): 59-70.
20. Matovic, B.; Koprivica, M.; Radonja, P. 2007. Generalized taper models for Norway spruce (*Picea abies* L. Karst.) in Bosnia and west Serbia. *Allgemeine Forst und Jagdzeitung*, 178(7/8). 150.
21. Max, T.; Burkhart, H. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*. 22(3): 283-289.
22. Mead, D. 2013. Sustainable management of *Pinus radiata* plantations FAO (Ed.) Forestry paper 170. Retrieved from [www.fao.org/3/a-i3274e.pdf](http://www.fao.org/3/a-i3274e.pdf)
23. Milanesi, G.; Woitschach, G. B. M.; Broz, D. R. 2012. Aplicación de la teoría de opciones reales a la determinación del momento óptimo de cosecha forestal. *Revista de la Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza. Argentina*. 44(2): 65-78.
24. Muñoz, F.; Espinosa, M.; Herrera, M.; Cancino, J. 2005. Características del crecimiento en diámetro, altura y volumen de una plantación de *Eucalyptus nitens* sometida a tratamientos silvícolas de poda y raleo. *Bosque*. 26(1): 93-99.
25. Muñoz, E.; Vargas, S.; Navia, R. 2015. Environmental and economic analysis of residual woody biomass transport for energetic use in Chile. *Int J Life Cycle Assess*. 20: 1033-1043.
26. Mussetta, P.; Barrientos, M. J. 2015. Vulnerabilidad de productores rurales de Mendoza ante el Cambio Ambiental Global: clima, agua, economía y sociedad. *Revista de la Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza. Argentina*. 47(2): 145-170.
27. Newnham, R. 1992. Variable-form taper functions for four *Alberta* tree species. *Canadian Journal of Forest Research*. 22(2): 210-223.
28. Parresol, B. 1998. Prediction and error of baldcypress stem volume from stump diameter. *Southern Journal of Applied Forestry*, 22(2): 69-73.
29. Parresol, B.; Hotvedt, J.; Cao, Q. 1987. A volume and taper prediction system for bald cypress. *Canadian Journal of Forest Research*. 17(3): 250-259.
30. Peña-Cortés, F.; Escalona-Ulloa, M.; Pincheira-Ulbrich, J.; Rebolledo, G. 2011. Cambio de uso del suelo en los geosistemas de la cuenca costera del río Boroa (Chile) entre 1994 y 2004. *Revista de la Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza. Argentina*. 43(2): 1-20.
31. Pinilla, J.; Ferrando, M.; Bahamóndez, C.; Martín, M. 2000. Modelo de crecimiento para eucalipto en Chile. Informe técnico N° 148.
32. Pinkard, E.; Beadle, C. 1998. Effects of green pruning on growth and stem of *Eucalyptus nitens* (Deane and Maiden) Maiden. *New Forest*. 15: 107-126.
33. Quiñonez, G.; De los Santos, H.; Álvarez, J.; Velázquez, A. 2014. Sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial para las principales especies de *Pinus* en Durango, México. *Agrociencia*. 48(5): 553-567.

34. Rachid, C.; Mason, E.; Woollons, R.; Resquin, F. 2014. Volume and taper equations for *P. taeda* (L.) and *E. grandis* (Hill ex. Maiden). *Agrociencia Uruguay*. 18(2): 47-60.
35. Real, P.; Moore, J. 1986. An individual tree system for douglas-fir in the inland north-west. USDA Forestry Service General Technical Report NC-120, 1037-1044.
36. Renteria, J.; Ramirez, H. 1998. Sistema de cubicación para *Pinus cooperi* blanco mediante ecuaciones de ahusamiento en Durango. *Revista Chapingo: Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*. 4(2): 315-321.
37. Santiago, W.; De los Santos, H.; Ángeles, G.; Corral, J.; Valdez, J.; Del Valle, D. 2014. Predicción del rendimiento maderable de *Pinus patula* Schl. et Cham. a través de modelos de distribución diamétrica. *Agrociencia*. 48(1): 87-101.
38. SAS, Institute. 2009. Statistical Analysis System, Versión 9.2. Cary, North Carolina. Retrieved from <http://support.sas.com/documentation/92/>
39. Schlatter, J.; Gerding, V. 1995. Método de clasificación de sitios para la producción forestal, ejemplo en Chile. *Bosque*, 16(2), 13-20.
40. Sharma, M.; Oderwald, R. 2001. Dimensionally compatible volume and taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*. 31(5): 797-803.
41. Sharma, M.; Zhang, S. 2004. Variable-exponent taper equations for jack pine, black spruce, and balsam fir in eastern Canada. *Forest Ecology and Management*. 198(1): 39-53.
42. Smethurst, P.; Baillie, C.; Cherry, M.; Holz, G. 2003. Fertilizer effects on LAI and growth of four *Eucalyptus nitens* plantations. *Forest Ecology and Management*. 176: 531-542.
43. Tamarit, J.; De los Santos, H.; Alfrete, A.; Valdez, J.; Ramírez, H.; Guerra, V. 2014. Sistema de cubicación para árboles individuales de *Tectona grandis* Lf mediante funciones compatibles de ahusamiento-volumen. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*. 5(21): 57-75.
44. Thomas, C.; Parresol, B. 1991. Simple, flexible, trigonometric taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*. 21(7): 1132-1137.
45. Torrubiano, C.; Salinas, H. 1998. Herramientas de cubicación para pino oregón (*Pseudotsuga menziesii* (Mirb) Franco) ubicado en la zona de Valdivia. *Bosque*. 19(2): 11-21.
46. Trincado, G.; Vidal, J. 1999. Aplicación de interpolación "spline" cúbica en la estimación de volumen. *Bosque*. 20(2): 3-8.
47. Trincado, G.; Sandoval, V. 2002. Algoritmos para la estimación de volúmenes comerciales. Quebracho. *Revista de Ciencias Forestales*. 9: 106-114.
48. Valenti, M.; Cao, Q. 1986. Use of crown ratio to improve loblolly pine taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*. 16(5): 1141-1145.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consorcio Tecnológico BioEnercel S.A, Forestal MININCO, MASISA S.A. y Forestal ARAUCO S.A., por la participación y financiamiento de la investigación denominada "Aprovechamiento sustentable de residuos de cosecha forestal e industrial para producción de biocombustibles de segunda generación" (Subproyecto 08CTE03-02) y, al apoyo de la beca de la Agencia de Cooperación Internacional de Chile (AGCI) y de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT-PCHA / Doctorado Nacional / 2013-63130284).