

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA TROPICAL

ANTONIO LAFACE

RESUMEN. Lo que sigue es una introducción a la geometría tropical. El intento es de definir los instrumentos algebraicos de base que permiten de introducir las variedades algebraicas tropicales. La motivación es el estudio de la correspondencia entre la geometría clásica y la geometría tropical.

ÍNDICE

Introducción	2
1. Álgebra tropical	3
1.1. El semianillo tropical	3
1.2. Polinomios tropicales	4
1.3. Ecuaciones algebraicas tropicales	4
1.4. Rectas tropicales en \mathbb{T}^2	7
1.5. Espacios vectoriales tropicales	8
1.6. Aplicaciones lineales tropicales	10
Ejercicios	12
2. Amebas	14
2.1. La espina de una ameba	15
2.2. Amebas no arquimedianas	16
Ejercicios	18
3. De la geometría clásica a la geometría tropical	19
3.1. Curvas tropicales planas	19
3.2. Cónicas y cubicas tropicales	21
Ejercicios	23
Referencias	24

INTRODUCCIÓN

La Geometría Tropical es el estudio de las variedades algebraicas definidas sobre el semianillo tropical $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ donde la operación de suma y producto son:

$$x \odot y = x + y, \quad x \oplus y = \min\{x, y\}.$$

En este curso nos proponemos de introducir el álgebra tropical que sirve para definir las variedades algebraicas tropicales. Esto con el fin de estudiar las relaciones entre la geometría clásica y la geometría tropical. Una referencia por el argumento del curso se puede encontrar aquí:

http://en.wikipedia.org/wiki/Tropical_geometry

La primera sección introduce el álgebra tropical y el álgebra lineal tropical. El Teorema fundamental del álgebra tropical 1.7 será nuestra guía por la definición de lugar de ceros de un polinomio en mas que una variable.

En la segunda sección empezamos considerando las amebas de las variedades algebraicas definidas sobre los números complejos. La dificultad natural que se presenta en el estudio de las amebas puede ser superada trabajando sobre un campo no arquimediano algebraicamente cerrado de característica cero. Aquí nuestra guía será el Teorema 2.9.

El contenido de la tercera sección son las curvas algebraicas tropicales del plano, in particular cónicas y cubicas. Nos concentraremos sobre el concepto de subdivisión regular del polígono de Newton de la curva tropical. Este permite de construir un algoritmo para encontrar el tipo combinatorio de la curva estudiada.

1. ÁLGEBRA TROPICAL

Empezamos definiendo el semianillo tropical y sus propiedades algebraicas principales.

1.1. El semianillo tropical. El conjunto $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con las dos operaciones:

$$x \odot y = x + y, \quad x \oplus y = \min\{x, y\}.$$

es el *semianillo tropical*. La palabra semianillo

<http://es.wikipedia.org/wiki/Semianillo>

se usa porque \mathbb{T} satisface los axiomas:

1. (\mathbb{T}, \oplus) es un monoide conmutativo con elemento identidad $0_T = +\infty$:

a) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

b) $0_T \oplus a = a \oplus 0_T = a$

c) $a \oplus b = b \oplus a$

2. (\mathbb{T}, \odot) es un monoide con elemento identidad $1_T = 0$:

a) $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$

b) $1_T \odot a = a \odot 1_T = a$

3. La multiplicación se distribuye sobre la adición:

a) $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

b) $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$

4. 0_T anula \mathbb{T} :

a) $0_T \odot a = a \odot 0_T = 0_T$

Observamos que \mathbb{T} es idempotente porque $x \oplus x = x$ para cada $x \in \mathbb{T}$. Por esta razón las operaciones algebraicas se simplifican. Por ejemplo consideramos la potencia de un binomio:

$$(x \oplus y)^n$$

donde la notación exponencial indica el producto tropical n veces. Por la idempotencia de \mathbb{T} tenemos que $(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus x \odot y \oplus y^2$. El mínimo entre los tres números

$$2x \quad x + y \quad 2y$$

estas siempre asumido o bien en $2x$ o bien en $2y$. Por lo tanto hemos probado que $(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus y^2$.

Proposición 1.1. *Para cualquier entero positivo n vale la igualdad: $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$.*

Demostración. la demostración es por inducción sobre n , el caso $n = 1$ siendo trivial. Supongamos que la afirmación es cierta en el caso $n - 1$, vemos que:

$$\begin{aligned} (x \oplus y)^n &= (x \oplus y) \odot (x \oplus y)^{n-1} \\ &= (x \oplus y) \odot (x^{n-1} \oplus y^{n-1}) \\ &= x^n \oplus y \odot x^{n-1} \oplus x \odot y^{n-1} \oplus y^n \\ &= x^n \oplus y^n \end{aligned}$$

donde la última igualdad es debida al hecho que el mínimo es asumido en una de las dos potencias. \square

1.2. Polinomios tropicales. Definimos un *polinomio tropical* como:

$$(1.1) \quad P := a_n \odot x^n \oplus \cdots \oplus a_1 \odot x \oplus a_0,$$

donde los $a_i \in \mathbb{T}$ son los coeficientes de P y x es la variable independiente. Para comprender el álgebra de los polinomios tropicales necesitamos observar que hay polinomios distintos que induce la misma función $x \mapsto P(x)$. Por ejemplo consideramos:

$$x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 2 \quad x^2 \oplus 2.$$

Por lo que hemos visto en la sección antecedente, sabemos que los valores de los dos polinomios coinciden para cada valor de $x \in \mathbb{T}$. En lo que sigue identificaremos los polinomios que asumen valores iguales por todos los valores de la variable independiente.

El **grado** de un polinomio tropical P , denotado por $\deg P$, es el máximo grado entre sus monomios, donde el grado de $a_i \odot x^i$ es i .

Proposición 1.2. Sean P, Q dos polinomios tropicales tal que $P(x) = Q(x)$ para cada $x \in \mathbb{T}$, entonces $\deg P = \deg Q$.

Demostración. Es suficiente observar que $\deg P = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)/x$. □

En particular un polinomio tropical de grado positivo no puede ser constante.

1.3. Ecuaciones algebraicas tropicales. Dado un polinomio tropical P queremos definir sus raíces. Consideramos el polinomio en una variable:

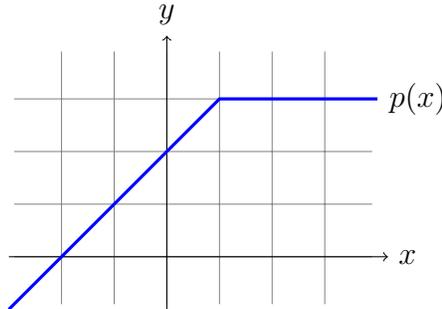
$$P := a \odot x \oplus b$$

y observamos que la ecuación $a \odot x \oplus b = 0_T$ no tiene soluciones si $b \neq 0_T$. Entonces tenemos que buscar una otra definición de los ceros de P . La igualdad

$$a \odot x \oplus b = a \odot (x \oplus (b - a))$$

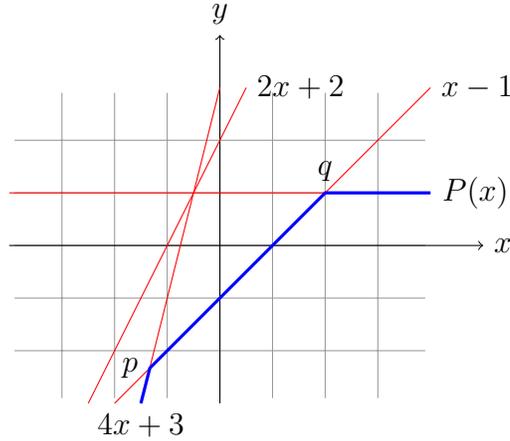
sugiere de definir, así como en el caso clásico, el número $b - a$ como cero de p .

Ejemplo 1.3. Sea $P := 2 \odot x \oplus 3$, de acuerdo con la definición precedente, $x = 1$ es cero de P . El gráfico de $P(x)$ es singular para este valor de x .



Definición 1.4. Las **raíces** de un polinomio tropical P son las abscisas de los puntos singulares del gráfico de $P(x)$ mas 0_T si $a_0 = 0_T$.

Ejemplo 1.5. Consideramos el polinomio tropical $P = 3 \odot x^4 \oplus 2 \odot x^2 \oplus -1 \odot x \oplus 1$ cuyo gráfico está aquí dibujado.



La recta de ecuación $y = 2x + 2$ esta arriba del gráfico de $P(x)$, entonces el mínimo entre

$$4x + 3, \quad 2x + 2, \quad x - 1, \quad 1$$

nunca se realiza en $2x + 2$. Esto implica que $P(x) = 3 \odot x^4 \oplus -1 \odot x \oplus 1$. Los puntos singulares del gráfico de $P(x)$ corresponden a los valores $x = -4/3$ y $x = 2$. Con el ayuda de la Proposición 1.1 se puede verificar que

$$P(x) = 3 \odot (x \oplus -4/3)^3 \odot (x \oplus 2).$$

Observamos que el exponente de $x \oplus x_p$ es exactamente la diferencia entre las pendientes de las dos rectas del gráfico de $P(x)$ que salen de p .

Definición 1.6. La *multiplicidad* de un polinomio tropical P en $x_0 \neq 0_T$ es:

$$\mu(P, a) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}.$$

Si $x_0 = 0_T$ definimos $\mu(P, 0_T)$ como la máxima potencia tropical x^i que divide P .

Suponemos que el polinomio tropical P se descomponga como:

$$P = a_n \odot (x \oplus x_1)^{n_1} \odot \cdots \odot (x \oplus x_r)^{n_r}$$

entonces cada x_i es un punto singular de la función $P(x)$ porque en una vecindad de x_i hay que $P(x) = \min(n_i x, n_i x_i) + f_i(x)$ con $f_i(x)$ suave en x_i . En particular

$$\mu(P, x_i) = n_i.$$

Este nos sugiere el siguiente.

Teorema 1.7 (Teorema fundamental del álgebra tropical [5, 8]). *Sea P un polinomio tropical de grado n , entonces*

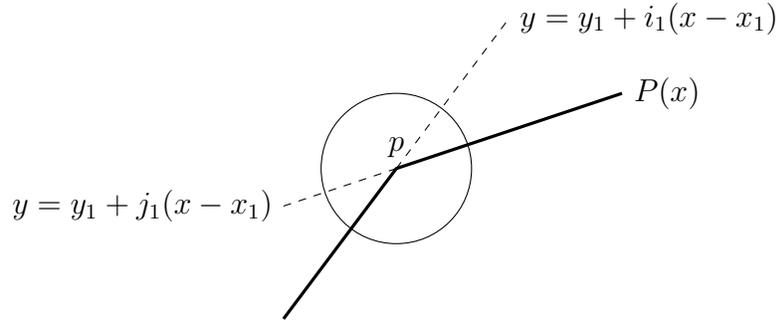
$$P = a_n \odot (x \oplus x_1)^{n_1} \odot \cdots \odot (x \oplus x_r)^{n_r}$$

con $n_1 + \cdots + n_r = n$, donde $n_i = \mu(P, x_i)$.

Demostración. La demostración es por inducción sobre n . Si $n = 1$ el teorema vale de manera obvia. Suponemos ahora que el enunciado valga para cualquier polinomio de grado $\leq n - 1$. Si el gráfico de $P(x)$ es liso entonces $P = a_n \odot x^n$ así que el teorema vale. Sea

$$p = (x_1, y_1)$$

un punto singular del gráfico de $P(x)$. Consideramos los dos lados del gráfico de $P(x)$ que salen de p :



Ponemos $n_1 := i_1 - j_1$ la diferencia entre las pendientes de los dos lados y consideramos la función:

$$G_p(x) := (x \oplus x_1)^{n_1}.$$

Esta función es singular en x_1 y es lisa para todos los otros valores de x . La diferencia

$$F(x) := P(x) - G_p(x)$$

es una función lineal por pedazos singular solamente en los $x_i \neq x_1$ donde $P(x)$ es singular. Sea Q un polinomio tropical tal que $Q(x) = F(x)$. Por definición tenemos que:

$$P = (x \oplus x_1)^{n_1} \odot Q$$

donde $\deg Q < n$. La tesis sigue de la hipótesis de inducción. \square

A cada polinomio tropical $P = a_n \odot x^n \oplus \dots \oplus a_1 \odot x \oplus a_0$ se puede asociar su **Polígono generalizado de Newton**:

$$\tilde{\Delta}_P := \text{Cápsula convexa } \{(i, t \geq a_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i \in [0, n] \cap \mathbb{Z} \quad a_i \neq 0_T\}.$$

Sea Δ_P^- la unión de las caras de $\tilde{\Delta}_P$ que tienen normal externa $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ con $\nu_2 < 0$.

Teorema 1.8 (Ver [5]). *Sea P un polinomio tropical, sean l_1, \dots, l_r las caras de Δ_P^- y sea*

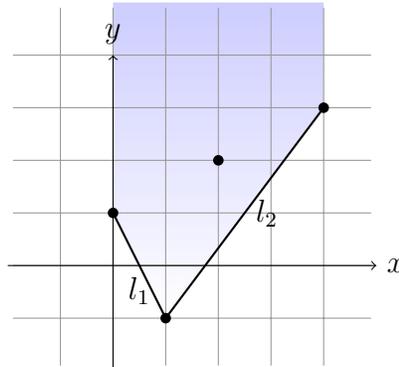
$$\mu_i := \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

la pendiente de l_i , entonces las raíces de P son $-\mu_i$ con multiplicidad Δx_i para $i = 1, \dots, r$.

Como aplicación del Teorema 1.8 consideramos nuevamente el polinomio tropical

$$P = 3 \odot x^4 \oplus 2 \odot x^2 \oplus -1 \odot x \oplus 1$$

y vemos que Δ_P^- tiene dos lados:



Las raíces contadas con multiplicidad son: $\mu_1 = 2, \Delta x_1 = 1$ y $\mu_2 = -4/3, \Delta x_2 = 3$.

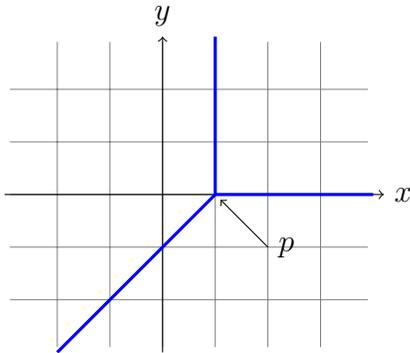
1.4. Rectas tropicales en \mathbb{T}^2 . En esta sección encontramos lugares de ceros de polinomios tropicales en mas que una variable. Generalizando lo que hemos hecho para polinomios en una variable, vamos definiendo las rectas tropicales.

Definición 1.9. Una **recta tropical** es el lugar de los puntos $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ donde el mínimo

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

es asumido por lo menos dos veces y por lo menos uno entre a, b es distinto de 0_T .

Ejemplo 1.10. La recta tropical definida por el polinomio $1 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2$ es:



La **recta tropical** de ecuación

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

es la unión de tres semirectas que salen da:

$$p = (c - a, c - b).$$

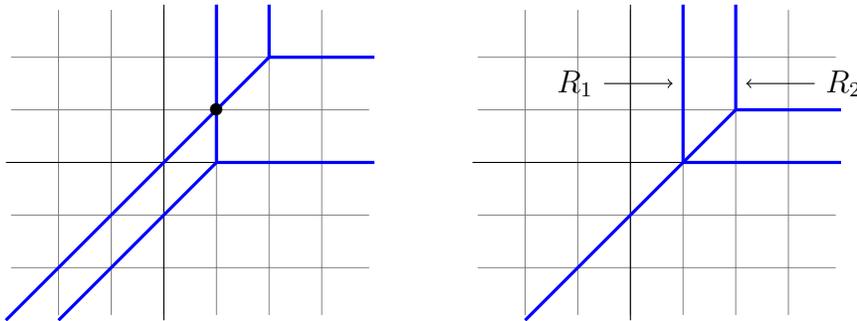
Esto se puede fácilmente verificar resolviendo las desigualdades.

$$1 + x = 2 + y \leq 2 \quad 1 + x = 2 \leq 2 + y \quad 2 + y = 2 \leq 1 + x$$

Observamos que dos rectas tropicales se pueden encontrar en infinitos puntos sin ser iguales. Por ejemplo las rectas:

$$R_1 : 1 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2 \quad R_2 : 2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 4$$

tienen infinitos puntos de intersección como se puede ver en el dibujo a la derecha.



Si consideramos la matriz de los coeficientes de los polinomios que definen R_1 y R_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

observamos que la primera columna es múltipla (tropical) de la segunda.

Proposición 1.11. *Dos rectas tropicales en \mathbb{R}^2 tienen infinitos puntos de intersección si y solo si la matriz de los coeficientes de las rectas:*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

tienes dos columnas una múltipla de la otra.

Demostración. Consideramos los puntos

$$p = (a_2 - a_0, a_2 - a_1), \quad q = (b_2 - b_0, b_1 - b_0).$$

La dos rectas tropicales tienen infinitos puntos de intersección si y solo si, o bien p y q tienen una coordenada igual o bien la diferencia entre las dos coordenadas de q es igual a la diferencia entre las dos coordenadas de p . \square

Definición 1.12. El *determinante tropical* de una matriz 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := a \odot d \oplus b \odot c.$$

Una matriz es *singular* si el mínimo en el determinante es asumido dos veces, o equivalentemente si $a + d = b + c$.

1.5. Espacios vectoriales tropicales. Un *espacio vectorial tropical* es un conjunto V con dos operaciones

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, \quad \odot : \mathbb{T} \times V \rightarrow V$$

que satisfacen las propiedades:

1. V es un monoide con respecto a \oplus ,
2. \oplus, \odot son distributiva una con respecto a la otra.
3. $1_T \odot v = v$ para cada $v \in V$.
4. $0_T \odot v = 0_v$ para cada $v \in V$.

Los elementos de V se llaman *vectores*. Un ejemplo de espacio vectorial tropical es el conjunto \mathbb{T}^n con la dos operaciones de suma y producto tropical hecha componente a componente. Una *base* $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V es un conjunto minimal de vectores tal que cada elemento $v \in V$ se puede escribir como

$$v = a_1 \odot v_1 \oplus \dots \oplus a_n \odot v_n,$$

donde los $a_i \in \mathbb{T}$.

Proposición 1.13. Cada base de \mathbb{T}^n es hecha por vectores e_1, \dots, e_n donde cada e_i tiene solamente la i -ésima coordenada distinta de 0_T .

Demostración. Por supuesto un conjunto de vectores que cumple con la hipótesis del teorema es una base de \mathbb{T}^n . Consideramos ahora la ecuación:

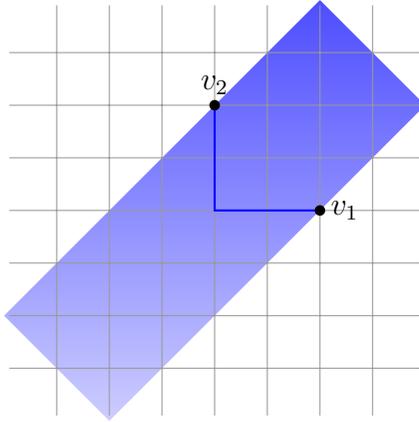
$$e_i = (a_1, \dots, a_n) \oplus (b_1, \dots, b_n).$$

Para cada $r \neq i$ hay que $a_r \oplus b_r = 0_T$ así que $a_r = b_r = 0_T$. Esto implica que si e_i es combinación lineal de v_1, \dots, v_n entonces todos los v_i tienen que ser múltiplos tropicales de e_i . \square

Ejemplo 1.14. Sea V el espacio vectorial tropical generado por los vectores $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (0, 1)$. Observamos que la ecuación:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus b \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tiene solución si y solo si $-1 \leq x - y \leq 1$. Por lo tanto V se puede dibujar como sigue.



El **espacio vectorial tropical**

$$a \odot v_1 \oplus b \odot v_2.$$

La dos **lineas** son:

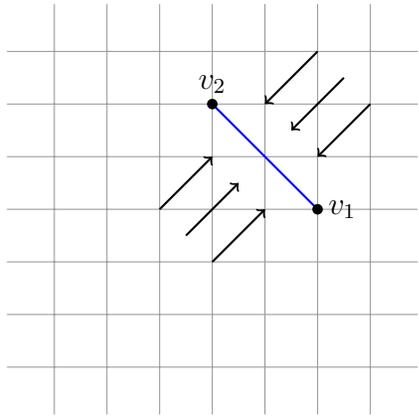
$$v_1 \oplus t \odot v_2, \quad t \odot v_1 \oplus v_2$$

para valores de $t \geq 0$.

Definimos el **proyectivizado** de un espacio vectorial tropical V como

$$\mathbb{P}(V) := V \setminus \{0_v\} / \mathbb{R}(1, \dots, 1).$$

Esto significa poner la relación de equivalencia $v \sim t \odot v$ donde $t \in \mathbb{R}$.



El **proyectivizado** de V :

$$\mathbb{P}(V) = [-1, 1]$$

es representado por la línea azul.

La **dimensión** de un espacio vectorial tropical V es el máximo entero d tal que existe una bola euclidiana de dimensión d contenida en V . A la misma manera se define la dimensión de $\mathbb{P}(V)$ y es simple verificar que:

$$\dim(V) := \dim \mathbb{P}(V) + 1.$$

Como consecuencia de nuestro ejemplo sabemos que existe un espacio vectorial tropical V de dimensión 2 propiamente contenido en \mathbb{T}^2 . Observamos que la intersección de dos espacios vectoriales tropicales de dimensión 2 puede ser un espacio de dimensión 2 contenido estrictamente en los dos. Así como en el caso clásico queremos de probar que un conjunto definido por una ecuación cartesiana lineal en las variables es un espacio vectorial tropical.

Proposición 1.15 (Ver [1]). *El hiperplano $H \subset \mathbb{T}^n$ definido como los $x \in \mathbb{T}^n$ donde el mínimo*

$$a_1 \odot x_1 \oplus \dots \oplus a_n \odot x_n$$

es asumido por lo menos dos veces es un espacio vectorial tropical.

Demostración. Tenemos que probar que si $v, w \in H$ y $b, c \in \mathbb{T}$ entonces

$$(1.2) \quad b \odot v \oplus c \odot w \in H.$$

Como $v \in H$ sabemos que el mínimo entre los $a_i + v_i$ es asumido por lo menos dos veces. Suponemos por comodidad que este mínimo sea asumido para $i = 1, 2$. Sean $i = k, s$ los índices

donde es asumido el mínimo de $a_i + w_i$. Sea $(a_1 \odot x_1, \dots, a_n \odot x_n)$ la suma tropical de los vectores:

$$\begin{aligned} b &\odot (\mathbf{a}_1 \odot \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_1 \odot \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{a}_k \odot v_k, \dots, \mathbf{a}_s \odot v_s, \dots) \\ c &\odot (a_1 \odot w_1, a_1 \odot w_2, \dots, \mathbf{a}_k \odot \mathbf{w}_k, \dots, \mathbf{a}_s \odot \mathbf{w}_s, \dots). \end{aligned}$$

Si $b \leq c + (a_k + w_k) - (a_1 + v_1)$ el mínimo entre las coordenadas de este vector es asumido para $i = 1, 2$, así que para estos valores de b vale (1.2). Por los remanentes valores de b , tenemos que el mínimo es asumido para $i = k, s$, así que siempre vale (1.2). \square

Como aplicación de la Proposición 1.15 consideramos las combinaciones tropicales de tres vectores de \mathbb{T}^3 . Si v_i, v_j son dos vectores de \mathbb{T}^3 y H es un plano tropical que los contiene, entonces H contiene las combinaciones lineales tropicales de v_i, v_j . Si miramos lo que pasa en el proyectivizado $\mathbb{P}(\mathbb{T}^3)$, a v_i, v_j corresponden dos puntos p_i, p_j y al plano H corresponde una recta tropical L_H . Por lo tanto a $a \odot v_i \oplus b \odot v_j$ corresponde la **combinación tropical convexa** entre los puntos p_i, p_j que es un subconjunto de L_H .

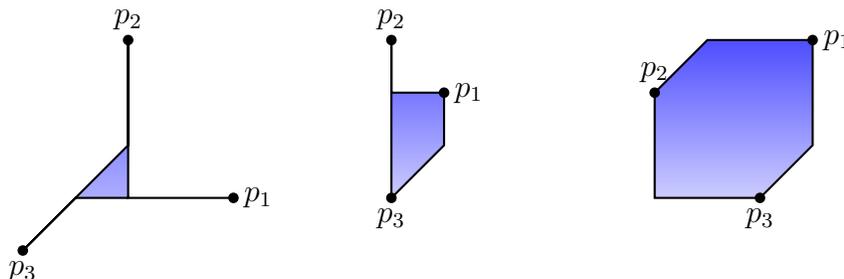


FIGURA 1. Combinaciones tropicales convexas de 3 puntos.

1.6. Aplicaciones lineales tropicales. Una **aplicación lineal tropical** entre espacios vectoriales tropicales es una función $f : V \rightarrow W$ que satisface:

$$f(a \odot v \oplus b \odot w) = a \odot f(v) \oplus b \odot f(w)$$

para cada $a, b \in \mathbb{T}$ y $v, w \in V$.

Ejemplo 1.16. Si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es lineal tropical entonces:

$$f(x) = x + f(0)$$

para todos los valores de $x \in \mathbb{T}$. Si $f(0) \neq 0_T$ esto implica que f es una translación.

Algunas propiedades de las aplicaciones lineales clásicas se preservan en el caso tropical. Por ejemplo si $f : V \rightarrow W$ es lineal tropical, entonces $f(V) \subseteq W$ es un espacio vectorial tropical. Este sigue directamente da la definición de aplicación lineal tropical. Mas difícil es dar una definición del núcleo de f . En el caso donde $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^m$ es definida para $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$, podemos definir

$$\ker(f) := \bigcap_{i=1}^m \text{hiperplano } f_i(x).$$

Observamos que el núcleo de una aplicación lineal tropical es un espacio vectorial tropical.

Ejemplo 1.17. Sea $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^2$ la aplicación definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 1 \odot x_1 \oplus 2 \odot x_2 \oplus 2 \odot x_3 \\ 2 \odot x_1 \oplus 3 \odot x_2 \oplus 4 \odot x_3 \end{pmatrix},$$

entonces $\mathbb{P}(\ker(f))$ es la semirecta $\{(t+1, t) \in \mathbb{P}(\mathbb{T}^3) \mid t \leq 0\}$ cuyo dibujo se encuentra en sección 1.4.

Se puede definir el producto de dos matrices tropicales en la misma manera del producto entre dos matrices clásicas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix}$$

donde los coeficientes de la matriz de derecha son:

$$c_{ij} = a_{i1} \odot b_{1j} \oplus \dots \oplus a_{in} \odot b_{nj}.$$

Si A es una matriz tropical de tamaño $n \times m$, la aplicación $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^m$ definida por

$$f(v) := A \odot v$$

es lineal tropical.

Ejemplo 1.18. La aplicación lineal $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es inyectiva porque, por ejemplo, $f(2, 0) = f(1, 0) = (0, 1)$. El núcleo de f es la intersección de los ceros de $1 \odot x_1 \oplus x_2$ y $x_1 \oplus 1 \odot x_2$ que nos da:

$$\ker(f) = (0_T, 0_T).$$

Este prueba que el núcleo de una aplicación lineal no estas relacionado con el hecho que la aplicación sea inyectiva. Observamos que $\dim f(\mathbb{T}^2) = 2$.

Proposición 1.19 (Ver [7]). *Sea $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^m$ la aplicación definida por $f(v) = A \odot v$, entonces $\ker(f) \neq 0_{\mathbb{T}^n}$ si y solo si $\dim f(\mathbb{T}^n) < n$.*

El **determinante** de la matriz tropical $A = (a_{ij})$ es:

$$\det(A) = \bigoplus_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \odot \dots \odot a_{1\sigma(n)}.$$

Una matriz M es **singular** si el mínimo de las formas lineales en el determinante es asumido por lo menos dos veces.

Ejemplo 1.20. Los determinantes de las tres matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0_T & 0_T \\ 0_T & 0 & 0_T \\ 0_T & 0_T & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son 15, 0, 1 respectivamente y todas son singulares.

Observamos que si la matriz A tienes determinante 0_T entonces es singular pero no vale el viceversa. La relación entre el determinante de una matriz y la dimensión de la imagen de la aplicación lineal asociada es:

Proposición 1.21 (Ver [7]). *Sea A una matriz cuadrada y sea $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ la aplicación definida por $f(v) = A \odot v$. Entonces $\ker(f) \neq 0_{\mathbb{T}^n}$ si y solo si A es singular.*

Ejercicios.

1. Describir el conjunto

$$\{a \odot t \oplus b \in \mathbb{T} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

al variar de $a, b \in \mathbb{T}$.

2. Sea
- $P = a_n \odot x^n \oplus \cdots \oplus a_1 \odot x \oplus a_0$
- , probar que

$$a_0 = P(0_T), \quad \deg P = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x}.$$

3. Sea
- $F(x)$
- una función lineal por pedazos. Probar que existe un polinomio tropical
- Q
- tal que
- $Q(x) = F(x)$
- si y solo si todos los pedazos lineales de
- $F(x)$
- tienen pendiente entera non negativa.

4. Calcular las sumas

$$x^n \oplus x^{n-1} \oplus \cdots \oplus x \oplus 0 \quad n \odot x^n \oplus n-1 \odot x^{n-1} \oplus \cdots \oplus 1 \odot x \oplus 0$$

5. Encontrar las raíces del polinomio tropical
- $a \odot x^2 \oplus b \odot x \oplus c$
- .

6. Sea
- G
- un grupo y sea
- $\phi : (\mathbb{T}, \oplus) \rightarrow G$
- un homomorfismo de semigrupos, probar que
- $\phi(x) = 0_G$
- para cada
- $x \in \mathbb{T}$
- .

7. Sea
- P
- un polinomio tropical de grado 1. Probar que el gráfico de la función
- $P(x)$
- es parte del gráfico de una recta tropical.

8. Probar que las combinaciones lineales tropicales
- $t \odot v \oplus w$
- , donde
- $v, w \in \mathbb{T}^2$
- y
- $t \in \mathbb{T}$
- definen un pedazo de recta tropical. Como se encuentra una ecuación de este recta?

9. Probar que la recta tropical

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

es la unión de tres semirectas que salen del punto $(c - a, c - b)$ con pendientes: $0, 1, \infty$ si y solo si $a \odot b \odot c \neq 0_T$.

10. Dibujar las rectas tropicales:

$$x \odot y, \quad x \odot 1, \quad y \odot -1.$$

11. Encontrar el lugar de las rectas definidas por

$$t \odot x \oplus t + 1 \odot y \oplus t + 2$$

al variar de $t \in \mathbb{R}$.

12. Usar los axiomas de espacio vectorial tropical para probar que
- $v \oplus v = v$
- para cada
- $v \in V$
- .

13. Encontrar todas las matrices
- 2×2
- M
- tal que
- $M \odot A = A$
- donde
- A
- es una matriz
- 2×2
- dada y dar una interpretación geométrica del resultado.

14. Probar que el producto de dos matrices tropicales
- 2×2
- es singular si por lo menos una de las dos es singular.

15. Encontrar núcleo e imagen de la aplicación lineal definida por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Probar que la multiplicación a la izquierda por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

con $a, b \geq 1$, es la identidad sobre el espacio vectorial $V = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$.

17. Encontrar todas las $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ tal que

$$f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y), \quad f(x \odot y) = f(x) \odot f(y)$$

para cada $x, y \in \mathbb{T}$.

2. AMEBAS

Consideramos la aplicación $\text{Log} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

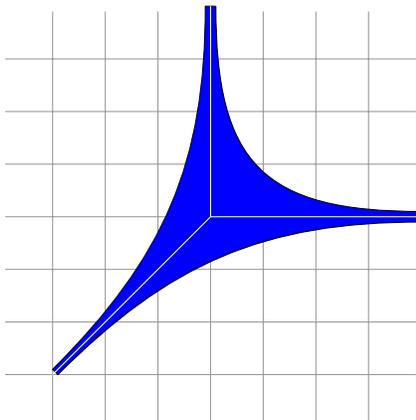
$$\text{Log}(z_1, \dots, z_n) := (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|).$$

Si $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ es una variedad algebraica, su **ameba** es el conjunto:

$$\mathcal{A}(X) := -\text{Log}(X).$$

Las amebas fueron introducidas para estudiar las propiedades topológicas de las curvas algebraicas reales. Es decir, si $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ es una curva algebraica, clasificar las parejas $(C, \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$. Este problema se puede enfrentar con la teoría de las amebas.

Ejemplo 2.1. Si $L \subset (\mathbb{C}^*)^2$ es la recta de ecuación $x + y + 1 = 0$, entonces $\mathcal{A}(X)$ es:



Observe que la ameba de L tiene tres direcciones asintóticas al infinito que se corresponden con los valores $(z_1, z_2) \in L$ donde o bien una de las dos coordenadas va a 0 o bien las dos se van al infinito. El teorema que sigue nos permite de entender la forma de una ameba asociada a una hipersuperficie X . Si X es lugar de ceros de un polinomio $f(x) = \sum a_i x^i$ definimos sus politopo de Newton Δ_f como:

$$\Delta_f := \text{Capsula convexa } \{i \in \mathbb{Z}^n \mid a_i \neq 0\}.$$

Teorema 2.2 (Ver [6]). *Existe una función localmente constante*

$$\text{ind} : \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(X) \rightarrow \Delta_f \cap \mathbb{Z}^n$$

que lleva componentes distintas de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(X)$ en puntos distintos de Δ_f .

Idea de la demostración. Una función F definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es plurisubarmónica si su restricción a cada recta compleja L es subarmónica. Después de probar que la función $\log |f| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es plurisubarmónica se define la *función de Ronkin* $N_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$N_f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_T \log |f(e^{x+i\theta})| d\mu,$$

donde $T = \text{Log}^{-1}(x)$ es el toro con medida de Lebesgue $d\mu = d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n$. Se prueba que N_f tiene valores reales en $-\mathcal{A}(X)$ donde el integrando es singular. El hecho que $\log |f|$ es plurisubarmónica implica que

$$\Delta N_f(x) \geq 0 \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^n,$$

es decir que N_f es una función convexa. Además, si $x \in \mathbb{R}^n \setminus -\mathcal{A}(X)$ entonces N_f es pluriarmónica en x así que es una función lineal porque la segunda derivada de N_f en cualquier dirección

es cero.

Esto nos dice que el gradiente ∇N_f es constante sobre cada componente $E \subseteq \mathbb{R}^n \setminus -\mathcal{A}(X)$. Por la formula de Jensen vale:

$$\nabla N_f(E) \in \mathbb{Z}^n \cap \Delta_f.$$

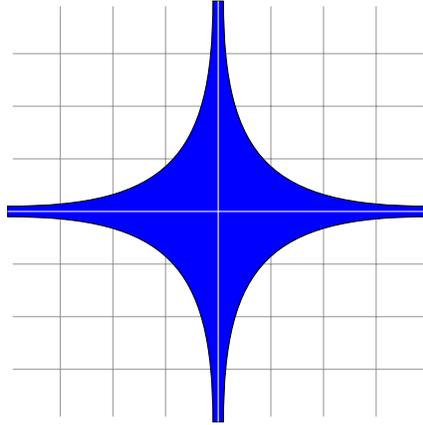
Si definimos

$$\text{ind}(x) := \nabla N_f(-x),$$

la función ind tiene las propiedades del teorema. □

Ejemplo 2.3. El politopo de Newton de la recta $x + y + 1 = 0$ es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. En este caso, los tres puntos representan las tres componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(X)$.

Ejemplo 2.4. El politopo Δ_f de la hipérbola de ecuación $xy + x + y - 1 = 0$ es el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. La ameba $\mathcal{A}(X)$ tiene cuatro ramos que se van al infinito en correspondencia de los valores de (x, y) que tienen una coordenada que va o bien a cero o bien a infinito:



2.1. La espina de una ameba. Mirando el dibujo de $-\mathcal{A}(L)$, donde L es la recta de ecuación $x + y + 1 = 0$, se puede ver que adentro de la ameba hay una recta tropical. Esta recta se llama la espina de la ameba.

La definición de espina de la ameba de una hipersuperficie $X \subset (\mathbb{C}^*)^n$ de ecuación $f = 0$ es definida por medio de la función de Ronkin. Por cada componente conexa $E \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(X)$ definimos la función $N_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como la única extensión lineal de $N_f|_E$ a todo \mathbb{R}^n . Consideramos la función:

$$N_f^\infty(x) := \text{máx}\{N_E(x) \mid E \text{ es una componente conexa de } \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(X)\}.$$

Definimos la **espina de la ameba** $\mathcal{S}(X)$ como

$$\mathcal{S}_X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid N_f^\infty \text{ no es localmente lineal en } x\}.$$

Da la definición sigue que \mathcal{S}_X es un politopo contenido en $\mathcal{A}(X)$.

Proposición 2.5 (Ver [6]). *La espina \mathcal{S}_X es un retracto de deformación fuerte de $\mathcal{A}(X)$. Por lo tanto cada componente de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}_X$ contiene una única componente de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}(X)$.*

Funciones plurisubarmónicas. Sea Ω un dominio de \mathbb{C}^n . Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, es plurisubarmónica si es semicontinua inferiormente y, para cada recta $L \subset \mathbb{C}^n$, hay:

$$f|_L(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_L(z + re^{i\theta}) d\theta$$

para cada $z \in \mathbb{C}$ y cada $r \in \mathbb{R}_+$. Observamos que si $g(z)$ es una función holomorfa entonces $\log |g(z)|$ es plurisubarmónica.

Formula de Jensen. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(0) \neq 0$. Si $f(z)$ no tiene ceros en la circunferencia $|z| = e^x$ entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{x+i\theta})| d\theta = nx + \log |f(0)| - \sum_{k=1}^n \log |a_k|,$$

donde a_1, \dots, a_n son los ceros de f en $|z| < e^x$.

2.2. Amebas no arquimedianas. Sea k un campo. Empezamos la sección recordando que hay una correspondencia uno a uno entre las normas *no-arquimedianas* y las *valutaciones* definidas sobre k . Los axiomas para una norma no arquimediana sobre k se comparan con los axiomas de una valuación según se indica:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $ x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, | 1'. $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$ |
| 2. $ xy = x y $, | 2'. $v(xy) = v(x) + v(y)$ |
| 3. $ x + y \leq \max\{ x , y \}$ | 3'. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ |

La correspondencia entre los dos se realiza por la función:

$$v(x) := -\log |x|.$$

para cada $x \in k$. En lo que sigue k será un campo algebraicamente cerrado que es un espacio métrico completo con respecto a la métrica inducida por la norma. Consideramos la aplicación $\text{val} : (k^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\text{val}(x_1, \dots, x_n) := (v(x_1), \dots, v(x_n)).$$

Dada una variedad algebraica $X \subset (k^*)^n$ definimos la variedad tropical $\mathcal{A}(X) \subset \mathbb{R}^n$ como el conjunto:

$$\mathcal{A}(X) := \overline{\text{val}(X)}.$$

La diferencia principal con respecto a la definición de la sección 1 es el hecho que k es no arquimediano. Esto nos permite de dar una descripción simple de $\mathcal{A}(X)$.

Ejemplo 2.6. Como ejemplo guía de campo no arquimediano podemos considerar las series formales $\overline{\mathbb{C}((t))}$ de la forma $\sum a_\alpha t^\alpha$, con $a_i \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$. El campo $\overline{\mathbb{C}((t))}$ tiene una valuación a valores racionales:

$$v\left(\sum a_\alpha t^\alpha\right) := \min\{\alpha \mid a_\alpha \neq 0\}.$$

Consideramos la hipersuperficie $X \subset (k^*)^n$ de ecuación $\sum_{i \in \mathbb{Z}^n} a_i x^i = 0$ con coeficientes $a_i \in k$. La **tropicalización de X** es:

$$X^T := \{z \in \mathbb{T}^n \mid \oplus v(a_i) \odot z^i \text{ es asumido por lo menos 2 veces}\}.$$

Lema 2.7. Sean $t_1, \dots, t_r \in k^*$ tales que $t_1 + \dots + t_r = 0$, entonces $\max\{|t_1|, \dots, |t_r|\}$ es asumido por lo menos dos veces.

Demostración. Empezamos observando que $|-t| = |t|$ por todos los elementos $t \in k$. Ahora, suponemos que el máximo sea asumido en t_1 , entonces la ecuación $t_1 = -(t_2 + \dots + t_r)$ nos da $|t_1| = |t_2 + \dots + t_r| \leq \max\{|t_2|, \dots, |t_r|\}$ lo que implica la tesis. \square

El polígono generalizado de Newton de un polinomio de Laurent $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} a_i x^i$ es:

$$\tilde{\Delta}_f := \text{Capsula convexa } \{(i, u) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R} \mid u \geq v(a_i)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

El lema que sigue nos permite de probar el resultado principal de esta sección.

Lema 2.8 (Ver [3]). *Sea $f(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i$ un polinomio de Laurent en una variable. Si α es la pendiente de uno de los lados de $\tilde{\Delta}_f$ entonces existe una raíz x_0 de f tal que $v(x_0) = -\alpha$.*

Veamos una consecuencia interesante del Lema 2.8. Sea $\sum a_i x^i \in k[x]$ y sean x_1, \dots, x_n su raíces, entonces el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \sum a_i x^i & \xrightarrow{\text{raíces}} & \{x_1, \dots, x_n\} \\ \downarrow v & & \downarrow v \\ \oplus v(a_i) \odot z^i & \xrightarrow[\text{tropicales}]{\text{raíces}} & \{v(x_1), \dots, v(x_n)\} \end{array}$$

es conmutativo. Este hecho admite una generalización importante en dimensión arbitraria.

Teorema 2.9 (Ver [3]). *Sea X una hipersuperficie algebraica de $(k^*)^n$, entonces:*

$$\mathcal{A}(X) = X^T.$$

Demostración. Sea $f := \sum a_i x^i$ el polinomio que define X .

1. $\mathcal{A}(X) \subseteq X^T$. Como X^T es cerrado, es suficiente probar que $\text{val}(X) \subseteq X^T$. Sea $z = \text{val}(x)$ un elemento de $\text{val}(X)$. Como $\sum a_i x^i = 0$, por el lema 2.7 el máximo entre los valores $|a_i x^i|$ es asumido por lo menos dos veces. Por lo tanto $\min\{v(a_i x^i)\}$ o equivalentemente $\min\{v(a_i) + z \cdot i\}$ es asumido por lo menos dos veces, así que $z \in X^T$.
2. $X^T \subseteq \mathcal{A}(X)$. Es suficiente probar que $X^T \cap \text{val}(k^*)^n \subseteq \mathcal{A}(X)$ porque $\text{val}(k^*)^n$ es denso en \mathbb{R}^n y X^T es un poliedro racional en $\text{val}(k^*)^n$. El efecto de un cambio de variables del tipo $z_i \mapsto z_i \cdot c_i$ es la traslación de $\mathcal{A}(X)$ y X^T por el vector $-\text{val}(c)$. Por lo tanto podemos suponer que

$$0 \in X^T,$$

entonces tenemos que probar que $0 \in \mathcal{A}(X)$. Es suficiente probar que existe una raíz (x_1, \dots, x_n) de f de la forma

$$x_i = s_0^{b_i} \quad \text{tal que} \quad v(s_0) = 0.$$

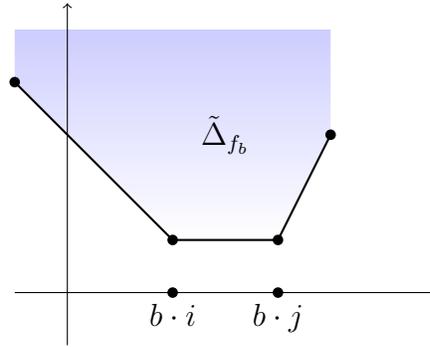
A cada $b \in \mathbb{Z}^n$ asociamos el polinomio de Laurent:

$$f_b(s) = f(s^{b_1}, \dots, s^{b_n}) = \sum a_i s^{b \cdot i}.$$

El hecho que $0 \in X^T$ significa que existen por lo menos $i, j \in \mathbb{Z}^n$ tal que

$$v(a_i) = v(a_j) \leq v(a_k)$$

para todos los $k \in \mathbb{Z}^n$ donde $a_k \neq 0_T$. Si $b \in \mathbb{Z}^n$ es tal que $b \cdot (i - j) \neq 0$, entonces $\tilde{\Delta}_{f_b}$ tiene un lado horizontal y por lema 2.8 hay que f_b tiene una raíz s_0 con $v(s_0) = 0$.



□

Ejercicios.

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ y sea $L \subset (\mathbb{C}^*)^2$ la recta de ecuación $ax + by + c = 0$.
 - a) Dibujar la ameba $\mathcal{A}(L)$.
 - b) Encontrar la espina \mathcal{S}_L de $\mathcal{A}(L)$ y encontrar la ecuación de la recta tropical $-\mathcal{S}_L$.
2. Encontrar las amebas de las cónicas definidas en $(\mathbb{C}^*)^2$:
 - a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$
 - b) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
 - c) $xy + x - y + 1 = 0$

(Sugerencia: usar una parametrización racional de las tres cónicas).
3. Sea k un campo no arquimediano de característica 0. Probar que
 - a) $|p/q| = 1$ para cada $p/q \in \mathbb{Q}$,
 - b) si $|x + y| < \max(|x|, |y|)$ entonces $|x| = |y|$.
4. Encontrar la ameba de la recta de ecuación $x + y + 1 = 0$ definida en $(\overline{\mathbb{C}((t))}^*)^2$.
5. Sea $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ la ecuación de una cónica lisa definida sobre el campo no arquimediano k . Encontrar todos los posibles tipos combinatorios de sus amebas.

3. DE LA GEOMETRÍA CLÁSICA A LA GEOMETRÍA TROPICAL

El contenido de la última sección se dedicó a establecer una conexión entre la geometría clásica y tropical. Vamos a examinar de qué manera esto puede hacerse. En primer lugar tenemos que trabajar en un campo algebraicamente cerrado $k = \bar{k}$ de característica 0 que está dotado con una valuación $v(z) = -\log |z|$, donde $|\cdot|$ es una norma no-arquimediana. La aplicación val nos permite de construir un diccionario entre dos clases de variedades:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Variedades algebraicas} \\ X \subset (k^*)^n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{val}} \left\{ \begin{array}{c} \text{Variedades lineales por pedazos} \\ \mathcal{A}(X) \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

La definición se basa en el hecho de que si X es el lugar de ceros de un polinomio de Laurent $\sum a_i x^i$, entonces $\mathcal{A}(X)$ es la hipersuperficie tropical (el único tipo de variedad tropical que hemos definido hasta ahora) $\bigoplus_i v(a_i) \odot x^i$:

$$\{x \in (k^*)^n \mid \sum a_i x^i = 0\} \xrightarrow{\text{val}} \left\{ \begin{array}{c} z \in \mathbb{R}^n \mid \min_i \{v(a_i) + z \cdot i\} \\ \text{es asumido por lo menos dos veces} \end{array} \right\}$$

Esta correspondencia puede ser explorada en muchas direcciones. Nos concentraremos en el caso de las curvas algebraicas en $(k^*)^2$. La incrustación $(k^*)^2 \subset \mathbb{P}_k^2$ nos da una compactification natural de las curvas algebraicas $C \in (k^*)^2$. De esta manera podemos usar las palabras *género* y *grado* de C entendiendo con estos el genero y el grado de $\bar{C} \subset \mathbb{P}_k^2$. Es posible dar una noción de *grado tropical* y *género tropical* para las curvas tropicales. La correspondencia entre curvas y curvas tropicales preserva estos invariantes.

Observación 3.1. El grupo $\text{Aut}((k^*)^n)$ actúa de manera natural sobre $(k^*)^n$. Esta acción se traduce, por medio de la aplicación val , en traslaciones de \mathbb{R}^n así que es natural de considerar dos variedades tropicales como *linealmente isomorfas* si una se puede obtener da la otra por medio de una translación.

3.1. Curvas tropicales planas. En esta sección estudiamos las curvas algebraicas tropicales $C \subset \mathbb{T}^2$. Sea Δ_d el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(d, 0)$, $(0, d)$ y sea

$$(3.1) \quad \bigoplus_{(i,j) \in \Delta_d} b_{ij} \odot x^i \odot y^j$$

un polinomio tropical así que C es al lugar de los $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ donde el mínimo es asumido por lo menos dos veces. El numero d es el **grado** de la curva C . Dividimos la descripción del gráfico de C en dos partes.

Comportamiento local. Por simplificar denotamos por

$$f_{ij}(x, y) := b_{ij} + ix + jy.$$

Empezamos estudiando una vecindad de un punto $p \in C$. Después de una translación podemos asumir que $p = (0, 0)$ así que sean

$$f_{i_1 j_1}(x, y), \dots, f_{i_r j_r}(x, y)$$

las formas lineales que alcanzan el valor mínimo en p . Ponemos $p_k := (i_k, j_k)$ y definimos Δ_p como la cápsula convexa generada por p_1, \dots, p_r .

Lema 3.2. *Existe una vecindad U_p de p tal que las aristas de $U_p \cap C$ salen de p con direcciones ortogonales a los lados de $\partial \Delta_p$.*

Demostración. Como el mínimo en $(0, 0)$ es asumido por la primeras r funciones tenemos que

$$f_{i_a j_a}(0, 0) < f_{i_s j_s}(0, 0) \quad \text{si} \quad a \leq r < s.$$

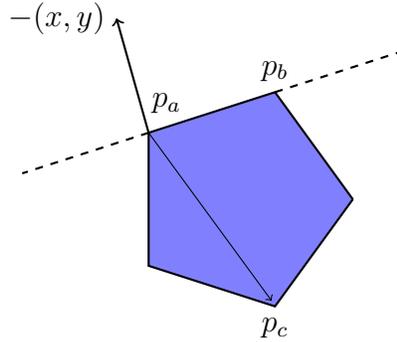
Esto implica que si (x, y) es un punto suficientemente cercano a $(0, 0)$ el mínimo entre $f_{i_s j_s}(x, y)$ es asumido para valores de $s \leq r$. Entonces un tal (x, y) pertenece a C si y solo si existen $a, b \in \{1, \dots, r\}$ tales que:

$$f_{i_a j_a}(x, y) = f_{i_b j_b}(x, y), \quad f_{i_a j_a}(x, y) \leq f_{i_c j_c}(x, y)$$

para todos los $1 \leq c \leq r$. Esto se puede escribir como:

$$(x, y) \cdot (p_a - p_b) = 0, \quad (x, y) \cdot (p_a - p_c) \leq 0$$

La primera condición nos dice que (x, y) es ortogonal a $p_a - p_b$ y la segunda que todos los vectores $p_a - p_c$ con $p_c \in \Delta_p$ deben pertenecer a un mismo semiplano delimitado por la dirección ortogonal a (x, y) .



□

El lema 3.2 muestra que las aristas de $U_p \cap C$ son ortogonales a las direcciones de los lados de Δ_p . Localmente la curva tropical C aparece así:

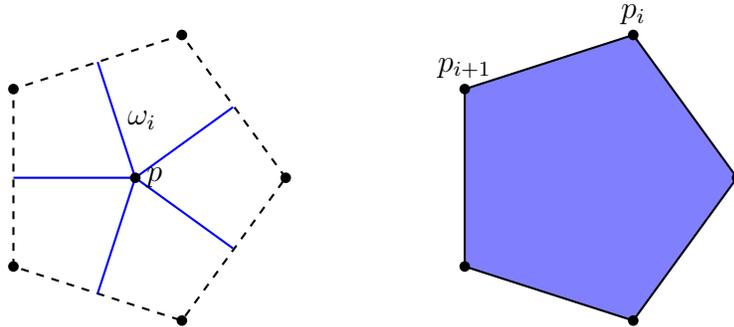


FIGURA 2. Análisis local de C en U_p .

Esta descripción local de C nos permite probar que el grafo dual de C es una subdivisión de Δ_d cuyo nombre es **subdivisión regular**. Sean $[w_1], \dots, [w_r]$ las aristas de $U_p \cap C$ incidentes a p . Como estos lados tienen pendientes racionales consideramos los vectores primitivos $w_i \in \mathbb{Z}^2$ que definen $[w_i]$.

Proposición 3.3. *Sea μ_i la longitud entera (el número de puntos enteros menos uno) del lado dual de w_i , entonces:*

$$\sum_{p \in [w_i]} \mu_i w_i = 0.$$

Demostración. Después de reenumerar los vértices de Δ_p podemos suponer que $p_{i+1} - p_i$ sea ortogonal a w_i por $i = 1, \dots, r-1$ y que $p_1 - p_r$ sea ortogonal a w_r . Consideramos la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{de } \text{GL}(2, \mathbb{Z}),$$

entonces $M(p_{i+1} - p_i) = \mu_i w_i$ porque el vector a la derecha es ortogonal a $p_{i+1} - p_i$ y tiene una longitud entera de μ_i . La tesis sigue de la igualdad:

$$\sum_{v \in [w_i]} \mu_i w_i = \sum_{i=1}^{l-1} M(p_{i+1} - p_i) + M(p_1 - p_l) = 0.$$

□

Comportamiento global. Un algoritmo para encontrar la subdivisión regular de Δ_d que se corresponde con C es el siguiente. Dada la curva tropical C , definida por $\oplus_{\Delta_d} b_{ij} \odot x^i \odot y^j$, consideramos:

$$\tilde{\Delta}_C := \text{Cápsula convexa } \{(i, j, t) \in \mathbb{R}^3 \mid (i, j) \in \Delta_d \quad t \geq b_{ij}\}.$$

Sea Δ_C el conjunto de las caras de $\tilde{\Delta}_C$ cuya normal externa tiene la tercera coordenada negativa y sea $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección sobre las primeras dos coordenadas.

Proposición 3.4 (Ver [7]). *Sea $C \subset \mathbb{T}^2$ una curva tropical de grado d . Las regiones de la subdivisión regular de Δ_d inducida por C son $\pi(F)$ donde F es una cara de Δ_C .*

Demostración. Cada monomio tropical m_s de C se puede escribir como $q_s \cdot (x, y, 1)$ donde $q_s = (i_s, j_s, b_{i_s j_s})$. Sea (x_0, y_0) un vértice de C , después de cambiar el orden de los q_i podemos suponer que:

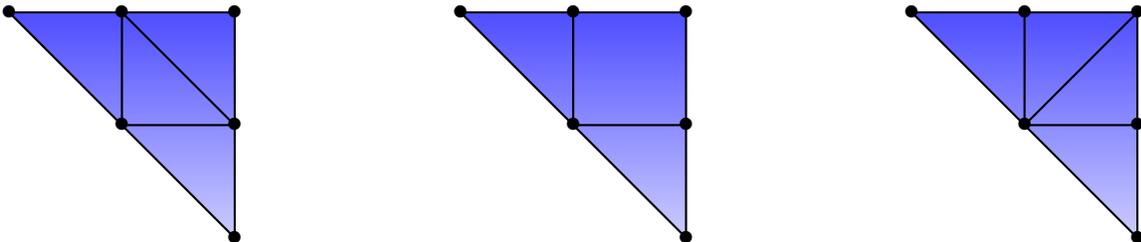
$$(3.2) \quad q_1 \cdot (x_0, y_0, 1) = \dots = q_r \cdot (x_0, y_0, 1) < q_s \cdot (x_0, y_0, 1)$$

para cada $s > r$. Esto pasa si y solo si $\tilde{\Delta}_C$ es contenido en el semiespacio delimitado por el plano H generado para q_1, \dots, q_r . Observamos que $(q_s - q_1) \cdot (-x_0, -y_0, -1) < 0$ así que el vector $(-x_0, -y_0, -1)$ es la normal externa de la cara de $\tilde{\Delta}_C$ generada para q_1, \dots, q_r . □

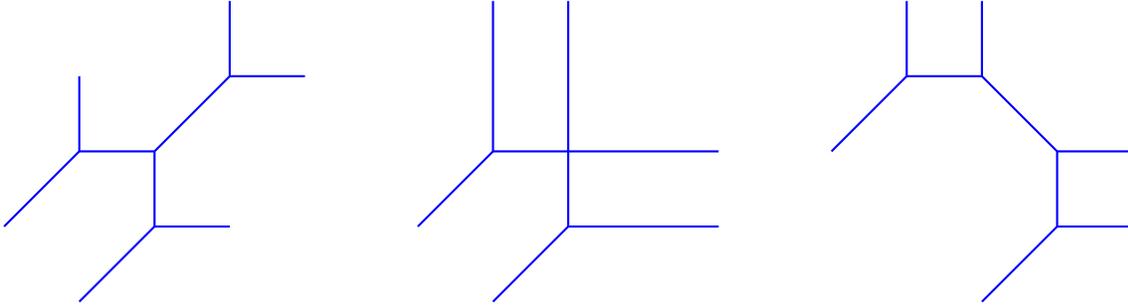
3.2. Cónicas y cúbicas tropicales. Los resultados de la sección anterior se pueden usar fácilmente para clasificar todos los posibles tipos combinatorios de cónicas tropicales. El triángulo Δ_2 asociado a la cónica

$$b_{20} \odot x^2 \oplus b_{11} \odot x \odot y \oplus b_{02} \odot y^2 \oplus b_{10} \odot x \oplus b_{01} \odot y \oplus b_{00}$$

tiene vértices: $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$. Por la Proposición 3.3 la subdivisión regular de Δ_2 dada para C es dual al gráfico de C . Como ejemplo consideramos las subdivisiones regulares:

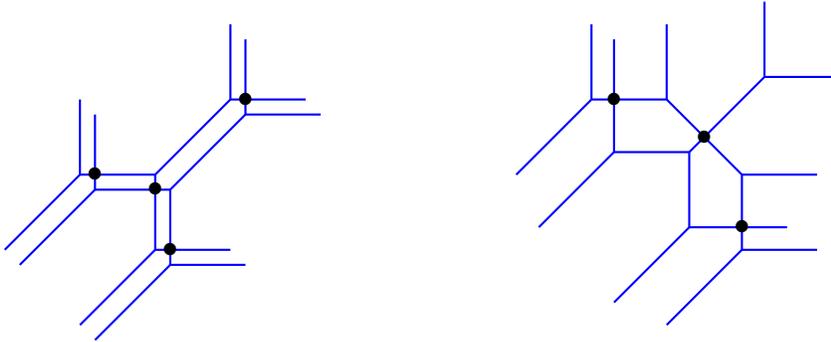


Las cónicas tropicales correspondientes son:



Observamos que la primera cónica se puede deformar con continuidad en la segunda y esta se deforma en la tercera. De hecho hay una familia de cónicas que contiene a las tres. La segunda cónica representa un gráfico que puede ser obtenido también como unión de dos rectas tropicales: esta cónica es reducible.

La combinatoria de las intersecciones de dos cónicas tropicales son muchas, como ejemplo veamos las siguientes:

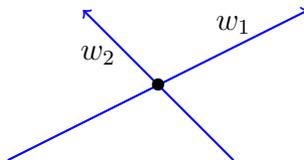


Es posible definir una **multiplicidad de intersección** $I(p, C_1, C_2)$ en los puntos $p \in C_1 \cap C_2$ así que:

$$\sum_{p \in C_1 \cap C_2} I(p, C_1, C_2) = 4.$$

Esta multiplicidad tiene que ser un número que no cambia para las pequeñas deformaciones de las dos curvas (por ejemplo, actuando sobre una de las dos curvas por medio de una traslación). Entonces necesitamos una definición sólo para “puntos dobles” (del punto salen 2 lados de las dos curvas) porque cualquier otra intersección se deforma en una unión de estos.

Si U_p es una vecindad suficientemente pequeña de $p \in C_1 \cap C_2$, las dos ramas pueden ser representados por dos rectas que se cruzan en p :



Estas líneas tienen pendientes racionales (ya que se obtienen como lugar de ceros de dos polinomios racionales de grado 1), de modo que hay dos vectores primitivos $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}^2$ que les representan. Definimos la multiplicidad de intersección de C_1, C_2 en p como:

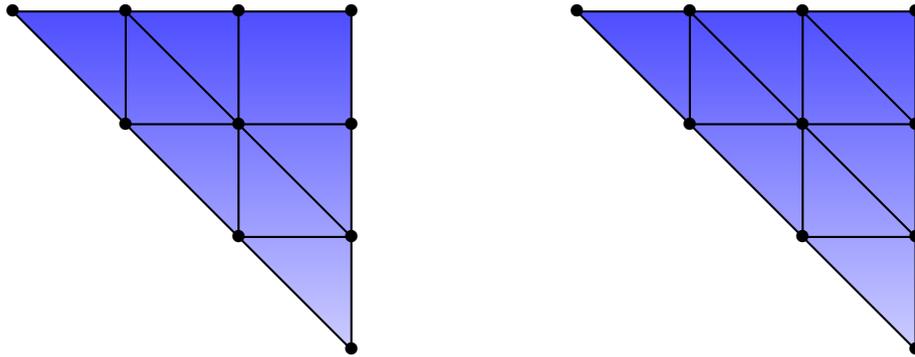
$$I(p, C_1, C_2) := \mu_1 \mu_2 |\text{Det}(w_1, w_2)|.$$

El teorema siguiente es una generalización al caso tropical de un teorema clásico para las curvas algebraicas planas.

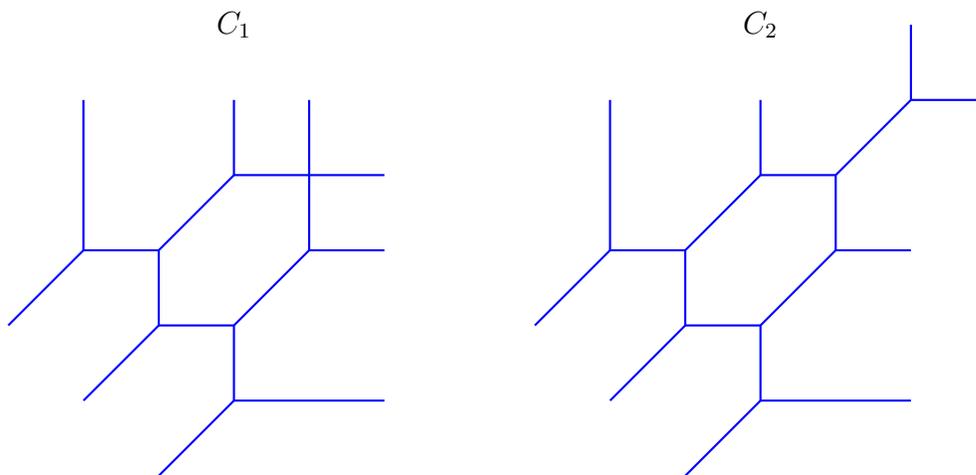
Teorema 3.5 (Teorema de Bézout tropical [7]). Sean C_1, C_2 dos curvas tropicales de grados d_1, d_2 respectivamente. Si $C_1 \cap C_2$ es un conjunto finito, entonces:

$$\sum_{p \in C_1 \cap C_2} I(p, C_1, C_2) = d_1 d_2.$$

Como ejemplos de cubicas tropicales consideramos las siguientes subdivisiones regulares:



Las curvas duales correspondientes son:



Estas curvas tienen una nueva propiedad con respecto a las cónicas: el grafo contiene un ciclo. La principal diferencia entre las dos curvas es que la curva a la derecha es un grafo trivalente, mientras que la primera tiene un punto de valencia 4. Ya hemos visto que una cónica con un punto de valencia 4 es reducible (es la unión de dos rectas tropicales). Esto ya no es cierto en el caso de las cubicas tropicales. De hecho, las cubicas en el dibujo son irreducibles, y la primera es *singular* en el punto de valencia 4. Se puede probar que si $B \subset (k^*)^2$ es tal que

$$\text{val}(B) = C_1$$

entonces B tiene un punto singular.

Sea \tilde{C}_1 el grafo obtenido por C_1 eliminando el punto de valencia 4 mediante la separación de las dos aristas. Este grafo es un árbol así como el grafo de una cónica tropical o de una recta tropical.

Ejercicios.

1. Describir la acción de $\text{Aut}((k^*)^2)$ sobre las curvas tropicales planas.

2. Sea C la cónica tropical definida por el polinomio $x^T \odot A \odot x$, donde $x^t = (x, y, 1)$ y

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Probar que C no es singular y que A es una matriz singular.

3. Escribir un algoritmo para dibujar las curvas planas tropicales usando la proposición 3.4.
4. Probar el teorema de Bézout tropical para la intersección de dos conicas tropicales.
5. Encontrar la multiplicidad de intersección maximal en un punto de una cubica y una recta tropicales.
6. Encontrar la multiplicidad de intersección maximal en un punto de dos cubicas tropicales.
7. Probar que una cubica tropical con dos puntos singulares es reducible.
8. Encontrar una condición necesaria y suficiente para decidir si una cubica tropical es reducible.

REFERENCIAS

- [1] M. Develin y B. Sturmfels, *Tropical convexity*, Doc. Math. **9**, 1–27 (2004).
- [2] M. Develin, F. Santos y B. Sturmfels, *On the rank of a tropical matrix*, Combinatorial and computational geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **52**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 213–242 (2005).
- [3] M. Einsiedler, M. Kapranov y D. Lind, *Non-archimedean amoebas and tropical varieties*, J. Reine Angew. Math., **601**, 139–157 (2006).
- [4] A. Gathman, *Tropical algebraic geometry*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., **108**, 3–32 (2006).
- [5] N. Grigg y N. Manwaring, *An Elementary Proof of the Fundamental Theorem of Tropical Algebra*, arXiv:0707.2591v1.
- [6] G. Mikhalkin, *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry*, Different faces of geometry, Int. Math. Ser. (N. Y.) **3**, 257–300 (2004).
- [7] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, y T. Theobald, *First steps in tropical geometry*, Idempotent mathematics and mathematical physics, Contemp. Math., **377**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 289–317 (2005).
- [8] D. Speyer y B. Sturmfels, *Tropical Mathematics*, arXiv:math/0408099v1.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS, CASILLA 160-C, CONCEPCIÓN, CHILE.

E-mail address: `alaface@udec.cl`